ACTA ARITHMETICA
LXXVIII.3 (1997)

Développement en fraction continue à l'entier supérieur, idéaux 0-réduits et un problème d'Eisenstein

par

Pierre Kaplan (Nancy) et Yoshio Mimura (Osaka)

1. Introduction. Soit D un discriminant positif, c'est-à-dire un entier non carré congru à 0 ou 1 modulo 4. Dans ce travail nous considérons le problème de trouver un critère pour que l'équation

$$X^2 - DY^2 = 4 \tag{1.1}$$

ait des solutions où Y est impair. Quand $D \equiv 1 \pmod 4$ où, pour toute solution de (1.1), $X \equiv Y \pmod 2$, ce problème est connu sous le nom de problème d'Eisenstein ([1]), et dans ce cas nous avons vu dans le travail [7] que la résolubilité en nombres impairs de l'équation (1.1) dépend des longueurs relatives ℓ_0 et ℓ_0^* des périodes respectives des développements en fraction continue à l'entier le plus proche des nombres $\sqrt{D}$ et $(1+\sqrt{D})/2$, à savoir que ([7], Théorème 1)

$$\begin{cases} \text{(a) Si (1.1) n'a pas de solution impaire, } \ell_0^*/2 \le \ell_0 < 2\ell_0^*. \\ \text{(b) Si (1.1) a des solutions impaires, } 2\ell_0^* < \ell_0 \le 4\ell_0^*. \end{cases} \tag{1.2}$$

Le but de ce travail est de montrer que l'utilisation des développements en fraction continue à l'entier supérieur, déjà utilisé dans [10] et dans [6], permet d'obtenir très simplement un résultat valable pour tout D et un critère meilleur que (1.2) dans le cas où $D \equiv 1 \pmod 4$. Le développement en fraction continue à l'entier supérieur d'un nombre réel φ est défini par

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_n = q_n - 1/\varphi_{n+1}, \quad q_n \in \mathbb{Z}, \quad \varphi_{n+1} > 1,$$

de sorte que q_n est, pour $n \ge 0$, l'entier immédiatement supérieur à φ_n. Si φ est un nombre irrationnel quadratique son développement est périodique à partir d'un certain rang. Posons $\omega_0 = (1+\sqrt{D})/2$ si $D \equiv 1 \pmod 4$, $\omega_0 = \sqrt{D}/2$ si $D \equiv 0 \pmod 4$ et soient L_0 et L_0^* les longueurs des périodes des développements en fraction continue à l'entier supérieur de $\sqrt{D}$ et de ω_0 respectivement. Nous prouvons le résultat suivant :

Théorème 1. (a) *Si* (1.1) *n'a pas de solution où Y est impair alors* $L_0^*/2 \le L_0 < 2L_0^*$.

(b) *Si* $D \equiv 1 \pmod 4$ *et si* (1.1) *a des solutions impaires alors* $3L_0^* < L_0 \leq 4L_0^*$.

(c) *Si* $D \equiv 0 \pmod 4$ *et si* (1.1) *a des solutions où* Y *est impair alors* $L_0^* < L_0 \leq 3L_0^*$.

Nous insistons sur le fait que la partie (a) du Théorème 1 est vraie aussi bien pour D pair que pour D impair. Pour $D \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 4)$ le critère obtenu est meilleur que (1.2) en ce sens que la séparation entre les deux cas est plus grande, de sorte que le Théorème 2 ci-dessous, c'est-à-dire la généralisation aux classes non principales, donne aussi un critère.

Dans le cas où $D \equiv 0 \pmod 4$ on n'obtient pas de critère et des exemples comme $D = 28$ ($Y = 3,\ L_0^* = 2,\ L_0 = 6$), $D = 44$ ($Y = 3,\ L_0^* = 3,\ L_0 = 4$), $D = 108$ ($Y = 5,\ L_0^* = 5,\ L_0 = 6$) indiquent que les limites de (c) sont les meilleures possibles.

La méthode de démonstration est analogue à celles utilisées dans [4], [10], [6], [7] et [3]. Nous introduisons une application ψ de l'ensemble des idéaux 0-réduits de discriminant $4D$ dans l'ensemble des idéaux 0-réduits de discriminant D. L'étude de l'image inverse par ψ de chaque idéal d'une part, et de la croissance de ψ d'autre part, nous permettent de démontrer respectivement les Théorèmes 1 et 2, (b) et (c), et les Théorèmes 1 et 2(a).

