ACTA ARITHMETICA
LXXVIII.4 (1997)

Valeurs en $s = 1$ de fonctions L

par

MICHEL PESTOUR (Grenoble)

0. Introduction. Soit k un corps de nombre, totalement réel, de degré $d \geq 2$, d'anneau des entiers O_k. Soit K une extension abélienne de degré n de k de *conducteur* $\mathcal{C}$. On note :

• $k_{\mathcal{C}}$ l'ensemble des éléments α de k qui sont totalement positifs et congrus à 1 modulo $\mathcal{C}$,

• $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ le groupe des idéaux fractionnaires de k qui sont premiers avec $\mathcal{C}$,

• $\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ le sous-groupe de $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ formé des idéaux principaux de la forme αO_k avec $\alpha \in k_{\mathcal{C}}$.

D'après la théorie du corps de classes la restriction ω de l'application d'Artin à $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$ est surjective et son noyau est $\mathcal{P}_{\mathcal{C}} \times N_k^K(\mathcal{C})$ où $N_k^K(\mathcal{C})$ désigne le sous-groupe des normes des idéaux fractionnaires de K. ($N_k^K(\mathcal{C}) = \{N_k^K(\mathcal{B})$ où $\mathcal{B}$ est un idéal fractionnaire de K premier avec $\mathcal{C}O_K\}$.) On a donc $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}} N_k^K(\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Gal}(K/k)$. Soit alors $\widetilde{\chi}$ un caractère de $\mathrm{Gal}(K/k) = G$. $\widetilde{\chi}$ induit un caractère $\chi = \widetilde{\chi} \circ \omega$ sur $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{I}_{\mathcal{C}} \arrow[r, "s"] \arrow[drr, dashed, "\chi"'] & \mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}} N_k^K(\mathcal{C}) \arrow[r, "\tilde{\omega}", "\sim"'] & \mathrm{Gal}(K/k) \arrow[d, "\tilde{\chi}"] \\
& & \mathbb{C}^*
\end{tikzcd}$$

(où s désigne la surjection canonique et $\widetilde{\omega} \circ s = \omega$) qui permet de définir la fonction

$$L_{\mathcal{C}}(s, \chi) = \sum_{\substack{\mathfrak{a} \text{ idéal entier de } k \\ \mathfrak{a} \text{ premier à } \mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N(\mathfrak{a})^s} \quad \text{pour } \operatorname{Re} s > 1$$

(où l'on a posé $N(\mathfrak{a}) = N_{\mathbb{Q}}^k(\mathfrak{a})$).

Notons que l'on peut prolonger le caractère χ à l'ensemble des idéaux non nuls de k en posant pour tout idéal P premier de O_k :

• $\chi(P) = 0$ si le groupe d'inertie I_P de P n'est pas inclus dans le noyau $\operatorname{Ker} \chi$ de χ,

• $\chi(P) = \widetilde{\chi}(\sigma)$ si $I_P \subset \operatorname{Ker}\chi$ où σ est un élément de $\operatorname{Gal}(K/k)$ dont la restriction au corps $K(\chi) = \{x \in K : \sigma(x) = x,\ \forall\sigma \in \operatorname{Ker}\chi\}$ est l'automorphisme de Frobenius $(P, K(\chi)/k)$, ce qui permet de poser

$$L(s,\chi) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\text{ idéal entier}\\ \text{non nul de } k}} \frac{\chi(\mathfrak{a})}{N_{\mathbb{Q}}^k(\mathfrak{a})^s} \quad \text{pour } \operatorname{Re} s > 1.$$

On a alors

$$L(s,\chi) = L_{\mathcal{C}}(s,\chi) \prod_{\substack{P\text{ idéal entier}\\ \text{premier de } k\\ \text{tel que } P\mid\mathcal{C}}} \left[\frac{1}{1-\chi(P)/N(P)^s}\right] \quad \text{pour } \operatorname{Re} s > 1$$

et on sait que $L(s,\chi)$ se prolonge en une fonction entière si χ *est distinct du caractère trivial*.

