ACTA ARITHMETICA
VIII (1963)

Über die metrische Theorie der diophantischen Approximation II

von

P. Szüsz (Budapest)

In der vorliegenden Arbeit wird im Gegensatz zu meiner in den Acta Math. Acad. Sci. Hung. in 1958 erschienenen Arbeit [10] die metrische Theorie der homogenen diophantischen Approximation behandelt.

Es sei $f(k)$ eine für positive k definierte, mit wachsenden k monoton abnehmende Funktion. Dann besitzt nach einem bekannten Satz von Khintchine [3] die Ungleichung [1]

$$\|k\alpha\| \leqslant \frac{f(k)}{k} \tag{1}$$

für fast alle α höchstens endlich viele oder unendlich viele Lösungen mit natürlichen k, je nach dem die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{f(k)}{k} \tag{2}$$

konvergiert oder divergiert.

Falls (2) divergiert, so erhebt sich naturgemäß die Frage, die Anzahl der Lösungen von (1) unterhalb einer Grenze n für fast alle α asymptotisch abzuschätzen. In dieser Richtung haben voneinander unabhängig W. J. Le Veque [5], [6], P. Erdös [1], und W. Schmidt [9] bewiesen, daß falls die Reihe (2) divergiert und $f(k)$ noch gewissen weiteren Voraussetzungen genügt [2], so gilt für fast alle α

$$N_{\alpha,f}(n) \sim 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k}, \tag{3}$$

wobei

$$N_{\alpha,f}(n) = \sum_{\substack{k\leqslant n \\ \|k\alpha\| \leqslant \frac{f(k)}{k}}} 1 \tag{4}$$

[1] $\|z\|$ bedeutet den Abstand von z von der nächstbenachbarten ganzen Zahl.

[2] Die Voraussetzungen von Erdös, Le Veque und Schmidt stimmen miteinander nicht überein.

gesetzt wurde. Bezeichnet ferner

(5) $$N^*_{a,f}(n) = \sum_{\substack{k\leqslant n\\ |ak-l|\leqslant \frac{f(k)}{k}\\ (k,l)=1}} 1\,,$$

so gilt für fast alle a

(6) $$N^*_{a,f}(n) \sim \frac{12}{\pi^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k}\,.$$

In einer gemeinsamen Note mit S. Hartman [2] haben wir gezeigt, daß falls $f(k)$ monoton abnimmt und (2) divergiert, so sind für fast alle a statt (1) schärfer die Relationen

(7) $$|ak-l| \leqslant \frac{f(k)}{k}\,, \quad (k,l)=1\,, \quad k\equiv k' \pmod r$$

unendlich oft erfüllt, wobei r eine beliebig gegebene natürliche Zahl und k' eine beliebig gegebene ganze Zahl mit $0\leqslant k' < r$ ist.

Nun liegt wieder nahe die Frage, für fast alle a die Anzahl der Lösungen von (7), bzw. von

(8) $$\|ka\| \leqslant \frac{f(k)}{k}\,, \quad k\equiv k' \pmod r$$

abzuschätzen. Es bezeichne $N^*_{a,f,k'}(n)$ bzw. $N_{a,f,k'}(n)$ die Anzahl der Lösungen von (7), bzw. (8) ([3]) unterhalb n. In der vorliegenden Arbeit wird die zu (3), bzw. (6) analoge asymptotische Abschätzung von $N^*_{a,f,k'}(n)$, bzw. $N_{a,f,k'}(n)$ behandelt.

Es werden die folgenden beiden Sätze bewiesen:

Satz 1. *Es sei $f(k)$ eine monoton abnehmende Funktion, für die die Reihe* (2) *divergiert; ferner sei vorausgesetzt, daß*

(9) $$f(k) \leqslant \tfrac{1}{2}$$

gilt und daß es zu jedem positiven ε eine nur von ε abhängige Zahl $\delta_0=\delta_0(\varepsilon)$ gibt derart, daß für $\delta\leqslant\delta_0$

(10) $$\frac{f\big((\gamma-\delta)^\nu\big)}{f\big((\gamma+\delta)^\nu\big)} < 1+\varepsilon \quad (\nu=1,2,\ldots)\ (*)$$

gilt, wobei

(11) $$\gamma = e^{\pi^2/12\log 2}$$

gesetzt wurde.

([3]) Da r in dieser Arbeit ein für alle Mal festgesetzt wird, lasse ich r in der Bezeichnung $N^*_{a,f,k'}(n)$ bzw. $N_{a,f,k'}(n)$ weg. Kongruenzen beziehen sich, falls der Modul nicht angegeben ist, immer auf den Modul r.

(*) Zusatz bei der Korrektur. Später habe ich gemerkt, daß diese Voraussetzung entbehrlich ist.

Dann gilt für fast alle a

(12) $$N^*_{a,f,k'}(n) \sim \frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{r\varphi\big((r,k')\big)}{C(r)(r,k')}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k} \quad (n\to\infty)\,,$$

wobei $C(r)$ die Zahl

(13) $$C(r) = r^2\prod_{p|r}(1-p^{-2})$$

bezeichnet.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen des Satzes* 1. *gilt für fast alle a*

(14) $$N_{a,f,k'}(n) \sim \frac{12}{\pi^2}\cdot\frac{r}{C(r)}\sum_{\substack{0\leqslant d<r\\ (d,r)|k'}}\frac{\varphi\big((d,r)\big)}{(d,r)}\sum_{\substack{m\geqslant 1\\ md\equiv k'}} m^{-2}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(k)}{k}\,.$$

Die folgenden Paragraphen enthalten den Beweis dieser beiden Sätze.

