ACTA ARITHMETICA
VIII (1963)

Über eine Reihe von Ramanujan *

von

W. Staś (Poznań)

1. Wir betrachten die folgende, von Ramanujan stammende Formel ([1], Seite 158)

$$\sqrt{\alpha}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\alpha/n)^2}-\sqrt{\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}=-\frac{1}{2\sqrt{\beta}}\sum_{\varrho}\beta^{\varrho}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\zeta'(\varrho)} \tag{1.1}$$

ϱ — durchläuft alle komplexen Wurzeln der Riemannschen ζ-Funktion, α und β sind positive Zahlen für die

$$\alpha\beta=\pi \tag{1.2}$$

und $\mu(n)$ ist die Möbiussche μ-Funktion.

Diese Formel ist bisjetzt unbewiesen. Es ist nur bekannt, daß (1.1) aus der Einfachheit der komplexen Nullstellen von $\zeta(s)$ und aus gewisser Annahme über die Verteilung der Ordinaten der Wurzeln von $\zeta(s)$ folgt (Siehe [7], Seite 186-187).

Mein Resultat betrifft die in der Formel (1.1) hervortretende Reihe, welche ich im Folgenden, die Reihe von Ramanujan nennen werde.

G. H. Hardy und J. E. Littlewood haben bewiesen ([1], Seite 160) daß die Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}=O(\beta^{-\frac{1}{4}}),\qquad \beta\to\infty \tag{1.3}$$

mit der Riemannschen Vermutung gleichwertig ist.

Wäre die Riemannsche Vermutung falsch, so gäbe es wegen (1.3) notwendigerweise eine untere Abschätzung der Gestalt:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}=\Omega(\beta^{-\frac{1}{4}}). \tag{1.4}$$

* Nach einem Vortrag, gehalten im Zahlentheoretischen Kolloquium der Bolyai János Mathematischen Gesellschaft zu Balatonvilágos (Ungarn) am 2. Juni 1962.

Es ist deshalb zweckmässig, auch unter der Annahme der Riemannschen Vermutung, die unteren Abschätzungen der Reihe von Ramanujan zu untersuchen.

Ich habe eine explizite numerische untere Abschätzung von (1.3) mit Turánschen Methoden schon früher gefunden (Siehe [6]). Ich versuche jetzt ein Resultat unter schwächeren Voraussetzungen zu bekommen.

Bevor wir zur Formulierung unseres Satzes kommen, stellen wir einige Tatsachen voran, die sich auf die Reihe (1.3) beziehen.

Bezeichnen wir kurz mit $S(\beta)$ die Reihe (1.3). Es ist leicht zu sehen daß $S(\beta)$ eine ganze Funktion darstellt. Wir haben nämlich (Vergl. [1], Seite 160) nach Potenzreihenentwicklung und nach Vertauschung der Summationen über n und k, was in diesem Fall zugelassen ist, (Siehe [8], Seite 30):

$$\begin{aligned}(1.5)\qquad S(\beta) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\beta^{2k}}{k!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n^{2k+1}} = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\beta^{2k}}{l!\,\zeta(2k+1)}.\end{aligned}$$

Der Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ist aber unendlich.

Bezeichnen wir weiter mit $\varphi(a,\beta)$ die durch $\sqrt{a}$ multiplizierte linke Seite von (1.1). Wegen (1.2) kann man $\varphi(a,\beta)$ als Funktion einer Veränderlichen, z. B. der Veränderlichen β betrachten, und dann konsequent $\varphi\left(\beta,\frac{\pi}{\beta}\right)$ schreiben.

Wegen (1.5) hat man offenbar

$$\begin{aligned}(1.6)\qquad \varphi\left(\beta,\frac{\pi}{\beta}\right) &= \sqrt{\pi}\,S\left(\frac{\pi}{\beta}\right)-\beta S(\beta)\\ &= \sqrt{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\pi^{2k}}{k!\,\zeta(2k+1)}\cdot\frac{1}{\beta^{2k}}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\zeta(2k+1)}\beta^{2k+1}.\end{aligned}$$

Wir haben also eine explizite Laurententwicklung von $\varphi\left(\beta,\frac{\pi}{\beta}\right)$ vor uns. Sei $\langle a,b\rangle$ ein beliebiges und geschlossenes Intervall, auf der positiven Achse.