L'application ψ introduite ici est distincte de celle utilisée dans [6], où se trouve une démonstration des Théorèmes 1(b) et 2(b) et de celle utilisée dans [3], dont le Theorem 1 permet facilement de prouver les Théorèmes 1(c) et 2(c). Nous aurions pu référer à [6] et [3], mais nous avons préféré reprendre ces démonstrations avec notre application ψ pour que la simplicité de la théorie soit bien mise en évidence. C'est pour pouvoir démontrer les Théorèmes 1(a) et 2(a) qu'il a fallu remplacer l'application ψ de [6] par celle introduite ici dont la croissance est plus régulière.

La démonstration des Théorèmes 1 et 2 est vraiment très courte, alors que la démonstration de (1.2) était assez longue car elle exigeait l'étude de nombreux cas, aussi bien pour (a) que pour (b), et quelques raisonnements subtils. Le prix à payer pour cette simplicité, car il y en a un comme toujours, est que les périodes des développements en fraction continue à l'entier supérieur sont en général beaucoup plus longues que les périodes des développements en fraction continue à l'entier inférieur (développement usuel) ou à l'entier le plus proche.

C'est l'utilisation d'ordinateurs faciles à utiliser et à programmer qui nous a permis de conjecturer les résultats que nous avons pu prouver ici et dans le travail précédent [7], car même un calculateur prodige, comme Gauss par exemple, aurait eu bien de la peine à calculer suffisamment d'exemples pour en tirer des conjectures, et ceci peut expliquer que des résultats aussi simples aient pu rester cachés jusqu'à nos jours.

2. Idéaux 0-réduits. Soit Δ un discriminant positif, c'est-à-dire un entier positif non carré congru à 0 ou 1 modulo 4. Les idéaux primitifs de l'ordre O_Δ de discriminant Δ sont les $\mathbb{Z}$-modules $I = [a, (b + \sqrt{\Delta})/2]$ tels que

$$a > 0, \quad (\Delta - b^2)/(4a) = c \in \mathbb{Z}, \quad (a, b, c) = 1. \tag{2.1}$$

Le nombre a est la norme $N(I)$ de l'idéal I. Posons $\varphi = (b + \sqrt{\Delta})/(2a)$. La classe modulo 1 de φ est déterminée par I et, inversement, le nombre φ détermine l'idéal I. Nous dirons que I et φ sont *associés* et écrirons $I = I(\varphi)$, ce qui signifie que

$$I = a[1, \varphi], \qquad \varphi = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a},$$

où a et b vérifient (2.1). Si a et b vérifient (2.1) nous dirons que le discriminant de I et de φ est Δ. Nous désignerons par $\overline{\varphi} = (b - \sqrt{\Delta})/(2a)$ le conjugué du nombre φ et par $[\lambda]$ la partie entière du nombre réel λ.

Le nombre $[\varphi] - \overline{\varphi}$ est bien défini par l'idéal I, ce qui nous permet de définir les idéaux λ-réduits :

DÉFINITION 1. Soit λ un nombre réel, $\lambda \geq 0$. L'idéal $I = a[1, \varphi]$ est dit λ-*réduit* si $[\varphi] - \overline{\varphi} > \lambda$.

Dans ce travail nous nous intéresserons principalement aux idéaux 0-réduits (idéaux "négativement réduits" de [3] et [6]). Les idéaux réduits au sens usuel (cf. [5], [8]) sont les idéaux 1-réduits.

DÉFINITION 2. Un nombre φ est 0-*réduit* s'il vérifie

$$0 < \overline{\varphi} < 1 < \varphi. \tag{2.2}$$

Les nombres 0-réduits définissent les idéaux 0-réduits, et si l'idéal $I = a[1, \varphi]$ est 0-réduit on peut choisir φ modulo 1 de façon que φ soit un nombre 0-réduit. Les nombres 0-réduits sont appelés les nombres négativement réduits dans [6]. On sait (voir [5], p. 172) que le nombre des idéaux 0-réduits et celui des nombres 0-réduits de discriminant Δ donné est fini.

Nous désignerons par ε_Δ^+ l'unité fondamentale > 1 de norme positive de l'anneau O_Δ.

Considérons maintenant le processus de réduction.

Soit I un idéal de discriminant Δ défini par un nombre φ. Les 0-*successeurs* $\tau(\varphi)$ de φ et $\tau(I)$ de I sont définis par

$$\begin{cases} \varphi = q - \dfrac{1}{\tau(\varphi)}, & q \in \mathbb{Z},\ \tau(\varphi) > 1, \\ \tau(I) = I(\tau(\varphi)). \end{cases} \tag{2.3}$$

Comme $\tau(\varphi) = -1/(\varphi - q)$ la Proposition 3 de [8] montre que

$$\tau(I) = \frac{1}{\tau(\varphi)} I, \tag{2.4}$$

si bien que les idéaux $\tau(I)$ et I sont équivalents, et même strictement équivalents si I est 0-réduit.