§ 1. Hilfssätze aus der Kettenbruchlehre. Es bezeichnen $a_1, a_2, \ldots$ die Teilnenner der Kettenbruchentwicklung von a, d.h.

(1.1) $$a = [0; a_1, \ldots]\,.$$

Ferner sei gesetzt

(1.2) $$\frac{A_n}{B_n} = [0; a_1, \ldots, a_n]\,, \quad (A_n, B_n) = 1\,,$$

(1.3) $$\zeta_n = [a_n; a_{n+1}, \ldots]\,,$$

(1.4) $$z_n = [0; a_n, a_{n+1}, \ldots, a_1]\,,$$

(1.5) $$\varphi_n = \zeta_{n+1} + z_n\,.$$

Bekanntlich gilt für $n\geqslant 1$

(1.6) $$|B_n a - A_n| = \|B_n a\| = \frac{1}{B_n\varphi_n}\,;$$

ferner kann

(1.7) $$|ka-l| \leqslant \frac{1}{2k}\,, \quad (k,l)=1$$

nur dann stattfinden, wenn

(1.8) $$k = B_\nu\,, \quad l = A_\nu$$

mit igrendeinem ν ist.

Wegen (9), (1.6) und (1.8) ist $|ka-l|\leqslant f(k)/k$, $(k,l)=1$ äquivalent mit

(1.9) $$\frac{1}{\varphi_\nu} \leqslant f(B_\nu)$$

mit irgendeinem ν. Daher gilt der folgende

HILFSSATZ 1.1. *Es gilt*

$$N^*_{a,f,k'}(n) = \sum_{\substack{B_\nu \leqslant n \\ B_\nu \equiv k' \\ 1 \leqslant \varphi_\nu f(B_\nu)}} 1 \,. \tag{1.10}$$

Nun stelle ich für $N_{a,f,k'}(n)$ eine zu (1.10) analoge Formel dar.

HILFSSATZ 1.2. *Es sei k eine natürliche Zahl, für die*

$$\|k\alpha\| \leqslant \frac{1}{2k} \tag{1.11}$$

gilt. Dann existiert ein ν mit

$$k = c_{\nu+1} B_\nu \tag{1.12}$$

wobei $c_{\nu+1}$ eine natürliche Zahl mit

$$c_{\nu+1} \leqslant a_{\nu+1} \tag{1.13}$$

ist.

Beweis. Bekanntlich läßt sich jede natürliche Zahl darstellen, als

$$k = \sum_{l=0}^{\nu} c_{l+1} B_l \,, \tag{1.14}$$

wobei die „Koeffizienten" $c_1, \ldots, c_{\nu+1}$ folgendes erfüllen:

Es ist stets

$$0 \leqslant c_{l+1} \leqslant a_{l+1}; \tag{1.15}$$

es ist

$$0 \leqslant c_1 < a_1; \tag{1.16}$$

aus

$$c_{l+1} = a_{l+1} \tag{1.17}$$

folgt

$$c_l = 0 \,. \tag{1.18}$$

Man setze

$$B_l \alpha - A_l = \frac{(-1)^l}{B_l \varphi_l} = D_l \,. \tag{1.19}$$

Aus der bekannten Rekursionsformel für A_l bzw. B_l folgt

$$D_{l+1} = a_{l+1} D_l + D_{l-1} \,, \tag{1.20}$$

ferner gilt

$$D_l = -\frac{1}{\zeta_{l+1}} D_{l-1} \,. \tag{1.21}$$

Nun behaupte ich, daß falls k eine Zahl mit (1.11) ist, so gibt es in der Darstellung (1.14) von k nur ein l mit $c_{l+1} \neq 0$.

Es sei ν die größte Zahl in der Darstellung (1.14) einer Zahl k mit (1.11), für die $c_{\nu+1} \neq 0$ ist. Nehmen wir an, es gäbe außer ν noch ein l $(l < \nu)$ mit $c_{l+1} \neq 0$.

Es gilt für gerades l [4]

$$\big((c_{l+1} B_l + \ldots + c_{\nu+1} B_\nu)\, \alpha\big) = c_{l+1} D_l + \ldots + c_{\nu+1} D_\nu \,. \tag{1.22}$$

Hieraus folgt wegen (1.20) und (1.21)

$$(c_{l+1} - 1) D_l - D_{l+1} < (k\alpha) < -D_{l-1} \tag{1.23}$$

für ungerades l erhält man auf analoge Weise

$$-(c_{l+1} - 1) D_l + D_{l+1} < 1 - (k\alpha) < D_{l-1} \,. \tag{1.24}$$

Aus (1.22), bzw. (1.23) folgt, daß die k, die (1.11) leisten, außer

$$k = c_{\nu+1} B_\nu \tag{1.25}$$

nur die Gestalt

$$k = B_{\nu-1} + c_{\nu+1} B_\nu \tag{1.26}$$

haben können. Nun zeige ich, daß für die k mit (1.26), (1.11) nicht stattfindet.