Sei weiter

$$(1.7)\qquad K \overset{\text{Def}}{=\!=} \max_{\langle a,b\rangle}\left|\varphi\left(\beta,\frac{\pi}{\beta}\right)\right|.$$

Es ist wegen (1.6) klar, daß diese Konstante K von Null verschieden sein muß und daß mit einem β_0

$$(1.8)\qquad K = \left|\varphi\left(\beta_0,\frac{\pi}{\beta_0}\right)\right|,\qquad a\leqslant\beta_0\leqslant b,$$

gilt. Wir werden im Folgenden einfachheitshalber

$$(1.9)\qquad a=\sqrt{e},\qquad b=e$$

setzen.

Nach diesen Bemerkungen können wir zur Formulierung unseres Satzes übergehen.

Satz. *Wenn alle Nulstellen der Riemannschen ζ-Funktion einfach sind und auf der Gerade $\sigma=\frac{1}{2}$ liegen, dann gilt für*

$$(1.10)\qquad T>\max\left(c_1,\ \exp\exp(1/K)\right),$$

die Abschätzung:

$$(1.11)\qquad \max_{T^{1-o(1)}\leqslant\beta\leqslant T}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}\right| > T^{-\frac{1}{2}-o(1)}$$

c_1 — *bezeichnet eine explizit angebbare numerische Konstante, K bedeutet die positive Konstante aus* (1.7)–(1.9).

Es wäre wünschenswert, in Bezug auf den numerischen Charakter des Satzes, eine untere Schranke für K explizite auszurechnen.

Beim Beweis des Satzes (1.10)–(1.11) benutze ich eine von Knapowski stammende Modifikation ([2], Lemma 1) des gut bekannten Satzes von P. Turán ([9], Satz X). Dieser Satz lautet:

Sei $m\geqslant 0$ ganz und $z_1, z_2, \ldots, z_N$ komplexe Zahlen für die

$$(1.12)\qquad 1=|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant\ldots\geqslant|z_h|\geqslant\ldots\geqslant|z_{h_1}|\geqslant\ldots\geqslant|z_N|,$$

$$(1.13)\qquad |z_h|>2\frac{N}{N+m},\qquad |z_{h_1}|<|z_h|-\frac{N}{m+N}.$$

Dann existiert ein ganzes k, mit

$$(1.14)\qquad m\leqslant k\leqslant m+N,$$

so daß

$$(1.15)\qquad \frac{|b_1z_1^k+b_2z_2^k+\ldots+b_Nz_N^k|}{\left(\frac{1}{2}|z_h|\right)^k}\geqslant\min_{h\leqslant j<h_1}|b_1+b_2+\ldots+b_j|\left(\frac{1}{24e}\cdot\frac{N}{2N+m}\right)^N.$$

2. Bevor wir zum Beweis von (1.10)–(1.11) kommen, stellen wir einige Sätze über $\Gamma(s)$ und $\zeta(s)$ zusammen, welche im Folgenden gebraucht werden.

Es gibt eine numerische Konstante $c_2\geqslant 2$, so daß in jedem Intervall $(\lambda,\lambda+1)$ ein solches $t=t(\lambda)$ existiert für das

$$(2.1)\qquad |\zeta(\sigma+it)|>t^{-c_2+1},\qquad -1\leqslant\sigma\leqslant 2$$

([7], Seite 185, Satz 9.7).

Es gilt für die Eulersche Γ-Funktion:

$$\Gamma(\sigma+it) = \frac{k\Gamma(1+\sigma)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}}\sqrt{\frac{2\pi t}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}} \tag{2.2}$$

und $1 \leqslant k \leqslant \sqrt{1+t^2}$, $0<\sigma<1$ ([5], Seite 25).