On démontre qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que le nombre $\tau^n(\varphi)$ et l'idéal $\tau^n(I)$ soient 0-réduits pour $n \geq n_0$, et que les suites $\tau^n(\varphi)$ et $\tau^n(I)$ sont périodiques à partir de n_0. De plus, deux nombres ou deux idéaux de discriminants Δ strictement équivalents sont dans la même période (voir [6], Proposition 5, ou, dans le langage des formes quadratiques binaires, [11], Satz 1). Si φ est un nombre 0-réduit dont la longueur de la période est l on a

$$\varepsilon_\Delta^+ = \prod_{n=1}^{l} \tau^n(\varphi) = \prod_{n=1}^{l} \frac{1}{\tau^n(\varphi)}. \tag{2.5}$$

Nous désignerons par $H_+(4D)$ et $H_+(D)$ les groupes de classes au sens strict d'idéaux primitifs de discriminant $4D$ et D respectivement, et par ε_{4D}^+ et ε_D^+ les unités fondamentales > 1 de norme $+1$ des anneaux O_{4D} et O_D respectivement. Nous désignerons aussi par $C(I)$ la classe de l'idéal I.

Soit $C \in H_+(4D)$ et $I = [a, b + \sqrt{D}]$ un idéal de C, de sorte que $D = b^2 + ac$ avec $(a, 2b, c) = 1$. On a $b \equiv D \pmod 2$ si $a \equiv 0 \pmod 4$ ou bien $b \not\equiv b + a \pmod 2$, donc on peut toujours supposer $b \equiv D \pmod 2$. Alors on sait (voir par exemple [9], Théorème 1 et Corollaire 4) que l'idéal

$$\theta(I) = \begin{cases} \left[a, \dfrac{b+\sqrt{D}}{2}\right] & \text{si } a \equiv 1 \pmod 2, \\ \left[\dfrac{a}{4}, \dfrac{b+\sqrt{D}}{2}\right] & \text{si } a \equiv 0 \pmod 4, \end{cases} \tag{2.6}$$

est un idéal primitif de O_D dont la classe

$$\theta(C) = C(\theta(I)) \tag{2.7}$$

ne dépend que de la classe C de I, et que, si les idéaux $I = [a, b + \sqrt{D}]$ et $I' = [a', b' + \sqrt{D}]$, vérifiant $a \equiv a' \equiv 1 \pmod 2$, sont équivalents, alors

$$\text{pour tout } \lambda \in Q(\sqrt{D}) \text{ tel que } I' = \lambda I \text{ on a } \theta(I') = \lambda\theta(I). \tag{2.8}$$

D'autre part on sait (voir [2], §256, VI, ou [9], §151) que l'application de $H_+(4D)$ dans $H_+(D)$ définie par $C \to \theta(C)$ est un homomorphisme surjectif et que

$$\begin{aligned} &\operatorname{card}(\operatorname{Ker}\theta) \\ &= \begin{cases} 1 \;\Leftrightarrow \text{(1.1) a des solutions où } Y \text{ est impair ou } D \equiv 1 \pmod 8, \\ 2 \;\Leftrightarrow \text{(1.1) n'a pas de solution où } Y \text{ est impair et } D \equiv 0 \pmod 4, \\ 3 \;\Leftrightarrow \text{(1.1) n'a pas de solution impaire et } D \equiv 5 \pmod 8, \end{cases} \end{aligned} \tag{2.9}$$

et

$$
(2.10)\qquad \begin{cases} (1.1) \text{ a des solutions impaires et } D \equiv 1 \pmod 4 \\ \qquad \Leftrightarrow \varepsilon_{4D}^{+} = (\varepsilon_{D}^{+})^3, \\ (1.1) \text{ a des solutions où } Y \text{ est impair et } D \equiv 0 \pmod 4 \\ \qquad \Leftrightarrow \varepsilon_{4D}^{+} = (\varepsilon_{D}^{+})^2, \\ (1.1) \text{ n'a pas de solution où } Y \text{ est impair} \\ \qquad \Leftrightarrow \varepsilon_{4D}^{+} = \varepsilon_{D}^{+}. \end{cases}
$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat plus général que le Théorème 1 que nous obtenons.