Für die Zahlen (1.26) gilt für ungerades ν

$$(k\alpha) = D_{\nu-1} + c_{\nu+1} D_\nu = D_{\nu-1}\left(1 - \frac{c_{\nu+1}}{\zeta_{\nu+1}}\right); \tag{1.27}$$

dann gilt für

$$c_{\nu+1} \leqslant \frac{\zeta_{\nu+1}}{2} \,,$$

$$(k\alpha) > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{B_{\nu-1}\zeta_\nu + B_{\nu-2}} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{B_\nu + B_{\nu-1}}; \tag{1.28}$$

andererseits gilt offenbar $k \geqslant B_{\nu-1} + B_\nu$. Da aus (1.27) die Relation

$$(k\alpha) < |D_{\nu-1}| \tag{1.29}$$

folgt, folgt hieraus für $c_{\nu+1} \leqslant \zeta_{\nu+1}/2$

$$\|k\alpha\| > \frac{1}{2k} \,.$$

Nun sei $c_{\nu+1} > \zeta_{\nu+1}/2$. Dann folgt aus (1.27)

$$(k\alpha) > -D_\nu = \frac{1}{B_\nu \zeta_{\nu+1} + B_{\nu+1}} \,. \tag{1.30}$$

Nun gilt

$$k = B_{\nu-1} + c_{\nu+1} B_\nu \geqslant B_{\nu-1} + \frac{\zeta_{\nu+1}}{2} B_\nu > \frac{B_{\nu-1} + \zeta_{\nu+1} B_\nu}{2} \,.$$

[4] (z) bedeutet den Bruchteil von z.

Hieraus und aus (1.30) folgt der Hilfssatz 1.2 im Falle, wenn ν ungerade ist. Der Fall eines geraden ν läßt sich völlig analog erledigen. Damit ist der Hilfssatz 1.2 bewiesen.

HILFSSATZ 1.3. *Es gilt*

$$N_{\alpha,f,k'}(n)=\sum_{B_\nu\leqslant n}\ \sum_{\substack{c_{\nu+1}B_\nu\leqslant n\\ c_{\nu+1}B_\nu\equiv k'\\ c_{\nu+1}^2\leqslant\varphi_\nu f(c_{\nu+1}B_\nu)}}1\,. \tag{1.31}$$

Beweis. Wegen (9) und Hilfssatz 1.2 lassen sich die Zahlen k, für die $\|k\alpha\|\leqslant f(k)/k$ gilt, in der Gestalt (1.25) schreiben. Nun bestimme ich diejenigen $c_{\nu+1}$, für die $\|k\alpha\|\leqslant f(k)/k$, d.h.

$$\|c_{\nu+1}B_\nu\alpha\|\leqslant\frac{f(c_{\nu+1}B_\nu)}{c_{\nu+1}B_\nu} \tag{1.32}$$

tatsächlich stattfindet. Aus (1.19) folgt

$$\|c_{\nu+1}B_\nu\alpha\|=\frac{c_{\nu+1}}{B_\nu\varphi_\nu}\,.$$

Setzt man dies in (1.32) ein, so sieht man, daß (1.32) dann und nur dann stattfindet, wenn

$$c_{\nu+1}^2\leqslant\varphi_\nu f(c_{\nu+1}B_\nu)$$

gilt. Hieraus folgt schon (1.31).

§ 2. Hilfssätze aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die zwischen Null und Eins gelegene reelle Zahl α sei als eine in $(0,1)$ gleichmäßig verteilte Zufallsgröße betrachtet. Die von α abhängigen Zufallsgrößen $\xi_1',\xi_2',\ldots$ bzw. $\eta_1',\eta_2',\ldots$ seien definiert durch

$$\xi_\nu'=\begin{cases}1 & \text{falls}\quad B_\nu\equiv k',\ 1\leqslant\varphi_\nu(f(B_\nu)\,,\\ 0 & \text{sonst}\,,\end{cases} \tag{2.1}$$

bzw.

$$\eta_\nu'=\sum_{\substack{c_{\nu+1}\\ c_{\nu+1}B_\nu\equiv k'\\ c_{\nu+1}^2\leqslant\varphi_\nu f(c_{\nu+1}B_\nu)}}1\,. \tag{2.2}$$

(Die Zahl k' ist vorläufig auch festgelegt; daher lasse ich k' in den Bezeichnungen ξ_ν' und η_ν' weg).

Hilfssatz 1.1 läßt sich folgendermassen formulieren:

Es gilt

$$N^*_{\alpha,f,k'}(n)=\sum_{B_\nu\leqslant n}\xi_\nu'\,. \tag{2.3}$$

Für $N_{\alpha,f,k'}(n)$ läßt sich wegen der ersten Summationsbedingung der inneren Summe auf der rechten Seite von (1.31) keine derart einfache Formel angeben; es gilt aber jedenfalls

$$\sum_{B_{\nu+1}\leqslant n}\eta_\nu'\leqslant N_{\alpha,f,k'}(n)=\sum_{B_\nu\leqslant n}\eta_\nu'\,. \tag{2.4}$$

Die ξ_ν' und η_ν' ersetze ich durch ξ_ν und η_ν, die folgendermassen definiert werden:

$$\xi_\nu=\begin{cases}1 & \text{falls}\quad B_\nu\equiv k',\ 1\leqslant\varphi_\nu f(\gamma^\nu)\,,\\ 0 & \text{sonst}\,,\end{cases} \tag{2.5}$$

$$\eta_\nu=\sum_{\substack{c_{\nu+1}\\ c_{\nu+1}B_1\equiv k'\\ c_{\nu+1}^2\leqslant\varphi_\nu f(\gamma^\nu)}}1\,, \tag{2.6}$$

wobei γ die Bedeutung (11) hat.

Es gilt nach einem bekannten Satz von A. Khintchine [4] für fast alle α

$$\lim_{\nu\to\infty}\sqrt[\nu]{B_\nu}=\gamma\,. \tag{2.7}$$

Daher gilt wegen (10) für fast alle α bei beliebig kleinem positiven ε

$$(1-\varepsilon)\xi_\nu<\xi_\nu'<(1+\varepsilon)\xi_\nu\,, \tag{2.8}$$

$$(1-\varepsilon)\eta_\nu<\eta_\nu'<(1+\varepsilon)\eta_\nu\,, \tag{2.9}$$

falls nur ν genügend groß ist.