En particulier,

$$L(1,\chi) = L_{\mathcal{C}}(1,\chi) \prod_{\substack{P\text{ idéal entier}\\ \text{premier de } k\\ \text{tel que } P\mid\mathcal{C}}} \left[\frac{1}{1-\chi(P)/N(P)}\right].$$

Le problème de l'évaluation de $L(1,\chi)$ fut étudié initialement par Kronecker qui détermina une expression du second terme du développement de Laurent au voisinage de $s = 1$ de la fonction ζ_k d'un corps de nombres k quadratique *imaginaire* expression dans laquelle la fonction $\ln|\eta(z)|$ avec

$$\eta(z) = e^{\pi iz/12} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi inz}) \qquad (z \in \mathbb{C},\ \operatorname{Im} z > 0)$$

joue un rôle fondamental. De la formule obtenue, appelée *formule limite de Kronecker*, résulte aisément l'expression de $L(1,\chi)$ (cf. [Si] par exemple).

Le cas où k est un corps quadratique réel fut étudié en 1917 (près d'un demi-siècle plus tard) par Hecke, l'existence d'unités de k d'ordre infini rendant le problème plus délicat, la fonction $\ln|\eta(z)|$ intervenant toujours mais de façon moins satisfaisante. Ce cas fut repris par Meyer en 1957 dans un travail dont certaines remarques ont été interprétées en termes de fractions continues par Zagier en 1975 (cf. [Z]). Dans son travail, la formule limite de Kronecker obtenue par Zagier s'exprime à l'aide de valeurs particulières de la fonction

$$F(x) = \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-t}} - \frac{1}{t}\right) \ln(1 - e^{-xt})\, dt \quad (x > 0) \quad (\text{cf. [Z], p. 164}).$$

En 1980, Novikov mena une étude analogue (cf. [N]) en introduisant la fonction

$$\varrho(x,\alpha,\beta) = \int_0^1 \frac{\ln(1-t^x e^{2\pi i\alpha})}{e^{-2\pi i\beta}-t}\,dt \qquad (x>0,\ \beta\notin\mathbb{Z})$$

et obtint une formule limite de Kronecker s'exprimant à l'aide de certaines valeurs relativement compliquées, prises par cette fonction ϱ, valeurs qui rendent l'expression obtenue difficile à expliciter (cf. [N], théorème 2, p. 167).

Entre-temps, Shintani en 1977 avait obtenu une formule limite de Kronecker où un rôle fondamental était joué par le logarithme de la fonction gamma double de Barnes (cf. [S1], théorème 1, p. 184).

Dans ce travail on reprend, en l'adaptant au cas de $L_{\mathcal{C}}(s,\chi)$ avec $\chi\neq 1$ (la relation $\sum_{\sigma\in G}\widetilde{\chi}(\sigma)=0$ jouant un rôle essentiel), un travail (cf. [C]) où Colmez exprime la fonction zêta d'un corps de nombre comme la transformée de Mellin en d variables d'une fonction rationnelle en e^z, à l'aide d'une variante effective de la méthode de Shintani. On obtient ainsi une formule générale valable pour d quelconque. On donne ensuite, dans le cas où $d=2$, deux expressions de $L(1,\chi)$ qui sont à rapprocher de celles obtenues dans [N] et [Z]. La bibliographie donne des références d'articles présentant des résultats reliés aux nôtres ou utilisés dans le détail des calculs.

1. Décomposition de Shintani. Variante effective de Colmez

• Soient $\mathcal{O}_k^*$ le groupe multiplicatif des unités de $\mathcal{O}_k$ ($\mathcal{O}_k^*\simeq\{\pm1\}\times\mathbb{Z}^{d-1}$) et $U_{\mathcal{C}}$ le sous-groupe de $\mathcal{O}_k^*$ formé des unités de k totalement positives et congrues à 1 modulo $\mathcal{C}$.

• Soit $\tau_1,\dots,\tau_d$ les d plongements de k dans $\mathbb{R}$. L'application

$$\tau: k\to\mathbb{R}^d,\qquad x\mapsto(\tau_1(x),\dots,\tau_d(x)),$$

permet d'identifier k avec une $\mathbb{Q}$-sous-algèbre de $\mathbb{R}^d$.