Bezeichnen wir mit $N(\tau)$ *die Anzahl der Nullstellen von* $\zeta(s)$ *im* $0<\sigma<1$, $0<t\leqslant\tau$, $\tau\geqslant 2$, *dann gilt offenbar*

$$N(\tau+1)-N(\tau) < c_3\log\tau\,. \tag{2.3}$$

Es gilt die folgende Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-*Funktion*

$$\Gamma(s)\zeta(2s) = \pi^{-\frac{1}{2}+2s}\Gamma(\tfrac{1}{2}-s)\zeta(1-2s)\,. \tag{2.4}$$

Aus der Riemannschen Vermutung folgt:

Bei festem η, *auf* $0<\eta<2$, *für* $t\geqslant 11$ *gilt*

$$\frac{1}{|\zeta(\frac{1}{2}+\eta+it)|} \leqslant t^{c_4/(\eta\log^{\eta/3}t)} \tag{2.5}$$

([4], Seite 164).

3. Sei $T\geqslant 10^3$. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\varepsilon_1 = (\log\log T)^{-1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{(\log\log\log T)^2}{\log\log T}, \tag{3.1}$$

$$\omega = 2\log T, \tag{3.2}$$

$$\omega_0 = 20\log T\log\log\log T(\log\log T)^{-1}. \tag{3.3}$$

Für die ganze Zahl k setzen wir voraus, daß sie die folgende Ungleichung erfüllt:

$$(1-\varepsilon_1)\frac{\log T}{\log\log T} \leqslant k \leqslant \frac{\log T}{\log\log T}. \tag{3.4}$$

Es bezeichne weiter

$$l = \frac{\log T}{\log\log T}. \tag{3.5}$$

Zerteilen wir ω folgendermassen

$$\omega = Bk + c_0 \tag{3.6}$$

und für die Konstante c_0 setzen wir jetzt nur voraus daß sie die Ungleichung

$$1 \leqslant c_0 \leqslant 2 \tag{3.7}$$

erfüllt.

Mit (3.2) hat man für B:

$$B = \frac{2\log T - c_0}{k}. \tag{3.8}$$

4. Der erste Teil des Beweises verfolgt fast analog zu [6], Seiten 411–414. Ich werde ihn deswegen nur sehr kurz skizzieren.

Wir nehmen so wie in der oben erwähnten Arbeit die Ausgangsformel

$$\beta S(\beta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\frac{1}{2}+\varepsilon_1)} \beta^{2s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}\,ds \tag{4.1}$$

in Betracht. Man leitet sie mit Hilfe der Cahen-Mellinschen Formel her. $S(\beta)$ bezeichnet wie oben die Reihe von Ramanujan.

Unter der Annahme der Riemannschen Vermutung kann man den Integrationsweg bis zu der Gerade $\sigma = \frac{1}{4}+\varepsilon_1$ verschieben.

Wir führen weiter eine neue Veränderliche ω_1 mit

$$\beta = e^{\omega_1/2}$$

ein. Durch k-fache Integration von (4.1), bekommen wir dann die Hilfsformel I_ω (Vergl. [6], Seite 422), für die einerseits

$$I_\omega \leqslant \frac{\omega_0^k}{k!}\max_{\omega-\omega_0\leqslant\omega_1\leqslant\omega}|e^{\omega_1/2}S(e^{\omega_1/2})| \tag{4.2}$$

und andererseits

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\frac{1}{4}+\varepsilon_1)}\frac{e^{\omega s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^k\zeta(2s)}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\omega_0^{k-j}}{(k-j)!}\int\limits_{(\frac{1}{4}+\varepsilon_1)}\frac{e^{(\omega-\omega_0)s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^j\zeta(2s)}\,ds \tag{4.3}$$

gilt. Durch Zerteilung des ersten Integral in drei Integrale und nach gleichzeitiger Abschätzung, bekommt man wegen (2.2), (2.5), (3.5)