Offenbar genügt es, das starke Gesetz der großen Zahlen für die ξ_ν, bzw. η_ν zu zeigen.

Zunächst bestimme ich für $\nu\to\infty$ asymptotisch die Erwartungswerte $M(\xi_\nu)$ und $M(\eta_\nu)$. Hier und im folgenden bezeichnet $M(\zeta)$, bzw. $D(\zeta)$ den Erwartungswert, bzw. Streung der Zufallsgrößen ζ.

HILFSSATZ 2.1. *Es bezeichne*

$$\mu_n(k_1,k_2,t)\qquad (k_1,k_2=0,1,\ldots,r-1\,,\ (k_1,k_2,r)=1\,,\ t\geqslant 1)$$

das Maß der Menge derjenigen α, für die

$$B_{n-1}\equiv k_1\,,\qquad B_n\equiv k_2\,, \tag{2.10}$$

und

$$\varphi_\nu\geqslant t \tag{2.11}$$

gilt.

Dann gilt für $t\geqslant 2$

$$\mu_n(k_1,k_2,t)=\frac{1}{c(r)\log 2}\cdot\frac{1}{t}(1+\varrho_n)\,, \tag{2.12}$$

wobei ϱ_n *eine auch von* t *unabhängige Konstante ist, für die*

$$\varrho_n = O(q^n) \tag{2.13}$$

gilt; hier ist q *eine nur von* r *abhängige Zahl, die immer kleiner ist, als* 1.

Bemerkung. Eine zu (2.12) analoge Formel läßt sich auch für $t < 2$ herleiten; im folgenden wird aber nur der Fall $t \geqslant 2$ gebraucht.

Beweis. Es sei y reell, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Es bezeichne $m_n^*(k_1, k_2, y)$ das Maß derjenigen α, für die (2.10) besteht und

$$z_n = B_{n-1}/B_n \leqslant y \tag{2.14}$$

gilt.

Dann beweise ich zunächst

$$m_n^*(k_1, k_2, y) = \frac{1}{c(r)\log 2}\log(1+y) + O(q^n), \tag{2.15}$$

falls $(k_1, k_2, r) = 1$.

Beweis von (2.15). Es bezeichne $m_n(k_1, k_2, x)$ das Maß derjenigen α, für die (2.10) und

$$\zeta_{n+1}^{-1} \leqslant x \tag{2.16}$$

gilt. Dann besteht zwischen $m_n(k_1, k_2, x)$ und $m_n^*(k_1, k_2, y)$ der folgende Zusammenhang: Für jede natürliche Zahl b ist

$$m_n^*(k_1, k_2, b^{-1}) = \sum_{l=b}^{\infty}\left\{m_n\left(S(l), k_1, \frac{1}{l}\right) - m_{n-1}\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+1}\right)\right\} \tag{2.17}$$

wobei $S(l)$ durch

$$0 \leqslant S(l) < r, \quad k_2 - lk_1 \equiv S(l) \tag{2.18}$$

definiert ist. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} m_n^*(k_1, k_2, b^{-1}) &= P(B_{n-1} \equiv k_1, B_n \equiv k_2, a_n \geqslant b) \\ &= \sum_{l=b}^{\infty} P(B_{n-1} \equiv k_1, B_n \equiv k_2, a_n = l) \\ &= \sum_{l=b}^{\infty} P\big(B_{n-2} \equiv S(l), B_{n-1} \equiv k_1, a_n = l\big), \end{aligned}$$

woraus (2.17) folgt.

Es gilt

$$m_{n-1}\left(S(l), k_1, \frac{1}{l}\right) - m_{n-1}\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+1}\right) = \int_{(l+1)^{-1}}^{l^{-1}} m'_{n-1}\big(S(l), k_1, t\big)\,dt;$$

da nach der Formel (1.10) meiner Arbeit [11]

$$m'_{n-1}\big(S(l), k_1, t\big) = \frac{1}{C(r)\log 2}\cdot\frac{1}{1+t} + O(q^{n-1})$$

gilt, folgt hieraus

$$m_n^*(k_1, k_2, b^{-1}) = \frac{1}{C(r)\log 2}\log(1+b^{-1}) + O(q^n). \tag{2.19}$$

Nun sei

$$y = \frac{1}{b+t} \quad (0 < t < 1). \tag{2.20}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} &m_n^*(k_1, k_2, b^{-1}) - m_n^*(k_1, k_2, y) \\ &= \int_y^{b^{-1}} dm_n^*(k_1, k_2, \eta) = \int_0^t P(a_n = b \mid z_{n-1} = \tau)\, dm_{n-1}^*\big(S(b), k_1, \tau\big) \\ &= \int_0^t \frac{1+\tau}{(b+\tau)(b+1+\tau)}\, dm_{n-1}^*\big(S(b), k_1, \tau\big). \end{aligned} \tag{2.21}$$

Man setze

$$h_n(k_1, k_2, y) = m_n^*(k_1, k_2, y) - \frac{1}{C(r)\log 2}\log(1+y). \tag{2.22}$$

Dann ergibt sich aus (2.19)

$$h_n(k_1, k_2, b^{-1}) = O(q^n) \tag{2.23}$$

andererseits folgt aus (2.21) durch partielle Integration

$$|h_n(k_1, k_2, b^{-1}) - h_n(k_1, k_2, y)| \leqslant 0{,}75 \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} h_{n-1}\big(S(b), k_1, t\big). \tag{2.24}$$

Man setze

$$M_n = \max_{\substack{k_1, k_2, t \\ (k_1, k_2, r) = 1}} h_n(k_1, k_2, t).$$

Dann ergibt sich aus (2.24) und (2.23)

$$M_n \leqslant 0{,}75 M_{n-1} + O(q^n). \tag{2.25}$$

Aus (2.25) ergibt sich durch vollständige Induktion bezüglich n

$$M_n = O\big(n(\max(0{,}75, q))^n\big),$$

also

$$M_n = O(q'^n), \tag{2.26}$$

wobei q' eine beliebige reelle Zahl mit $q' > q$ ist. Damit ist (2.15) bewiesen (5).