Colmez a prouvé dans [C] l'existence de $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{d-1}\in U_{\mathcal{C}}$ vérifiant :

(i) le groupe multiplicatif V engendré par $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{d-1}$ est discret et libre de rang $d-1$,

(ii) si pour $\sigma\in S_{d-1}$ (groupe symétrique d'ordre $d-1$) on pose

$$f_{1,\sigma}=1 \quad\text{et}\quad f_{i,\sigma}=\prod_{j=1}^{i-1}\varepsilon_{\sigma(j)} \quad \forall i=2,\dots,d-1,$$

alors $\Delta_\sigma=\det(f_{1,\sigma},\dots,f_{d,\sigma})$ a le même signe que la signature $\varepsilon(\sigma)$ de la permutation σ, pour tout $\sigma\in S_{d-1}$.

De plus, si l'on pose pour toute partie J non vide de $\{1,\dots,d\}$ et pour tout $\sigma \in S_{d-1}$

$$C_{\sigma,J} = \Big\{ \sum_{j\in J} \lambda_j f_{j,\sigma} \text{ avec } \lambda_j \in \mathbb{R}^{+*}\ \forall j \in J \Big\},$$

alors

$$(\mathbb{R}^{+*})^d/V = \coprod_{(\sigma,J)\in S} C_{\sigma,J}$$

où S désigne un système de représentants fixé de l'ensemble des couples (σ, J) muni de la relation d'équivalence : $(\sigma,J) \sim (\sigma',J')$ si et seulement s'il existe $v \in V$ tel que $C_{\sigma,J} = vC_{\sigma',J'}$.

Notons alors, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de O_k,

$$D_{\sigma,J,\mathfrak{a}} = D_{\sigma,J} \cap (1 + \mathcal{C}\mathfrak{a}^{-1})$$

avec

$$D_{\sigma,J} = \Big\{ y \in C_{\sigma,J} : y = \sum_{j\in J} x_j c f_{j,\sigma} \text{ avec } 0 < x_j \le 1\ \forall j \in J \Big\}$$

(c étant le générateur positif de l'idéal $\mathcal{C} \cap \mathbb{Z}$). $D_{\sigma,J,\mathfrak{a}}$ est un ensemble fini.

Posons de plus, pour $z \in (\mathbb{R}^{+*})^d$,

$$F_{y,\sigma,J}(z) = e^{-\operatorname{Tr}(yz)} \prod_{j\in J} \frac{1}{1 - e^{-c\operatorname{Tr}(f_{j,\sigma}z)}}$$

et

$$F_{\mathfrak{a}_q,\sigma}(z) = \sum_{J\in S'_\sigma} \sum_{y\in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}} F_{y,\sigma,J}(z)$$

où S'_σ désigne l'ensemble des parties J de $\{1,\dots,d\}$ telles que $(\sigma,J) \in S$ et $\operatorname{Tr}(x) = \sum_{j=1}^d \tau_j(x)$ pour $x \in k$. Alors, si $h_{\mathcal{C}} = \operatorname{Card} \mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ et si $\mathfrak{a}_1,\dots,\mathfrak{a}_{h_{\mathcal{C}}}$ désigne un système de représentants de $I_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ on a si $\operatorname{Re} s > 1$,

$$L_{\mathcal{C}}(s,\chi) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s} \cdot \frac{1}{[U_{\mathcal{C}} : V]} \cdot \frac{1}{\Gamma(s)^d} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{\mathfrak{a}_q,\sigma}(z) \prod_{i=1}^d (z_i^{s-1} dz_i).$$

À partir de cette expression, pour déterminer la valeur en 1 de $L_{\mathcal{C}}(s,\chi)$ on explicite un prolongement holomorphe à $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s > 1 - 1/d\}$ de la fonction h définie par

$$h(s) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s} \cdot \frac{1}{[U_{\mathcal{C}} : V]} \cdot \frac{1}{\Gamma(s)^d} \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma}(z) \prod_{i=1}^d (z_i^{s-1} dz_i)$$

pour $\operatorname{Re} s > 1$ (où l'on a posé, pour alléger les notations, $D_{\sigma,\mathfrak{a}_q} = D_{\sigma,\mathfrak{a}_q,\{1,\dots,d\}}$ et $F_{y,\sigma} = F_{y,\sigma,\{1,\dots,d\}}$).