THÉORÈME 2. *Soit C une classe d'idéaux au sens strict de discriminant $4D$, L le nombre des idéaux 0-réduits de C et L^* le nombre des idéaux 0-réduits de la classe $\theta(C)$.*

(a) *Si* (1.1) *n'a pas de solution où Y est impair*,

$$L^*/2 \le L \le 2L^*.$$

(b) *Si $D \equiv 1 \pmod 4$ et si* (1.1) *a des solutions impaires*,

$$3L^* < L \le 4L^*.$$

(c) *Si $D \equiv 0 \pmod 4$ et si* (1.1) *a des solutions où Y est impair*,

$$L^* < L \le 3L^*.$$

Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 1. (i) *Soit $\varphi = (b+\sqrt{D})/a$ un nombre de discriminant $4D$. Si $a \equiv 1$, $b \equiv D \pmod 2$ les nombres $\varphi/2$ et $-2/\varphi$ sont de discriminant D.*

Si $a \equiv 1$, $b \not\equiv D \pmod 2$ les nombres $(\varphi+1)/2$ et $-2/(\varphi+1)$ sont de discriminant D.

Si $a \equiv 0 \pmod 4$ le nombre 2φ est de discriminant D.

(ii) *Soit $\omega = (b+\sqrt{D})/(2a)$ un nombre de discriminant D, avec $D = b^2+4ac$.*

Si $D \equiv 5 \pmod 8$ les nombres $\omega/2$ et $-2/\omega$ sont de discriminant $4D$.

Si $D \equiv 0 \pmod 4$ les nombres $\omega/2$ et $-2/\omega$ sont de discriminant $4D$ si, et seulement si, $c \equiv 1 \pmod 2$.

Démonstration. (i) Si $b \not\equiv D \pmod 2$ on remplace b par $b-a$. Alors $D = b^2+ac$ s'écrit $D = b^2 + a(4c')$ avec $(a,b,c') = 1$ si $a \equiv 1 \pmod 2$, et $D = b^2 + (4a')c$ avec $(a',b,c) = 1$ si $a = 4a'$. Tenant compte de ce que les nombres λ et $-1/\lambda$ sont équivalents, ceci prouve (i).

(ii) Quand $D \equiv 5 \pmod 8$ l'égalité $D = b^2+4ac$ montre que $a \equiv c \equiv 1 \pmod 2$. Comme on a $(a,b,c) = 1$ on voit que

$$\frac{\omega}{2} = \frac{2b+\sqrt{4D}}{2\cdot 4a}, \quad 4D = (2b)^2 + 4(4a)c, \quad (4a,2b,c) = 1 \Leftrightarrow c \equiv 1 \pmod 2,$$

ce qui montre que $\omega/2$, et aussi $-2/\omega$, sont de discriminant $4D$ si, et seulement si, $c \equiv 1 \pmod 2$ et prouve (ii).

Lemme 2. *Toute classe au sens strict contient des idéaux* 1*-réduits.*

Démonstration. Toute classe C au sens large contient une période P_1 d'idéaux 1-réduits et deux idéaux consécutifs de P_1 ne sont pas strictement équivalents. Si les classes au sens large et au sens strict coïncident, la classe C contient tous les idéaux de P_1. Sinon la classe C est formée de deux classes au sens strict, C' et C'', et les idéaux de P_1 sont alternativement dans C' et dans C''. Ceci prouve le Lemme 2.

3. Application ψ et démonstration des Théorèmes 1(b), 1(c), 2(b) et 2(c). Soit E l'ensemble des idéaux 0-réduits de discriminant $4D$ et E^* l'ensemble des idéaux 0-réduits de discriminant D. Nous posons $N = \mathrm{card}(E)$, $N^* = \mathrm{card}(E^*)$ et désignons par N_1^* le nombre des idéaux 1-réduits de discriminant D.

Soit $I = a[1, \varphi]$ un idéal 0-réduit de discriminant $4D$ où $\varphi = (b + \sqrt{D})/a$ est supposé 0-réduit. Comme $D = b^2 + ac \equiv 0$ ou $1 \pmod 4$ on a soit $a \equiv 1 \pmod 2$, soit $a \equiv 0 \pmod 4$ et $b \equiv D \pmod 2$. Nous définissons une partition de E en trois sous-ensembles E_1, E_2 et E_4 et une application ψ de E dans E^* par ses restrictions ψ_1, ψ_2, ψ_4 à chacun de ces sous-ensembles comme suit :

$$\left\{\begin{array}{ll} E_1 : a \equiv 1,\ b \equiv D \pmod 2, & \psi_1(I) = I(-2/\varphi), \\ E_2 : a \equiv 1,\ b \not\equiv D \pmod 2, & \psi_2(I) = I(-2/(\varphi+1)), \\ E_4 : a \equiv 0,\ b \equiv D \pmod 2, & \psi_4(I) = I(2\varphi). \end{array}\right. \tag{3.1}$$

Proposition 1. *L'idéal $\psi(I)$ est un idéal de discriminant D, 0-réduit, et vérifie $C(\psi(I)) = \theta(C(I))$.*

Démonstration. D'après le Lemme 1(i) le discriminant de $\psi(I)$ est D.