(5) Der Grundgedanke des Beweises von (2.15) rührt von P. Lévy [7], her. Vgl. auch sein Buch [8]; wegen des Auftretens der Parameter k_1 und k_2 kann jedoch sein Beweis nicht wörtlich übernommen werden.

Nun sei v eine reelle Zahl mit $v \geqslant 1$. Dann gilt nach einer bekannten Formel der Kettenbruchlehre

$$P\left(\zeta_{n+1} > v \,\middle|\, \frac{B_{n-1}}{B_n} = y\right) = \frac{1+y}{v+y}. \tag{2.27}$$

Nun ist

$$\varphi_n \geqslant t$$

äquivalent mit

$$\zeta_{n+1} \geqslant t - z_n .$$

Setzt man dies in (2.27), so erhält man für $t-y \geqslant 1$

$$P(\zeta_{n+1} > t-y | z_n = y) = \frac{1+y}{t}; \tag{2.28}$$

für $t-y \leqslant 1$ ist die obige Wahrscheinlichkeit gleich 1. Aus (2.28) erhält man für $t \geqslant 2$

$$\mu_n(k_1, k_2, t) = \frac{1}{t}\int_0^t (1+y)\, dm_n^*(k_1, k_2, y)$$

woraus mit Rücksicht auf (2.15) die Relation (2.12) schon folgt.

HILFSSATZ 2.2. *ξ_ν bzw. η_ν habe die Bedeutung* (2.5) *bzw.* (2.6). *Dann gilt*

$$M(\xi_\nu) = \frac{r\varphi((r, k'))}{C(r)(r, k')\log 2} f(\gamma^\nu)\big(1+O(q^\nu)\big), \tag{2.29}$$

$$M(\eta_\nu) = \frac{r}{C(r)\log 2} \sum_{\substack{0 \leqslant d < r \\ (d,r)|k'}} \frac{\varphi((r, d))}{(r, d)} \sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ md = k'}} m^{-2} f(\gamma^\nu)\big(1+O(q^\nu)\big). \tag{2.30}$$

Beweis. Folgt aus (2.12).

HILFSSATZ 2.3. *Es seien $\xi_1'', \xi_2'', \ldots$ Zufallsgrößen, die den folgenden Bedingungen genügen: Es gilt für zwei beliebige Borel-messbare Mengen E_1 und E_2*

$$P(\xi_k'' \in E_1, \xi_l'' \in E_2) = P(\xi_k'' \in E_1) P(\xi_l'' \in E_2)\big(1+O(q^{|k-l|})\big) \tag{2.31}$$

wobei q eine Konstante ist, die kleiner ist als 1; die im O-Zeichen enthaltene Konstante soll dabei von E_1 und E_2 unabhängig sein. Ferner sei

$$D(\xi_k'') = O(k^{1/4}) \tag{2.32}$$

wobei, wie üblich, $D(\xi_k'')$ die Streuung von ξ_k'' bedeutet. Dann gilt

$$P\left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \big(\xi_k'' - M(\xi_k'')\big) = 0\right) = 1. \tag{2.33}$$

Beweis. Man setze

$$\xi_k'' = \xi_k'' - M(\xi_k''), \tag{2.34}$$

ferner bezeichne $F_k(x)$ die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße $\xi_k''^*$, $F_{i,j}(x, y)$ die gemeinschaftliche Verteilungsfunktion von $\xi_i''^*$ und $\xi_j''^*$. Dann gilt

$$D^2\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k''\right) = \sum_{k=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_k(x) + 2\sum_{i>j} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, dF_{i,j}(x, y). \tag{2.35}$$

Nun gilt wegen (2.31)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, dF_{i,j}(x, y) = O(q^{|i-j|}) \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |x, y|\, dF_i(x)\, dF_j(y) \tag{2.36}$$
$$\leqslant O(q^{|i-j|}) D(\xi_i'') D(\xi_j'') \leqslant O(q^{|i-j|})\big(D^2(\xi_i'') + D^2(\xi_j'')\big).$$

Hieraus folgt

$$D^2\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k''\right) = O\left(\sum_{k=1}^{n} D^2(\xi_k'')\right) = O(n^{3/2}).$$

Hieraus folgt (2.33) mittels der Tschebyscheffschen Ungleichung auf die übliche Weise.

HILFSSATZ 2.4. *Es seien $\xi_1'', \ldots$ Zufallsgrößen, die den folgenden Voraussetzungen genügen: Es gilt*

$$M(\xi_k'') \geqslant 0, \tag{2.37}$$

$$\lim_{k\to\infty} M(\xi_k'') = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} M(\xi_k) = \infty. \tag{2.38}$$

Es sei $k_1, k_2, \ldots$ diejenige Teilfolge der natürlichen Zahlenfolge, für die

$$\sum_{k=1}^{k_l-1} M(\xi_k'') < l, \quad \sum_{k=1}^{k_l} M(\xi_k) \geqslant l \tag{2.39}$$

gilt. Dann sei vorausgesetzt, daß

$$D^2(\xi_k'') = O\big(l^{1/2} M(\xi_k'')\big) \quad \text{für} \quad k_l \leqslant k \leqslant k_{l+1} \tag{2.40}$$

gilt.