En reprenant le travail effectué par Colmez dans [C] (lemme 3.3, pp. 377–378) on obtient pour $\mathrm{Re}\, s > 1-1/d$ et $s \neq 1$,

$$h(s) = -\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]}\cdot\frac{1}{\Gamma(s)^d}\cdot\frac{1}{d(s-1)}f(s) \tag{1}$$

avec

$$f(s) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)^s} \times \sum_{\sigma\in S_{d-1}} \sum_{y\in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int\limits_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial\Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u)\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} u_j^{s-1}\Big)u_i^{d(s-1)}\prod_{i=1}^{d} du_i$$

où, si l'on pose

$$L_i(y,u) = (y_1u_1 + \ldots + y_{i-1}u_{i-1} + y_i + y_{i+1}u_{i+1} + \ldots + y_du_d)u_i$$

(avec $u=(u_1,\ldots,u_d)\in\mathbb{R}^d$ et $y_i=\tau_i(y)$ pour $i=1,\ldots,d$ et $y\in\mathcal{O}_k$), $\Phi_{i,y,\sigma}$ est définie par

$$\Phi_{i,y,\sigma}(u) = e^{-L_i(y,u)}\prod_{j=1}^{d}\Big[\frac{L_i(f_{j,\sigma},u)}{1-e^{-cL_i(f_{j,\sigma},u)}}\cdot\frac{u_i}{L_i(f_{j,\sigma},u)}\Big]\psi_i(u_1,\ldots,u_{i-1},1,u_{i+1},\ldots,u_d)$$

pour $i=1,\ldots,d$, $\psi_1,\ldots,\psi_d$ étant des fonctions C^∞ sur $(\mathbb{R}^+)^d\setminus\{0\}$ vérifiant

(i) $\sum_{i=1}^d \psi_i(u) = 1 \quad \forall u\in(\mathbb{R}^+)^d\setminus\{0\}$,
(ii) $\psi_i(u)=0$ s'il existe $j\neq i$ tel que $u_j\geq 2u_i$,
(iii) $\psi_i(\lambda u)=\psi_i(u)$ pour tous $\lambda>0$, $u\in(\mathbb{R}^+)^d\setminus\{0\}$ et $i=1,\ldots,d$.

Les fonctions $\Phi_{i,y,\sigma}$ présentent l'avantage d'être C^∞ sur $(\mathbb{R}^+)^d$ et à décroissance rapide à l'infini.

En notant alors que

$$f(1) = \begin{cases} 0 & \text{si } \chi\neq 1,\\ -h_{\mathcal{C}}\displaystyle\sum_{\sigma\in S_{d-1}}\frac{K_\sigma|\Delta_\sigma|}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}} & \text{si } \chi=1,\end{cases}$$

avec

$$K_\sigma = \sum_{i=1}^{d}\int\limits_{(\mathbb{R}^{+*})^{d-1}}\frac{\psi_i(u_1,\ldots,u_{i-1},1,u_{i+1},\ldots,u_d)}{c^d\prod_{j=1}^d L_i(f_{j,\sigma},u)}u_i^d\Big(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{d} du_j\Big)$$

(D_k désignant la valeur absolue du discriminant du corps k) et en utilisant la relation $\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(\mathfrak{a}_q)=0$ si $\chi\neq 1$, on obtient

$$h(1) = \frac{-f'(1)}{d[U_{\mathcal{C}}:V]}$$

où, en notant $p_i(u) = u_1 \dots u_{i-1} u_i^d u_{i+1} \dots u_d$ si $u = (u_1, \dots, u_d)$,

$$f'(1) = -\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q) \ln N(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{y \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \prod_{j=1}^{d} du_j$$
$$+ \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{y \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \ln p_i(u) \prod_{j=1}^{d} du_j.$$

On a de plus

$$\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{y \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \ln(u_1 \dots u_i^d \dots u_d) \prod_{j=1}^{d} du_j$$
$$= d \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{y \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \ln u_i \, du_1 \dots du_d$$

et

$$-\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \ln N(\mathfrak{a}_q) \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{y \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \prod_{j=1}^{d} du_j$$
$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \ln N(\mathfrak{a}_q) \sum_{\sigma \in S_{d-1}} K_\sigma \operatorname{Card}(D_{\sigma,\mathfrak{a}_q})$$
$$= \Big[\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(\mathfrak{a}_q) \ln N(\mathfrak{a}_q) \Big] \cdot \frac{dR(V)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}$$

(en notant $R(V)$ le régulateur de V).