La définition 1 pour $\lambda = 0$ permet de montrer que $\psi(I)$ est 0-réduit. En effet,

- si $I \in E_1$ alors
$$\frac{-2}{\varphi} > -2 \quad \text{et} \quad \frac{2}{\overline{\varphi}} > 2 \quad \text{donc} \quad \left[\frac{-2}{\varphi}\right] + \frac{2}{\overline{\varphi}} > 0,$$
- si $I \in E_2$ alors
$$\frac{-2}{\varphi+1} > -1 \quad \text{et} \quad \frac{2}{\overline{\varphi}+1} > 1 \quad \text{donc} \quad \left[\frac{-2}{\varphi+1}\right] + \frac{2}{\overline{\varphi}+1} > 0,$$
- si $I \in E_4$ alors
$$[2\varphi] - 2\overline{\varphi} \geq 2[\varphi] - 2\overline{\varphi} > 0.$$

Pour compléter la démonstration de la Proposition 1 il suffit de remarquer que, d'après [8], Proposition 3, on a $I(-1/\lambda) = \overline{\lambda} I(\lambda)$ d'où

$$\psi_1(I) = \frac{\overline{\varphi}}{2}\theta(I), \quad \psi_2(I) = \frac{\overline{\varphi}+1}{2}\theta(I), \quad \psi_4(I) = \theta(I), \tag{3.2}$$

et, comme le nombre φ est 0-réduit, on a $N(\overline{\varphi}/2) > 0$ et $N((\overline{\varphi}+1)/2) > 0$.

Nous calculons maintenant le nombre $\operatorname{card}(\psi^{-1}(J))$ pour $J \in E^*$.

Proposition 2. (a) *Si $D \equiv 5 \pmod 8$ l'application ψ est surjective. L'image réciproque d'un idéal $J \in E^*$ a 4 éléments si J est réduit et a 3 éléments si J n'est pas réduit.*

(b) *Si $D \equiv 0 \pmod 4$ soit $J = I(\omega)$ où $\omega = (b+\sqrt{D})/(2a)$, avec $D = b^2 + 4ac$, est choisi 0-réduit. L'application ψ est surjective et*

$$\operatorname{card} \psi^{-1}(J) = \begin{cases} 4 & \text{si } a \equiv 0 \pmod 2 \textit{ et } J \textit{ est } 1\textit{-réduit}, \\ 3 & \textit{si } a \equiv 0 \pmod 2 \textit{ et } J \textit{ n'est pas } 1\textit{-réduit}, \\ 2 & \textit{si } a \equiv 1 \pmod 2 \textit{ et } J \textit{ est } 1\textit{-réduit}, \\ 2 & \textit{si } a \equiv 1 \pmod 2, c \equiv 0 \pmod 2 \textit{ et } J \textit{ n'est pas } 1\textit{-réduit}, \\ 1 & \textit{si } a \equiv c \equiv 1 \pmod 2 \textit{ et } J \textit{ n'est pas } 1\textit{-réduit}. \end{cases}$$

Corollaire ([6], Théorème 3). *Si $D \equiv 5 \pmod 8$, alors $N = 3N^* + N_1^*$.*

Démonstration de la Proposition 2. Soit $J = a[1, \omega]$ un idéal de E^* défini par un nombre ω choisi 0-réduit, c'est-à-dire tel que

$$0 < \overline{\omega} < 1 < \omega.$$

Nous commençons par le cas où $D \equiv 5 \pmod 8$, puis nous indiquerons les modifications à apporter quand $D \equiv 0 \pmod 4$. Nous cherchons l'image réciproque de l'idéal J successivement par ψ_1, ψ_2 et ψ_3. Dans tous les cas ci-dessous le Lemme 1(ii) montre que le discriminant des images réciproques trouvées est bien $4D$.

Les nombres 0-réduits φ tels que $J = \psi_1(I(\varphi))$ sont les nombres φ tels qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $-2/\varphi = \omega - n$, c'est-à-dire $\varphi = 2/(n-\omega)$ avec $0 < 2/(n-\overline{\omega}) < 1 < 2/(n-\omega)$. La dernière inégalité signifie que $n = [\omega]+1$ ou $[\omega]+2$ et les deux premières que $n > 2 + \overline{\omega}$. Donc $n = [\omega]+1$ convient pour $[\omega] - \overline{\omega} > 1$ et $n = [\omega]+2$ convient pour $[\omega] - \overline{\omega} > 0$, c'est-à-dire

$$\operatorname{card}(\psi_1^{-1}(J)) = \begin{cases} 1 & \text{si } J \text{ n'est pas réduit}, \\ 2 & \text{si } J \text{ est réduit}. \end{cases} \tag{3.3}$$