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\frac{1}{4}+\varepsilon_1)}\frac{e^{\omega s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^k\zeta(2s)}\,ds = \int\limits_{\frac{1}{4}+\varepsilon_1-il}^{\frac{1}{4}+\varepsilon_1+il}(\ldots)\,ds + O\left(\frac{e^{\omega(\frac{1}{4}+\varepsilon_1)}}{l^k}\right). \tag{4.4}$$

Durch Anwendung des Residuensatzes und wegen (2.1), (2.2), (3.5) bekommt man weiter

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{4}+\varepsilon_1-il}^{\frac{1}{4}+\varepsilon_1+il}\frac{e^{\omega s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^k\zeta(2s)}\,ds \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{4}-\varepsilon_2-il}^{\frac{1}{4}-\varepsilon_2+il}(\ldots)\,ds + 2^{k-1}\sum_{|\Im\varrho|<l}\frac{e^{\frac{1}{2}\omega\varrho}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{s^k\zeta'(\varrho)} + O\left(\frac{e^{(\frac{1}{4}+\varepsilon_1)\omega}}{l^k}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Es ist aber wegen (2.2), (2.5), (3.5) für $T>c_5$

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{1}{4}-\varepsilon_2-il}^{\frac{1}{4}-\varepsilon_2+il}\frac{e^{\omega s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^k\zeta(2s)}\,ds\right| \leqslant c_6 e^{(\frac{1}{4}-\varepsilon_2)\omega+(\log\log T)^2(\log\log\log T)^2}. \tag{4.6}$$

Wir schätzen jetzt die übrigverbleibende Summe der Integrale in (4.3). Man bekommt einfach für $T > c_7$

$$(4.7)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\omega_0^{k-j}}{(k-j)!}\int\limits_{\frac14+\varepsilon_1}(\ldots)\,ds\right| \leqslant c_8 k\left(\frac{e\omega_0}{k}\right)^k e^{(\frac14+\varepsilon_1)(\omega-\omega_0)+(\log\log T)^2(\log\log\log T)^2}.$$

Dies gibt für $T > c_9$ zusammen mit (4.2)–(4.6) die Ungleichung

$$(4.8)\qquad \begin{aligned} &\frac{\omega_0^k}{k!}\max_{\omega-\omega_0\leqslant\omega_1\leqslant\omega}\left|e^{\omega_1/2}S(e^{\omega_1/2})\right| + \\ &\quad + c_8 k\left(\frac{\omega_0 e}{k}\right)^k e^{(\frac14+\varepsilon_1)(\omega-\omega_0)+(\log\log T)^2(\log\log\log T)^2} + \\ &\quad + c_{10}\frac{e^{\omega(\frac14+\varepsilon_1)}}{l^k} + c_6 e^{(\frac14-\varepsilon_2)\omega+(\log\log T)^2(\log\log\log T)^2} \\ &\quad \geqslant 2^{k-1}\left|\sum_{|\Im\varrho|<l}\frac{e^{\frac12\omega\varrho}\Gamma(\frac12-\frac12\varrho)}{\varrho^k\zeta'(\varrho)}\right| \stackrel{\text{Def}}{=\!=} 2^{k-1}L. \end{aligned}$$

5. Nun endlich können wir L mit der Methode von Turán von unten abschätzen.

Wegen (3.6) und (3.7) mit

$$(5.1)\qquad \beta_0 = e^{\frac12 c_0},\qquad \sqrt{e}\leqslant\beta_0\leqslant e$$

hat man

$$(5.2)\qquad L = \left|\sum_{|\Im\varrho|<l}\beta_0^\varrho\frac{\Gamma(\frac12-\frac12\varrho)}{\zeta'(\varrho)}\left(\frac{e^{\frac12 B\varrho}}{\varrho}\right)^k\right|.$$