En récapitulant, on en déduit une première expression de $L_{\mathcal{C}}(1, \chi)$:

Théorème 1.

$$L_{\mathcal{C}}(1, \chi)$$
$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \cdot \frac{1}{[U_{\mathcal{C}} : V]} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{\substack{J \in S'_\sigma \\ J \neq \{1,\dots,d\}}} \sum_{y \in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma,J}(u) \prod_{j=1}^{d} du_j$$
$$- \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)(\ln N(\mathfrak{a}_q))R(V)}{[U_{\mathcal{C}} : V] N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}$$
$$- \frac{1}{[U_{\mathcal{C}} : V]} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{y \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \sum_{i=1}^{d} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} \frac{\partial \Phi_{i,y,\sigma}}{\partial u_i}(u) \ln u_i \prod_{j=1}^{d} du_j.$$

On reprend ensuite à l'envers la transformation de Colmez permettant de passer des fonctions $F_{y,\sigma}$ aux fonctions $\Phi_{i,y,\sigma}$ (cf. [C], pp. 377–378) en exploitant à nouveau la relation $\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(\mathfrak{a}_q) = 0$. On fait successivement une intégration par parties, puis un changement de variables permettant d'éliminer les fonctions ψ_i. On obtient alors, en posant

$$f^*_{k,\sigma} = (\tau_k(f_{1,\sigma}), \ldots, \tau_k(f_{d,\sigma})) \quad \forall k = 1, \ldots, d,$$

et en désignant par $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(f^*_{1,\sigma}, \ldots, f^*_{d,\sigma})$ le cône ouvert formé des points $z = (z_1, \ldots, z_d) \in (\mathbb{R}^{+*})^d$ tels que pour tout $k = 1, \ldots, d$,

$$\varepsilon(\sigma) \det(f^*_{1,\sigma}, \ldots, f^*_{k-1,\sigma}, z, f^*_{k+1,\sigma}, \ldots, f^*_{d,\sigma}) > 0,$$

une seconde expression de $L_{\mathcal{C}}(1, \chi)$.

Théorème 2.

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}}(1,\chi) &= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{[U_{\mathcal{C}} : V] N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \sum_{\substack{J \in S'_\sigma \\ J \neq \{1,\ldots,d\}}} \sum_{y \in D_{\sigma,J,\mathfrak{a}_q}} \int_{(\mathbb{R}^{+*})^d} F_{y,\sigma,J}(u) \prod_{k=1}^{d} du_k \\ &\quad - \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)(\ln N(\mathfrak{a}_q)) R(V)}{[U_{\mathcal{C}} : V] N(\mathcal{C}) \sqrt{D_k}} \\ &\quad + \frac{1}{[U_{\mathcal{C}} : V]} \sum_{\sigma \in S_{d-1}} \frac{\varepsilon(\sigma)}{c^d \Delta_\sigma} \int_{\Gamma_\sigma} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(\mathfrak{a}_q)}{N(\mathfrak{a}_q)} \sum_{(x_1,\ldots,x_d) \in \hat{D}_{\sigma,\mathfrak{a}_q}} \prod_{j=1}^{d} \frac{e^{-x_j z_j}}{1 - e^{-z_j}} dz_j \end{aligned}$$

($\widehat{D}_{\sigma,\mathfrak{a}_q}$ *désignant l'ensemble des d-uplets* $(x_1, \ldots, x_d) \in \left]0,1\right]^d$ *tel que* $\sum_{j=1}^{d} x_j c f_{j,\sigma} \in D_{\sigma,\mathfrak{a}_q}$).

2. Le cas $d = 2$. Dans le cas $d = 2$, $S_{d-1} = \{\mathrm{Id}\}$ et la somme sur les parties J de $\{1, \ldots, d\}$ distinctes de $\{1, \ldots, d\}$, intervenant dans l'expression du théorème 2, est réduite à $J = \{1\}$ modulo la relation d'équivalence $\sim$ (de sorte que l'on peut supprimer l'indice σ).