Les nombres 0-réduits φ tels que $J = \psi_2(I(\varphi))$ sont les nombres φ tels qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $-2/(\varphi+1) = \omega - n$, c'est-à-dire $\varphi = 2/(n-\omega) - 1$ avec $1 < 2/(n-\overline{\omega}) < 2 < 2/(n-\omega)$. La dernière inégalité montre que $n = [\omega]+1$ et les deux premières inégalités s'écrivent $0 < [\omega] - \overline{\omega} < 1$, ce qui montre que $n = 2$ et

$$\operatorname{card}(\psi_2^{-1}(J)) = \begin{cases} 1 & \text{si } J \text{ n'est pas réduit}, \\ 0 & \text{si } J \text{ est réduit}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Les nombres 0-réduits φ tels que $J=\psi_4(I(\varphi))$ sont les nombres φ tels que $\omega=2\varphi+n$, $n\in\mathbb{Z}$, dont $\psi_4^{-1}(J)$ est formé des idéaux I_1 associé à $\omega/2$ et I_2 associé à $(\omega+1)/2$. On a

$$\begin{aligned} I_1 \text{ est 0-réduit} &\Leftrightarrow \left[\frac{\omega}{2}\right]-\frac{\overline{\omega}}{2}>0 \Leftrightarrow \omega>2 \Leftrightarrow [\omega]-\overline{\omega}>1,\\ I_2 \text{ est 0-réduit} &\Leftrightarrow \left[\frac{\omega+1}{2}\right]-\frac{\overline{\omega}+1}{2}>0\\ &\Leftrightarrow \left[\frac{\omega+1}{2}\right]\geq 1 \Leftrightarrow \omega>1 \Leftrightarrow [\omega]-\overline{\omega}>0, \end{aligned}$$

ce qui montre que

$$\operatorname{card}(\psi_4^{-1}(J))=\begin{cases}1 & \text{si } J \text{ n'est pas réduit,}\\ 2 & \text{si } J \text{ est réduit.}\end{cases} \tag{3.5}$$

Les relations (3.3)–(3.5) prouvent la Proposition 2(a) et le Corollaire.

Si $D\equiv 0 \pmod 4$ on raisonne comme pour (a) en vérifiant en plus si les idéaux obtenus sont bien de discriminant $4D$, ce qui, d'après le Lemme 2(ii), est vrai si le coefficient $c=c(\omega+n)$ des nombres $\omega+n$ intervenant est impair. On vérifie facilement que

$$c(\omega+n)\equiv c+na \pmod 2$$

et, comme au moins un des nombres a, c est impair, on trouve le résultat (b) de la Proposition 2.

D é m o n s t r a t i o n d e s T h é o r è m e s 1(b) e t 2(b). Si $D\equiv 1 \pmod 4$ et si (1.1) a des solutions impaires alors $D\equiv 5 \pmod 8$ et, d'après (2.9), θ est une bijection. Donc pour toute classe C de O_{4D} et son image $\theta(C)$ on a $L=3L^*+L_1^*$, où L_1^* désigne le nombre des idéaux 1-réduits de $\theta(C)$. Tenant compte du Lemme 2 on voit que $0<L_1^*\leq L^*$, d'où $3L^*<L\leq 4L^*$, ce qui prouve les Théorèmes 1(b) et 2(b).

D é m o n s t r a t i o n d e s T h é o r è m e s 1(c) e t 2(c). Si $D\equiv 0 \pmod 4$ et si (1.1) a des solutions où Y est impair alors, d'après (2.9), θ est une bijection et d'après la Proposition 2(b) on voit d'abord que

$$L^*\leq L\leq 4L^*.$$

Comme d'après le Lemme 2 toute période contient des idéaux 1-réduits on a $L^*<L$. D'autre part, si J est un idéal tel que $\operatorname{card}(\psi^{-1}(J))=4$ alors l'idéal $J'=I(-1/\omega)=I((-b+\sqrt{D})/(2c))$ est l'idéal 0-réduit $\tau^{-1}(\omega)$ de la classe de J, distinct de J, dont le coefficient a, égal à c, est impair donc vérifie $\operatorname{card}(\psi^{-1}(J))\leq 2$, ce qui prouve que $L\leq 3L^*$ et achève la démonstration des Théorèmes 1(c) et 2(c).

R e m a r q u e. Les Théorèmes 1(c) et 2(c) peuvent se déduire de [3], Corollary 2.

4. Monotonie de l'application ψ et démonstration des Théorèmes 1(a) et 2(a). Le point essentiel est le résultat suivant qui indique comment l'idéal $\psi(I)$ avance dans sa période quand l'idéal 0-réduit I décrit la sienne.