Es sei η_1'' ein Zufallsvektor mit den Komponenten $\xi_1'', \ldots, \xi_n''$, η_2'' ein Zufallsvektor mit den Komponenten $\xi_{n+k}'', \ldots, \xi_m''$. Dann sei vorausgesetzt, daß für alle Borel-meßbaren Mengen E_1 und E_2 die Relation

$$P(\eta_1'' \in E_1, \eta_2'' \in E_2) = P(\eta_1'' \in E_1) P(\eta_2'' \in E_2)\big(1+\vartheta(k)\big) \tag{2.41}$$

gilt, wobei

$$\vartheta(k) \leqslant q^k \quad (q < 1).$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k''\sim\sum_{k=1}^{n}M(\xi_k'')\Big)=1\,. \tag{2.42}$$

Beweis. Man setze

$$\varrho_l=\sum_{k=k_l+1}^{k_{l+1}}\xi_k''\,. \tag{2.43}$$

Dann gilt nach dem vorigen Hilfssatz

$$P\Big(\sum_{l=1}^{m}\varrho_l\sim\sum_{l=1}^{m}M(\varrho_l)\Big)=1\,. \tag{2.44}$$

Nun habe ich noch zu beweisen, daß auch

$$P\Big(\max_{k_l<m\leqslant k_{l+1}}\sum_{k=k_l+1}^{m}\xi_k''=O(l)\Big)=1 \tag{2.45}$$

gilt.

Es seien die folgenden Bezeichnungen eingeführt: $A_m^{(l)}(x)$ bezeichne das Ereignis

$$\sum_{k=k_l+1}^{m'}\xi_k''\leqslant x\quad(m'=k_l+1,\ldots,m-1)\,,\qquad\sum_{k=k_l+1}^{m}\xi_k''>x;$$

$B_m^{(l)}$ bezeichne das Ereignis

$$\xi_{m+1}''+\ldots+\xi_{k_{l+1}}''>-l^{0,9}\,,$$

$A^{(l)}(x)$ das Ereignis

$$\xi_{k_l+2}''+\ldots+\zeta_{k_{l+1}}''>x\,,$$

$C^{(l)}(x)$ das Ereignis

$$\max_{k_l<m\leqslant k_{l+1}}(\xi_{k_l+1}''+\ldots+\xi_m''>x)\,.$$

Findet irgendein der Ereignisse $A_m^{(l)}(x)$ statt, so findet auch $C^{(l)}(x)$ statt. Da die $A_m^{(l)}(x)$ paarweise fremd sind, gilt

$$C^{(l)}(x)=\bigcup_{m=k_l+1}^{k_{l+1}}A_m^{(l)}(x)\,. \tag{2.46}$$

Nun folgt aus dem gleichzeitigen Stattfinden von $A_m^{(l)}(x)$ und $B_m^{(l)}$ mit irgendeinem m das Ereignis $A^{(l)}(x-l^{0,9})$. Hieraus folgt

$$\sum_{m=k_l+1}^{k_{l+1}}P\big(A_m^{(l)}(x)B_m^{(l)}\big)\leqslant P\big(A^{(l)}(x-l^{0,9})\big); \tag{2.47}$$

daher folgt aus (2.41) und (2.46)

$$(1-q)\sum_{m=k_l+1}^{k_{l+1}}P\big(A_m^{(l)}(x)P(B_m^{(l)})\big)\leqslant P\big(A^{(l)}(x-l^{0,9})\big)\,. \tag{2.48}$$

Nun schätze ich $P(B_m^{(l)})$ nach unten ab. Es ist

$$\begin{aligned}P(B_m^{(l)})&=1-P(\xi_m''+\ldots+\xi_{k_{l+1}}''<-l^{0,9})\\&>1-P(|\xi_m''+\ldots+\xi_{k_{l+1}}''|>l^{0,9})\,.\end{aligned} \tag{2.49}$$

Nun gilt wegen (2.38), (2.40) und (2.41)

$$D(\xi_m''+\ldots+\xi_{k_{l+1}}'')=O(l^{1/4})\,.$$

Hieraus und aus der Tschebyscheffschen Ungleichung folgt

$$P(|\xi_m''+\ldots+\xi_{k_{l+1}}''|>l^{0,9})=O(l^{-1,3})\,.$$

Setz man dies in (2.49) ein, so erhält man für genügend großes l

$$P(B_m^{(l)})\geqslant\tfrac{1}{2}\,. \tag{2.50}$$

Hieraus, aus (2.46) und (2.48) erhält man für genügend großes l

$$P\big(C^{(l)}(x)\big)\leqslant\frac{2}{1-q}P\big(A^{(l)}(x-l^{0,9})\big)$$

oder, indem man $x=2l^{0,9}$ setzt,

$$P\big(C^{(l)}(2l^{0,9})\big)\leqslant\frac{2}{1-q}P\big(A^{(l)}(l^{0,9})\big)\,. \tag{2.51}$$

Da, wie man mittels der Tschebyscheffschen Ungleichung beweist,

$$\sum_{l=1}^{\infty}P\big(A^{(l)}(l^{0,9})\big)<\infty$$

gilt, folgt aus (2.51) die Relation (2.45). Damit ist auch der Hilfssatz 2.4 bewiesen.

§ 3. Nun bin ich in der Lage, den Beweis des Satzes 1. und 2. vollenden zu können.