Wir wählen jetzt ϱ_0 so, damit

$$(5.3)\qquad \left|\frac{e^{\frac12 B\varrho}}{\varrho}\right|,\qquad |\Im\varrho|<l$$

maximal war. Man hat weiter

$$(5.4)\qquad L = \left|\frac{e^{\frac12 B\varrho_0}}{\varrho_0}\right|^k\left|\sum_{|\Im\varrho|<l}\beta_0^\varrho\frac{\Gamma(\frac12-\frac12\varrho)}{\zeta'(\varrho)}\left(\frac{e^{\frac12 B(\varrho-\varrho_0)}}{\varrho/\varrho_0}\right)^k\right|.$$

Die Rolle der z_j aus dem Turánschen Satz spielen die Zahlen

$$\frac{e^{\frac12 B(\varrho-\varrho_0)}}{\varrho/\varrho_0},$$

der b_j die Zahlen

$$\beta_0^\varrho\frac{\Gamma(\frac12-\frac12\varrho)}{\zeta'(\varrho)}.$$

Das N kann wegen (2.3), (3.5) mit

$$(5.5)\qquad N = \frac{\log T}{(\log\log T)^3}$$

definiert sein.

Wir führen jetzt eine neue Größe $\chi = \chi(T)$ ein, welche die Ungleichung

$$(5.6)\qquad \chi_1(T) \stackrel{\text{Def}}{=\!=} (\log\log T)^\eta < \chi(T) < (\log\log T)^\eta + 1 = \chi_1(T)+1$$

erfüllen soll. Wir setzen hier

$$\eta = \frac{1}{2c_2+3},$$

c_2 ist die numerische Konstante aus (2.1).

Bezeichnen wir weiter mit z_h dasjenige

$$z_j = e^{\frac12 B(\varrho-\varrho_0)}\frac{\varrho_0}{\varrho}$$

das bei $|\Im\varrho| < \chi(T)$ in der Folge (1.12) den größten Index h hat, also

$$(5.8)\qquad z_h = e^{\frac12 B(\varrho_h-\varrho_0)}\frac{\varrho_0}{\varrho_h}.$$

Es bezeichne weiter z_{h_1} ein beliebiges

$$z_j = e^{\frac12 B(\varrho-\varrho_0)}\frac{\varrho_0}{\varrho}$$

mit

$$(5.9)\qquad |\Im\varrho| > \chi(T)$$

also

$$(5.10)\qquad z_{h_1} = e^{\frac12 B(\varrho_{h_1}-\varrho_0)}\frac{\varrho_0}{\varrho_{h_1}}.$$

Wir werden jetzt zeigen, daß bei dieser Wahl von z_h, z_{h_1} die Voraussetzungen des Turánschen Satzes erfüllt sind.

Sei

$$(5.11)\qquad \varrho_h = \tfrac12 + i\gamma_h,\qquad \varrho_{h_1} = \tfrac12 + i\gamma_{h_1}.$$

Wir zeigen erst, daß

$$(5.12)\qquad |\gamma_{h_1}| - |\gamma_h| > \frac{1}{(\chi_1(T))^{2c_2}}.$$

Wir brauchen nur den Fall

$$|\gamma_{h_1}| < 2\chi_1(T)$$

zu untersuchen, sonst wäre (5.12) bei $T > c_{11}$ offensichtlich trivial erfüllt.

Wegen (2.1) und der bekannten Abschätzung für $\zeta'(s)$ hat man

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\chi_1(T))^{c_2}} &< \frac{1}{(\chi(T))^{c_2-1}} < \left|\zeta\left(\tfrac12+i\chi(T)\right)\right| \\ &= \left|\int\limits_{\frac12+i\chi(T)}^{\frac12+i|\gamma_{h_1}|}\zeta'(s)\,ds\right| \leqslant \left(|\gamma_{h_1}|-\chi(T)\right)\max_{\chi(T)\leqslant t\leqslant|\gamma_{h_1}|}\left|\zeta'(\tfrac12+it)\right| \\ &\leqslant c_{12}|\gamma_{h_1}|\left(|\gamma_{h_1}|-\chi(T)\right) < \left(|\gamma_{h_1}|-|\gamma_h|\right)\left(\chi_1(T)\right)^{c_2}. \end{aligned}$$

Es gilt also (5.12).