On choisit en outre un système particulier de représentants de $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}/\mathcal{P}_{\mathcal{C}}$ formé d'idéaux premiers de $P_1, \ldots, P_{h_{\mathcal{C}}}$ dont la norme est un nombre premier. Un tel système de représentants existe d'après un théorème de Tchebotareff, ce qui permet de décrire explicitement les ensembles finis $\widehat{D}_{\{1\},P_q}$ et $\widehat{D}_{P_q}$ pour tout $q = 1, \ldots, h_{\mathcal{C}}$. De façon plus précise, on introduit une base (e_1, e_2^q) de $\mathcal{C}P_q^{-1}$ telle que pour tout $q = 1, \ldots, h_{\mathcal{C}}$, $cf_1 = e_1$ et $cf_2 = u_{P_q} e_1 + v_{P_q} e_2^q$. On obtient alors :

Lemme 1. *Pour tout* $q = 1, \ldots, h_{\mathcal{C}}$,

$$D_{\{1\},P_q} = \{1\},$$

$$\widehat{D}_{P_q} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in]0,1]^2 : \right.$$
$$\left. x_1 = x_1(m) = \theta\left(\frac{mu_{P_q}}{v_{P_q}} - \frac{1}{c}\right),\ x_2 = x_2(m) = \frac{m}{v_{P_q}},\ m = 1, \ldots, v_{P_q} \right\},$$

en posant $\theta(x) = E(x) - x + 1 = 1 - \{x\}$ *pour* $x \in \mathbb{R}$ *et* $v_{P_q} = \frac{N(P_q)c^2\Delta}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}$.

D'où l'on déduit :

Théorème 3.

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}}(1,\chi) &= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\zeta(2,1/c)}{N(P_q)c^2[U_{\mathcal{C}}:V]} - \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)(\ln N(P_q))R(V)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}[U_{\mathcal{C}}:V]} \\ &\quad + \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]} \int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}v_{P_q}} \sum_{(x_1,x_2)\in\widehat{D}_{P_q}} \frac{e^{-x_1z_1}e^{-x_2z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}\,dz_1dz_2 \\ &= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\zeta(2,1/c)}{N(P_q)c^2[U_{\mathcal{C}}:V]} - \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)(\ln N(P_q))R(V)}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}[U_{\mathcal{C}}:V]} \\ &\quad + \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}} \int_{\Gamma_a} \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)}{v_{P_q}} \sum_{m=1}^{v_{P_q}} \frac{e^{-x_1^q(m)z_1}e^{-(m/v_{P_q})z_2}}{(1-e^{-z_1})(1-e^{-z_2})}\,dz_1dz_2 \end{aligned}$$

où $\zeta(x,b)$ *désigne la fonction zêta d'Hurwitz et* $\Gamma_a = \{(z_1,z_2) \in \mathbb{R}^{+*} : (1/a)z_1 < z_2 < az_1\}$ *si* $\varepsilon_1 = (1/a, a)$.

Posons alors, pour $s = 1, \ldots, v_{P_q} - 1$,

$$H_s(x) = \int_0^\infty \frac{\ln(1-\zeta_q^s e^{-xt})}{1-\zeta_q^{su_{P_q}}e^{-t}}\,dt \quad (x > 0) \quad \text{où } \zeta_q = e^{2\pi i/v_{P_q}}.$$

Théorème 4.

$$\begin{aligned} L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = &\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\ln N(P_q)\ln a}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})} \\ &+ \frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})} \\ &\times \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \chi(P_q) \sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{-2\pi is/c} \int_0^\infty \frac{\ln(1-\zeta_q^s e^{-az}) - \ln(1-\zeta_q^s e^{-z/a})}{1-\zeta_q^{u_{P_q}s}e^{-z}}\,dz \end{aligned}$$

$$= \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}} \frac{\chi(P_q)\ln N(P_q)\ln a}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}$$

$$+\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\sum_{s=1}^{v_{P_q}-1} e^{-2\pi i s/c}[H_s(a)-H_s(1/a)].$$

Ce résultat peut se rapprocher d'un résultat obtenu par Novikov dans [N]; il s'obtient à partir du théorème 3 en évaluant précisément le terme correspondant à $s = v_{P_q}$ et en intégrant par rapport à z_1 (si l'on intègre par rapport à z_2 les calculs sont plus compliqués) la somme des termes restants, le calcul reposant sur la décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $T^{r-1}/(1-T^{v_{P_q}})$ pour $r=1,\dots,v_{P_q}$. L'intérêt de cette décomposition est double : d'une part, il permet d'intégrer par rapport à l'une des variables; d'autre part, l'apparition de racines v_{P_q}-ième de l'unité permet "d'avaler" l'entier $E(mu_{P_q}/c-1/c)+1$ intervenant dans $x_1^q(m)$ et que l'on maîtrise mal.