PROPOSITION 3. *Soit I un idéal 0-réduit de discriminant $4D$, $\tau(I)$ son successeur défini par* (2.3). *On a*

$$\psi(\tau(I)) = \tau^n(\psi(I)) \qquad \textit{avec } n = 0, 1 \textit{ ou } 2, \tag{4.1}$$

$$\psi(\tau^2(I)) = \tau^m(\psi(I)) \qquad \textit{avec } 1 \le m \le 4. \tag{4.2}$$

Démonstration. Soit $I \in E$ un idéal 0-réduit de discriminant $4D$, φ le nombre 0-réduit associé, φ' le nombre associé à $\tau(I)$ de sorte que

$$\varphi = q - \frac{1}{\varphi'}, \quad \overline{\varphi} = q - \frac{1}{\overline{\varphi'}}, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad q \ge 2. \tag{4.3}$$

Posant $\varphi = (b + \sqrt{D})/a$ et $\varphi' = (b' + \sqrt{D})/a'$ on déduit de (4.3)

$$b' = -b - aq, \qquad D = b'^2 - aa'. \tag{4.4}$$

Tenant compte de ce que $D \equiv 0$ ou 1 (mod 4) et des parités de a, b, q, b', a' on vérifie que

$$\begin{cases} I \in E_1,\ q \text{ pair} & \Rightarrow \quad \tau(I) \in E_4, \\ I \in E_1,\ q \text{ impair} & \Rightarrow \quad \tau(I) \in E_2, \\ I \in E_2,\ q \text{ pair} & \Rightarrow \quad \tau(I) \in E_2, \\ I \in E_2,\ q \text{ impair} & \Rightarrow \quad \tau(I) \in E_4, \\ I \in E_4 & \Rightarrow \quad \tau(I) \in E_1. \end{cases} \tag{4.5}$$

Soient ω et ω' les nombres définissant $\psi(I)$ et $\psi(\tau(I))$ respectivement, donnés par les formules (3.1). Dans chacune des éventualités de (4.5) nous développons ω en fraction continue à l'entier supérieur et trouvons au bout de n pas ($n = 0$, 1 ou 2) un nombre congru modulo 1 à ω', définissant $\psi(\tau(I))$. Chaque pas du développement est indiqué par une flèche.

1) Cas $I \in E_1$: $\omega = -2/\varphi = -2\varphi'/(q\varphi' - 1)$.

• Si $q = 2$, $\omega' = 2\varphi'$:

$$\frac{-2\varphi'}{2\varphi' - 1} = -1 - \frac{1}{2\varphi' - 1} \to 2\varphi' - 1 = \omega' - 1; \qquad n = 1.$$

• Si q est pair, $q \ge 4$, $\omega' = 2\varphi'$:

$$\frac{-2\varphi'}{q\varphi' - 1} \to \frac{q\varphi' - 1}{2\varphi'} = \frac{q}{2} - \frac{1}{2\varphi'} \to 2\varphi' = \omega'; \qquad n = 2.$$

• Si q est impair, $\omega' = -2/(\varphi'+1)$:

$$\frac{-2\varphi'}{q\varphi'-1} \to \frac{q\varphi'-1}{2\varphi'} = \frac{q+1}{2} - \frac{\varphi'+1}{2\varphi'}$$
$$\to \frac{2\varphi'}{\varphi'+1} = 1 - \frac{2}{\varphi'+1} = 1+\omega'; \qquad n=2.$$

2) Cas $I \in E_2$: $\omega = \dfrac{-2}{\varphi+1} = \dfrac{-2\varphi'}{(q+1)\varphi'-1} \to \dfrac{(q+1)\varphi'-1}{2\varphi'}$ car $q \geq 2$, $\varphi' \geq 1$.

• Si q est pair, $\omega' = -2/(\varphi'+1)$:

$$\frac{(q+1)\varphi'-1}{2\varphi'} = \frac{q}{2} + 1 - \frac{\varphi'+1}{2\varphi'} \to \frac{2\varphi'}{\varphi'+1} = 2 - \frac{2}{\varphi'+1} = 2+\omega'; \qquad n=2.$$

• Si q est impair, $\omega' = 2\varphi'$:

$$\frac{(q+1)\varphi'-1}{2\varphi'} = \frac{q+1}{2} - \frac{1}{2\varphi'} \to 2\varphi' = \omega'; \qquad n=2.$$

3) Cas $I \in E_4$, $\omega' = -2/\varphi'$ et ω est 0-réduit :

$$\omega = 2\varphi = 2q - \frac{2}{\varphi'} = 2q + \omega'; \qquad n=0.$$

Comme dans tous les cas on a $0 \leq n \leq 2$ on voit que (3.1) et l'inégalité $m \leq 4$ de (3.2) sont vrais. D'autre part $n = 0$ seulement dans le cas où $I \in E_4$ et alors $\tau(I) \in E_1$, d'où $m \geq 1$. Ceci achève la démonstration de la Proposition 3.