Wir werden jetzt zeigen, daß die Bedingungen (1.8) erfüllt sind.

N war schon mit (5.5) definiert. Wir wählen jetzt m in Übereinstimmung mit (3.4), also

$$m = (1-\varepsilon_1)\frac{\log T}{\log\log T}, \qquad \varepsilon_1 = (\log\log T)^{-1}. \tag{5.13}$$

Man hat aber wegen der Annahme der Riemannschen Vermutung

$$|z_h| - |z_{h_1}| = \left|e^{\frac{1}{2}B(\varrho_h-\varrho_0)}\frac{\varrho_0}{\varrho_h}\right| - \left|e^{\frac{1}{2}B(\varrho_{h_1}-\varrho_0)}\frac{\varrho_0}{\varrho_1}\right|$$
$$= |\varrho_0|\left(\frac{1}{|\varrho_h|} - \frac{1}{|\varrho_{h_1}|}\right) = |\varrho_0|\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma_h^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma_{h_1}^2}}\right).$$

Falls $|\gamma_{h_1}| > 2\chi_1(T)$ ist, hat man

$$\geqslant |\varrho_0|\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma_h^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+4\chi_1^2(T)}}\right) \geqslant |\varrho_0|\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+(\chi_1+1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+4\chi_1^2}}\right)$$
$$\geqslant |\varrho_0|\left(\frac{1}{\chi_1+2} - \frac{1}{2\chi_1}\right) \geqslant \sqrt{\tfrac{1}{4}+(14{,}13)^2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\chi_1} \geqslant \frac{1}{\chi_1}$$

falls $|\gamma_{h_1}| \leqslant 2\chi_1(T)$ ist, hat man

$$|z_h| - |z_{h_1}| = |\varrho_0|\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma_h^2}} - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma_{h_1}^2}}\right) = |\varrho_0|\,\frac{\dfrac{1}{(\frac{1}{4}+\gamma_h^2)} - \dfrac{1}{(\frac{1}{4}+\gamma_{h_1}^2)}}{\dfrac{1}{(\frac{1}{4}+\gamma_h^2)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{(\frac{1}{4}+\gamma_{h_1}^2)^{\frac{1}{2}}}}$$
$$\geqslant |\varrho_0|\,\frac{\gamma_{h_1}^2-\gamma_h^2}{(\frac{1}{4}+\gamma_h^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}+\gamma_{h_1}^2)+(\frac{1}{4}+\gamma_{h_1}^2)^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{4}+\gamma_h^2)}$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}|\varrho_0|\,\frac{\gamma_{h_1}^2-\gamma_h^2}{(\chi_1+2)^2(\frac{1}{4}+4\chi_1^2)} \geqslant \tfrac{1}{2}|\varrho_0|\,\frac{|\gamma_{h_1}|-|\gamma_h|}{(\chi_1+2)^2(\frac{1}{4}+4\chi_1^2)}\,\chi_1 \geqslant \frac{1}{\chi_1^{2c_2+3}}.$$

Wir haben damit bewiesen daß in beiden Fällen

$$|z_h| - |z_{h_1}| \geqslant \frac{1}{\chi_1^{2c_2+3}} \tag{5.14}$$

also wegen (5.6)

$$|z_h| - |z_{h_1}| \geqslant \frac{1}{\log\log T}, \qquad T > c_{13} \tag{5.15}$$

gilt.

Andererseits wegen (5.5) und (5.13), für $T > c_{14}$

$$\frac{N}{m+N} \leqslant \frac{\dfrac{\log T}{(\log\log T)^3}}{\left(1-\dfrac{1}{\log\log T}\right)\dfrac{\log T}{\log\log T}} \leqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\log\log T)^2}. \tag{5.16}$$

Damit ist durch Vergleich von (5.15) und (5.16) die zweite Bedingung aus (1.13) erfüllt.