Bezeichnet ξ_ν bzw. η_ν die durch (2.5) bzw. (2.6) definierten Zufallsgrößen, so gilt, wie wir schon wissen, für fast alle

$$N_{a,f,k'}^{*}(n)\sim\sum_{\gamma^\nu\leqslant n}\xi_\nu \tag{3.1}$$

und

$$N_{a,f,k'}(n)\sim\sum_{\gamma^\nu\leqslant n}\eta_\nu\,. \tag{3.2}$$

Für den Erwartungswert von ξ_ν bzw. η_ν gilt die Formel (2.29) bzw. (2.30). Es läßt sich jedoch nicht verifizieren, daß die Abhängigkeit zwischen den ξ_ν und η_ν „schwach genug" ist dazu, daß die Voraussetzungen der Hilfssätze 2.3 und 2.4 erfüllt sind. Daher ersetze ich ξ_ν und η_ν durch $\xi''_{\nu,\lambda}$ und $\eta''_{\nu,\lambda}$ die einerseits mit der Wahrscheinlichkeit 1 von ξ_ν und η_ν „wenig" abweichen, andererseits den Voraussetzung der Hilfssätze 2.3 und 2.4 genügen. Ich unterscheide zwei Fälle, je nachdem

a) $$\lim_{k\to\infty} f(k) = c > 0$$

oder

b) $$\lim_{k\to\infty} f(k) = 0$$

gilt.

a) Es sei λ eine „große" natürliche Zahl. Man setze

$$\varphi_{\lambda,\nu} = [a_{\nu+1};\, a_{\nu+2},\, \ldots,\, a_{\nu+\lambda}] + [0;\, a_\nu,\, a_{\nu-1},\, \ldots,\, a_{\nu-\lambda}]\,. \tag{3.3}$$

Es ist wegen der gleichmässigen Konvergenz der regelmässigen Kettenbruchentwicklung

$$|\varphi_{\nu,\lambda} - \varphi_\nu| < 2^{-\lambda/2}\,. \tag{3.4}$$

Die Zufallsgröße ξ''_ν sei definiert durch

$$\xi''_{\nu,\lambda} = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad B_\nu \equiv k'\,,\ 1 \leqslant \varphi_{\nu,\lambda} f(\gamma^\nu)\,, \\ 0 & \text{sonst;} \end{cases} \tag{3.5}$$

$\eta''_{\nu,\lambda}$ sei definiert durch

$$\eta''_{\nu,\lambda} = \min\Big(\nu^{3/4},\ \sum_{\substack{C_{\nu+1} \\ C_{\nu+1}B_\nu \equiv k' \\ C^2_{\nu+1} \leqslant \varphi_{\nu,\lambda} f(\gamma^\nu)}} 1\Big)\,. \tag{3.6}$$

Da der Wert von $\xi''_{\nu,\lambda}$ bzw. $\eta''_{\nu,\lambda}$ nur von den Teilnennen

$$a_{\nu-2},\, \ldots,\, a_{\nu+\lambda}$$

und von der Kongruenzklasse von B_ν abhängt, gilt nach einem Resultat meiner Arbeit [11] die Relation (2.31).

Nun gilt wegen (2.12)

$$P\Big(\sum_{\substack{C_{\nu+1} \\ C^2_{\nu+1} < \varphi_{\nu,\lambda} f(\gamma^\nu)}} 1 > \nu^{3/4}\Big) = O\big(f(\gamma^\nu)\,\nu^{-3/2}\big)$$

also

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} P\Big(\sum_{\substack{C_{\nu+1} \\ C^2_{\nu+1} \leqslant \varphi_{\nu,\lambda} f(\gamma^\nu)}} 1 > \nu^{3/4}\Big) < \infty;$$

hieraus und aus dem Borel-Cantellischen Lemma folgt, daß für fast alle α von genügend großem ν an die Ungleichung

$$\eta''_{\nu,\lambda} < \nu^{3/4} \tag{3.7}$$

gilt. Ferner gilt, wie man dies leicht sieht,

$$\int_{\nu^{3/4}}^{\infty} x\,dF_{\eta_\nu}(x) = f(\gamma^\nu)\,O(\nu^{-3/4})\,. \tag{3.8}$$

Hieraus und aus (3.4) folgt

$$|M(\eta_\nu) - M(\eta''_{\nu,\lambda})| < \varepsilon\,, \tag{3.9}$$

falls nur λ genügend groß ist. Aus (3.4) folgt für genügend großes λ auch

$$|M(\xi_\nu) - M(\xi''_{\nu,\lambda})| < \varepsilon\,. \tag{3.10}$$

Aus dem Hilfssatz 2.3 folgt

$$\begin{aligned} &P\Big(\sum_{k=1}^{n} \xi''_{k,\lambda} \sim \sum_{k=1}^{n} M(\xi''_{k,\lambda})\Big) = 1\,, \\ &P\Big(\sum_{k=1}^{n} \eta''_{k,\lambda} \sim \sum_{k=1}^{n} M(\eta''_{k,\lambda})\Big) = 1\,, \end{aligned} \tag{3.11}$$

also gilt wegen (2.29), (2.30), (3.8), (3.9) und (3.10) für fast alle

$$\Big|\sum_{k=1}^{n} \xi''_{k,\lambda} - \frac{r\varphi\big((r,k')\big)}{C(r)(r,k')\log 2} \sum_{k=1}^{n} f(\gamma^k)\Big| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} f(\gamma^k)\,, \tag{3.12}$$

$$\Big|\sum \eta''_{k,\lambda} - K(r,k') \sum_{k=1}^{n} f(\gamma^k)\Big| < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} f(\gamma^k)\,, \tag{3.13}$$