Corollaire. *Il existe un système d'idéaux $(\mathfrak{a}_\sigma)_{\sigma\in G}$ tels que*

$$L(1,\chi) = \frac{1}{n}\Big[\sum_{\sigma\in G}\widetilde{\chi}(\sigma)\ln N(\mathfrak{a}_\sigma)\Big]\frac{2hR_k}{\sqrt{D_k}}$$

$$+\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]\sqrt{D_k}N(\mathcal{C})}$$

$$\times\bigg(\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)e^{-2\pi i s/c}\Big[H_s(a)-H_s\Big(\frac{1}{a}\Big)\Big]\bigg)\prod_{P|\mathcal{C}}\Big[1-\frac{\chi(P)}{N(P)}\Big]^{-1}$$

où R_k désigne le régulateur et h le nombre de classe du corps k.

On termine cette étude en donnant une expression réelle de $L_{\mathcal{C}}(1,\chi)$: soit

$$G_q(z) = \sum_{l=1}^{\infty}\frac{(\Gamma'/\Gamma)(lz+x_1^q(l))-\ln(lz)}{l}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_0^{\infty}\Big[\frac{e^{-lzt}}{t}-\frac{e^{-(lz+x_1^q(l))t}}{1-e^{-t}}\Big]dt,\qquad \forall z>0.$$

Théorème 5.

$$L_{\mathcal{C}}(1,\chi) = \sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)}{N(P_q)}\cdot\frac{\zeta(2,1/c)}{[U_{\mathcal{C}}:V]c^2}+\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\frac{\chi(P_q)\ln N(P_q)\ln a}{N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}[U_{\mathcal{C}}:V]}$$

$$+\frac{1}{[U_{\mathcal{C}}:V]N(\mathcal{C})\sqrt{D_k}}\sum_{q=1}^{h_{\mathcal{C}}}\chi(P_q)\Big[G_q\Big(\frac{a}{v_{P_q}}\Big)-G_q\Big(\frac{1}{av_{P_q}}\Big)\Big].$$

Ce résultat s'obtient encore à partir du théorème 3 en isolant la partie polaire dans l'intégrale sur Γ_a, l'expression restante conduisant cette fois aux fonctions G_q, fonctions qui présentent certaines analogies avec la fonction F introduite par Zagier dans [Z].

Références

[CN] P. Cassou-Noguès, *Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques*, Invent. Math. 51 (1979), 29–59.

[C-S] J. Coates and W. Sinnott, *On p-adic L-functions over real quadratic fields*, ibid. 25 (1974), 253–279.

[C] P. Colmez, *Résidu en* $s = 1$ *des fonctions zêta p-adiques*, ibid. 91 (1988), 371–389.

[D] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal*, Hermann, Paris, 1968.

[K] N. Katz, *Another look at p-adic L-functions for totally real fields*, Math. Ann. 255 (1981), 33–43.

[L] S. Lang, *Algebraic Number Theory*, Addison-Wesley, 1970.

[N] A. P. Novikov, *Kronecker's limit formula in a real quadratic field*, Math. USSR-Izv. 17 (1981), 147–176.

[P] G. Pólya and G. Szegő, *Problems and Theorems in Analysis I*, Springer, Berlin, 1972.

[Sc] R. Sczech, *Eisenstein cocycles for* $GL_2\mathbb{Q}$ *and values of L-functions in real quadratic fields*, Comment. Math. Helv. 67 (1992), 363–382.

[S1] T. Shintani, *On a Kronecker limit formula for real quadratic fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 24 (1977), 167–199.

[S2] —, *On evaluation of zeta functions of totally real algebraic number fields at non-positive integers*, ibid. 23 (1976), 393–417.

[Si] C.-L. Siegel, *Lectures on Advanced Analytic Number Theory*, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1961.

[T] J. Tate, *Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en* $s = 0$, Birkhäuser, Boston, 1984.

[W] E. T. Whittaker and G. N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, 4th ed., Cambridge (reprinted), 1963.

[Z] D. Zagier, *A Kronecker limit formula for real quadratic fields*, Math. Ann. 213 (1975), 153–184.

Université de Grenoble I
Institut Fourier
UMR 5582
UFR de Mathématiques
B.P. 74
38402 St. Martin d'Hères Cedex, France

Reçu le 5.4.1996 (2961)