Man hat aber nach (5.8), (5.6), für $T > c_{15}$

$$|z_h| = |\varrho_0|\frac{1}{|\varrho_h|} = |\varrho_0|\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}+\gamma_h^2}} \geqslant \frac{14}{\sqrt{\frac{1}{4}+\chi^2(T)}} \geqslant \frac{14}{\sqrt{\frac{1}{4}+(\chi_1(T)+1)^2}}$$
$$\geqslant \frac{1}{\chi_1(T)} = \frac{1}{(\log\log T)^{1/(2c_2+3)}} \geqslant \frac{1}{(\log\log T)^{1/7}}, \qquad (c_2 \geqslant 2),$$

und für $T > c_{16}$

$$\frac{2N}{m+N} \leqslant \frac{1}{(\log\log T)^2} \leqslant \frac{1}{(\log\log T)^{1/7}} \leqslant |z_h|.$$

Damit ist auch die erste Bedingung aus (1.13) für $T > c_{17}$ erfüllt.

6. Wir konnen also die durch Knapowski modifizierte Turánsche Abschätzung (1.10) anwenden. Man kann hier sogar $h_1 = h+1$ setzen. Wir bekommen einfach

$$L \geqslant \left|\frac{e^{\frac{1}{2}B\varrho_0}}{\varrho_0}\right|^k (\tfrac{1}{2}|z_h|)^k \left|\sum_{j=1}^{h} b_j\right| \left(\frac{1}{24e}\cdot\frac{N}{2N+m}\right)^N \tag{6.1}$$

und weiter für $T > c_{18}$ wegen (5.8), (5.5), (5.13) und der Definition von b_j

$$L \geqslant \left|\frac{e^{\frac{1}{2}B\varrho_0}}{\varrho_0}\right|^k \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{|\varrho_0|}{|\varrho_h|}\right)^k \left|\sum_{|\Im\varrho|<\chi(T)} \beta_0^{\varrho}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\zeta'(\varrho)}\right| \times \tag{6.2}$$
$$\times\left(\frac{1}{24e}\cdot\frac{\dfrac{\log T}{(\log\log T)^3}}{2\dfrac{\log T}{(\log\log T)^3}+\left(1-\dfrac{1}{\log\log T}\right)\dfrac{\log T}{\log\log T}}\right)^{\frac{\log T}{(\log\log T)^3}}.$$

Setzen wir jetzt voraus daß für $T > D$, wo D eine Konstante ist, die Ungleichung

$$\left|\sum_{|\Im\varrho|<\chi(T)} \beta_0^{\varrho}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\zeta'(\varrho)}\right| > e^{-\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}} \tag{6.3}$$

gilt. Die Konstante D wird im Folgenden explizite in Abhängigkeit von K aus (1.7) ausgerechnet. Dann hat man für $T > \max(c_{18}, D)$

$$L \geqslant \frac{1}{2^k}\cdot\frac{e^{\frac{1}{4}Bk}}{|\varrho_h|^k}e^{-2\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}} \tag{6.4}$$
$$\geqslant \frac{1}{2^k}\cdot\frac{e^{\frac{1}{4}(2\log T-c_0)}}{\left(\sqrt{\frac{1}{4}+(\chi_1+1)^2}\right)^k}e^{-2\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}} \geqslant \frac{1}{2^{k-1}}\sqrt{T}e^{-3\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}.$$

Aus (4.8) und (6.4) mit Berücksichtigung von $\beta = e^{\omega_1/2}$ und nach (3.1)–(3.4), hat man für $T > \max(c_{19}, D)$ die Abschätzung:

$$\tag{6.5} {\max_{T\exp\left(\frac{10\log T\log\log\log T}{\log\log T}\right)\leqslant\beta\leqslant T}}' |S(\beta)| \geqslant \sqrt{T} e^{-5\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}.$$

Damit ergibt sich die Behauptung aus (1.11), wenn nur (6.3) gilt. Also haben wir noch das Lemma (6.3) zu zeigen.

7. Um (6.3) zu beweisen, nehmen wir das folgende Hilfsintegral in Betracht

$$\tag{7.1} I_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{4}+\varepsilon_0)-i\chi(T)}^{(\frac{1}{4}+\varepsilon_0)+i\chi(T)} \beta_0^{2s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}\,ds,$$

β_0 ist die Große aus (1.8), (1.9), $\varepsilon_0 = \frac{1}{10}$, $\chi(T)$ ist durch (5.6) bestimmt.