falls nur λ genügend groß ist; hier bedeutet

$$K(r,k') = \sum_{\substack{0 \leqslant d < r \\ (d,r)|k}} \frac{\varphi\big((d,r)\big)}{(d,r)\,C(r)\log 2} \sum_{\substack{m \geqslant 1 \\ md \equiv k'}} m^{-2} \tag{3.14}$$

offenbar

$$\varphi_k - \varphi_{k,\lambda} \begin{cases} > 0 & \text{falls } \lambda \text{ gerade}\,, \\ < 0 & \text{falls } \lambda \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt, ist

$$\xi_k \begin{cases} > \xi''_{k,\lambda} & \text{falls } \lambda \text{ ungerade}\,, \\ < \xi''_{k,\lambda} & \text{falls } \lambda \text{ gerade;} \end{cases} \tag{3.15}$$

analoge Ungleichungen gelten auch für die η. Da (3.12) und (3.13) sowohl für gerade als ungerade λ besteht und λ beliebig groß gewählt werden darf, folgt aus (3.15) für fast alle a

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k \sim \frac{r\varphi((r, k'))}{C(r)(r, k')\log 2} \sum_{k=1}^{n} f(\gamma^k) \tag{3.16}$$

und

$$\sum_{k=1}^{n} \eta_k \sim K(r, k') \sum_{k=1}^{n} f(\gamma^k) . \tag{3.17}$$

b) Gilt $f(k) \to 0$ für $k \to \infty$, so kann der Beweis mittels des Hilfssatzes 2.4 geführt werden. In diesem Falle kann noch die Vereinfachung gemacht werden, daß man statt der (2.5) und (2.6) definierten ξ_ν und η_ν mit den durch

$$\xi_\nu'' = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad B_\nu \equiv k' , \ 1 \leqslant a_{\nu+1} f(\gamma^\nu) , \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\eta_\nu'' = \sum_{\substack{C_{\nu+1} \\ C_{\nu+1}B_\nu \equiv k' \\ C_{\nu+1}^2 \leqslant a_{\nu+1} f(\gamma^\nu)}} 1$$

definierten Zufallsgrössen ξ_ν'' und η_ν'' arbeitet. So kann (3.16) und (3.17) auch im Falle b) bewiesen werden. Die Durchführung dieser Einzelheiten soll unterleiben.

Aus (2.3), (2.4) und (2.7) folgt für fast alle a

$$N^*_{a,f,k'}(n) \sim \sum_{\gamma^\nu \leqslant n} \xi_\nu , \tag{3.18}$$

$$N_{a,f,k'}(n) \sim \sum_{\gamma^\nu \leqslant n} \eta_\nu . \tag{3.19}$$

Um die Beweise der Sätze 1 und 2 zu vollenden, genügt es wegen (3.16) und (3.17) zu zeigen, daß

$$\sum_{\gamma^\nu \leqslant n} f(\gamma^\nu) \sim \frac{12 \log 2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} . \tag{3.20}$$

Dies läßt sich folgendermassen beweisen: Einerseits gilt wegen der Monotonie von $f(k)$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} \leqslant \sum_{\gamma^\nu \leqslant n} f(\gamma^\nu) \sum_{\gamma^\nu \leqslant k \leqslant \gamma^{\nu+1}} \frac{1}{k} = \sum_{\gamma^\nu \leqslant n} f(\gamma^\nu) \left(\log \gamma + O\left(\frac{1}{\gamma^\nu}\right)\right)$$
$$= \frac{\pi^2}{12 \log 2} \sum_{\gamma^\nu \leqslant n} f(\gamma^\nu) + O(1);$$

andererseits läßt sich auf analoge Weise die Relation

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k} > \frac{\pi^2}{12 \log 2} \sum_{\gamma^{\nu+1} \leqslant n} f(\gamma^\nu) + O(1)$$

zeigen, womit (3.20) bewiesen ist. Damit ist der Beweis der Sätze 1 und 2 vollendet.

Literaturverzeichnis

[1] P. Erdös, *Some results on diophantine approximation*, Acta Arith. 5 (1959), S. 359-369.

[2] S. Hartman und P. Szüsz, *On congruence classes of denominators of convergents*, Acta Arith. 6 (1960), S. 179-184.

[3] A. Khintchine, *Einige Sätze über Kettenbrüche mit Anwendungen auf die Theorie der diophantischen Approximationen*, Math. Ann. 92 (1924), S. 115-125.

[4] — *Zur metrischen Kettenbruchtheorie*, Com. Math. 3 (1936), S. 276-285.

[5] J. W. LeVeque, *On the frequency of small fractional parts in certain real sequences*, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), S. 237-260.

[6] — *On the frequency of small fractional parts in certain real sequences II*, Trans. Amer. Math. Soc. 94 (1959), S. 130-149.

[7] P. Lévy, *Sur les lois de probabilité dont dépendant les quotients complets et incomplets d'une fraction continue*, Bull. Soc. Math. 57 (1929), S. 178-194.

[8] — *Théorie de l'addition des variables aléatoires*, Paris 1954.

[9] W. Schmidt, *A metrical theorem in diophantine Approximation*, Canadian Journ. Math. 12 (1960), S. 619-631.

[10] P. Szüsz, *Über die metrische Theorie der diophantischen Approximation*, Acta Math. Ac. Sci. Hung. 9 (1958), S. 177-193.

[11] — *Varallgemeinerung und Anwendungen eines Kusminschen Satzes*, Acta Arith. 7 (1962), S. 149-160.

BUDAPEST, FORSCHUNGSINSTITUT FÜR
MATHEMATIK DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 9. 7. 1962