Démonstration du Théorème 2(a). Soit C une classe d'idéaux de O_{4D}, I un idéal 0-réduit primitif de C. D'après (4.5), $a = N(I)$ où $a' = N(r(I))$ est impair, donc la période des idéaux 0-réduits de C contient au moins un idéal $I_0 = I(\varphi_0)$ tel que $I_0 \notin E_4$. Alors (2.6) et (3.1) montrent que

$$\psi(I_0) = \begin{cases} \dfrac{\overline{\varphi}_0}{2}\theta(I_0) & \text{si } I_0 \in E_1, \\ \dfrac{\overline{\varphi}_0+1}{2}\theta(I_0) & \text{si } I_0 \in E_2. \end{cases} \tag{4.6}$$

Comme $I_0 = \varepsilon_{4D}^{+} I_0$, on voit, d'après (2.8) et (4.6), que $\psi(I_0) = \varepsilon_{4D}^{+}\psi(I_0)$.

Supposons que (1.1) n'a pas de solution où Y est impair. D'après (2.10) on a $\varepsilon_D^{+} = \varepsilon_{4D}^{+}$, donc

$$\psi(I_0) = \varepsilon_D^{+}\psi(I_0), \tag{4.7}$$

ce qui signifie, tenant compte de (2.4) et (2.5), que, quand l'idéal I parcourt la période de C de I_0 à I_0, l'idéal $\psi(I)$ avance de $\psi(I_0)$ à $\psi(I_0)$. D'après la Proposition 3 quand l'idéal I avance d'un pas l'idéal $\psi(I)$ avance d'au plus deux pas, mais quand I avance de deux pas alors $\psi(I)$ avance d'au moins un pas, ce qui montre que

$$\frac{1}{2}L^*(C) \leq L(C) \leq 2L^*(C). \tag{4.8}$$

Ceci achève la démonstration du Théorème 2(a).

Démonstration du Théorème 1(a). La seule possibilité pour que $L(C) = 2L^*(C)$ est que la période de C soit formée d'idéaux successivement de types E_1 avec $q = 2$, E_4, E_1 avec $q = 2$, $E_4, \ldots$ Mais si l'on considère la classe principale, l'idéal $(1) = I(\sqrt{D})$ est 0-réduit de type E_1 avec $q > 2$ ou de type E_2, ce qui montre que, pour la classe principale, on a $L_0 < 2L_0^*$ et achève la démonstration du Théorème 1(a).

Références

[1] G. Eisenstein, *Aufgaben*, J. Reine Angew. Math. 27 (1844), 86–87; Werke I, Chelsea, New York, 1975, 111–112.

[2] C. F. Gauss, *Arithmetische Untersuchungen* (*Disquisitiones Arithmeticae*), Chelsea, New York, 1965.

[3] F. Halter-Koch and P. A. Leonard, *Negatively reduced ideals in orders of quadratic fields: even discriminants*, Colloq. Math. 69 (1995), 147–153.

[4] N. Ishii, P. Kaplan and K. S. Williams, *On Eisenstein's problem*, Acta Arith. 54 (1990), 323–345.

[5] P. Kaplan, *Idéaux k-réduits des ordres des corps quadratiques réels*, J. Math. Soc. Japan 47 (1995), 171–181.

[6] P. Kaplan et P. A. Leonard, *Idéaux négativement réduits d'un corps quadratique réel et un problème d'Eisenstein*, Enseign. Math. 39 (1993), 196–210.

[7] P. Kaplan et Y. Mimura, *Développement en fraction continue à l'entier le plus proche, idéaux α-réduits et un problème d'Eisenstein*, Acta Arith. 76 (1996), 285–304.

[8] P. Kaplan and K. S. Williams, *The distance between ideals in the orders of a real quadratic field*, Enseign. Math. 36 (1990), 321–358.

[9] P. G. Lejeune Dirichlet und R. Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Chelsea, New York, 1968.

[10] Y. Mimura, *On odd solutions of the equation* $X^2 - DY^2 = 4$, dans : Proc. Sympos. Analytic Number Theory and Related Topics, Gakushuin University, Tokyo, 1992, 110–118.

[11] D. B. Zagier, *Zetafunktionen und quadratische Körper*, Springer, Berlin, 1981.

Département de Mathématiques
Université de Nancy I
B.P. 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France
E-mail: kaplan@iecn-nancy.fr

Department of Mathematics
Osaka Electro-Communication University
Neyagawa, Osaka, Japon
E-mail: mimura@isc.osaka.ac.jp

Reçu le 6.5.1996 (2981)