Einfachheitshalber werden wir hier außer der Einfachheit der Nullstellen von $\zeta(s)$ auch die Riemannsche Vermutung voraussetzen, obwohl die zweite Voraussetzung beim Beweis unseres Lemmas nicht nötig ist.

Aus (7.1) hat man einerseits mit der Bezeichnung von (4.1)

$$\tag{7.2} I_0 = \beta_0 S(\beta_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{4}+\varepsilon_0+i\chi(T)}^{\frac{1}{4}+\varepsilon_0+i\infty} \beta_0^{2s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{4}+\varepsilon_0-i\infty}^{\frac{1}{4}+\varepsilon_0-i\chi(T)} \beta_0^{2s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}\,ds.$$

Andererseits durch Anwendung des Cauchyschen Satzes auf (7.1) und wegen (2.1), (2.2), (2.4) und (2.5) bekommen wir

$$\tag{7.3} I_0 = \sum_{|\Im\varrho|<\chi(T)} \beta_0^{\varrho}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\zeta'(\varrho)} + \frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{4}-\varepsilon_0)} \beta_0^{2s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}\,ds + O\left(\frac{1}{e^{\chi(T)}}\right).$$

Man kann aber zeigen (Siehe [1], Seite 157), daß

$$\tag{7.4} \frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{4}-\varepsilon_0)} \beta_0^{2s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}\,ds = \sqrt{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\pi/\beta_0 n)^2} = \sqrt{\pi}\,S\left(\frac{\pi}{\beta_0}\right)$$

ist.

Aus (7.2), (7.3), (7.4) und für $T > c_{20}$ gelangen wir zu der Abschätzung:

$$\tag{7.5} \left|\sum_{|\Im\varrho|<\chi(T)} \beta_0^{\varrho}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\zeta'(\varrho)}\right| \geqslant \left|\beta_0 S(\beta_0) - \sqrt{\pi}\,S\left(\frac{\pi}{\beta_0}\right)\right| - \frac{c_{21}}{e^{\chi(T)}}$$

$$= \left|\varphi\left(\beta_0, \frac{\pi}{\beta_0}\right)\right| - \frac{c_{21}}{e^{\chi(T)}}.$$

Hieraus wegen (1.7) und (1.8) folgt

$$\tag{7.6} \left|\sum_{|\Im\varrho|<\chi(T)} \beta_0^{\varrho}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\zeta'(\varrho)}\right| \geqslant K - \frac{c_{21}}{e^{\chi(T)}}$$

und nach (5.6)

$$\geqslant K - \frac{c_{21}}{e^{(\log\log T)^{1/(2c_2+3)}}}.$$

Es gilt also für $T > \max(c_{22}, \exp\exp(1/K)) \overset{\text{Def}}{=\!=} D$, die Abschätzung

$$\left|\sum_{|\Im\varrho|<\chi(T)} \beta_0^{\varrho}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\zeta'(\varrho)}\right| \geqslant \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\log\log T} > e^{-\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}.$$

Wir haben also (6.3) und damit unseren Satz (1.10), (1.11) vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918).

[2] S. Knapowski, *Contributions to the theory of the distribution of prime numbers in arithmetical progressions I*, Acta Arithm. 6 (1961), S. 415-434.

[3] — *Mean-value estimations for the Möbius function II*, Acta Arithm. 7 (1962), S. 337-343.

[4] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. II, Leipzig 1927.

[5] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gamma-funktion*, Leipzig 1906.

[6] W. Staś, *Zur Theorie der Möbiusschen μ-Funktion*, Acta Arithm. 7 (1962), S. 409-416.

[7] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.

[8] — *The theory of functions*, Oxford 1932.

[9] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
ADAM MICKIEWICZ UNIWERSITÄT IN POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 6. 8. 1962