

Meilleures approximations d'un élément du tore \mathbb{T}^2 et géométrie de la suite des multiples de cet élément

par

NICOLAS CHEVALLIER (Mulhouse)

1. Introduction. L'algorithme du développement en fraction continue d'un réel vérifie deux propriétés fondamentales, l'unimodularité ($p_n q_{n+1} - p_{n+1} q_n = \pm 1$), et la propriété de meilleure approximation diophantienne (cf. définition 1). En dimension supérieure ou égale à 2, il n'y a pas d'algorithme aussi satisfaisant car la suite des meilleures approximations dépend de la norme choisie ([L1]) et elle ne vérifie pas la propriété d'unimodularité ([L3]). Plusieurs approches sont possibles pour remplacer le développement en fraction continue en dimension supérieure à 2. On peut soit privilégier l'aspect algorithmique et l'unimodularité, soit étudier la suite des meilleures approximations sans chercher à la calculer explicitement. Beaucoup de travaux sont consacrés à la première approche. La seconde a été moins explorée. J. C. Lagarias est le premier à avoir étudié la suite des meilleures approximations pour elle-même ([L1]–[L3]). Citons aussi le travail de G. Szekeres et V. T. Sós ([Sz-Só]) et ajoutons que J. W. S. Cassels dans [Ca] introduit le développement en fraction continue au moyen de la suite des meilleures approximations. Nous avons adopté ce point de vue; nous rappelons des résultats de J. C. Lagarias et nous généralisons au tore \mathbb{T}^2 les deux résultats classiques suivants :

1. Pour tout $\Theta \in \mathbb{T}^1$ et $n \in \mathbb{N}$, $q_{n+1} \|q_n \Theta\| \geq 1/2$, où (q_n) désigne la suite des dénominateurs des réduites de Θ .
2. L'ensemble des $\Theta \in \mathbb{T}^1$ dont les coefficients du développement en fraction continue forment une suite bornée, est négligeable pour la mesure de Lebesgue.

Nous nous sommes aussi intéressés à l'extension de la propriété suivante :

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11J25, 11J70, 11J83, 11K55, 11K60.

Key words and phrases: best simultaneous diophantine approximation, continued fraction, metric theory, Voronoï diagram, Rokhlin tower.

Pour tout entier n , $\mathbb{T}^1 \setminus \{0, \Theta, \dots, n\Theta\}$ est la réunion de $n+1$ intervalles qui ont au plus trois longueurs distinctes.

Pour étendre cette propriété à \mathbb{T}^2 , on peut remplacer les intervalles par des régions de Voronoï (cf. définition 9). Des arguments simples montrent que le nombre de régions de Voronoï, distinctes à isométrie près, est lié au nombre de côtés d'une région de Voronoï (cf. proposition 15). Cela donne en dimension 1 une propriété voisine de celle des intervalles. Pour finir, on déduit des résultats précédents l'existence de tours de Rokhlin privilégiées associées aux translations de \mathbb{T}^2 .

2. Notations et rappels

A. On munit \mathbb{R}^d d'une norme et $\mathbb{T}^d = \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ de la distance quotient; on note p la projection de \mathbb{R}^d sur \mathbb{T}^d . Dans la suite, on aura le plus souvent $d = 2$ et parfois $d = 1$. On désignera toujours par θ un élément de \mathbb{R}^d et par Θ sa classe dans \mathbb{T}^d . On utilisera la notation standard $\|\Theta\|$ pour la distance dans \mathbb{T}^d entre 0 et Θ .

Remarque. Pour tout k dans \mathbb{N} et tout Θ dans \mathbb{T}^d on a $\|k\Theta\| \leq k\|\Theta\|$. Si $\|\theta\| = \|\Theta\|$ alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$ on a $\|p(\lambda\theta)\| \leq \|\lambda\theta\| = \lambda\|\theta\| = \lambda\|\Theta\|$.

DÉFINITION 1. Soit Θ dans \mathbb{T}^d . Appelons $q_n(\Theta)$ le n -ième entier q (s'il existe) tel que $\|q\Theta\| < \|k\Theta\|$ pour tous les k entiers compris entre 1 et $q-1$ ($q_1(\Theta) = 1$). Si θ a des coordonnées rationnelles la suite $q_n(\Theta)$ est finie. Si l'une des coordonnées est irrationnelle la suite est infinie. Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note simplement $q_n(\Theta)$ par q_n . Appelons aussi $r_n = r_n(\Theta) = \|q_n(\Theta)\|$. Nous dirons que q_n est le *dénominateur d'une meilleure approximation* ou plus simplement une *meilleure approximation*.

Remarque. Comme l'a déjà signalé J. C. Lagarias, il est clair que la suite (q_n) dépend de la norme choisie ([L1]).

Notations. $[x]$ désigne la partie entière du réel x . $|A|$ désigne la mesure de Lebesgue d'une partie A de \mathbb{R}^d ou \mathbb{T}^d .

Si A est une partie d'un espace métrique (X, d) , on appelle

$$r(A) = \inf\{d(x, y) : x \neq y \in A\} \quad \text{et} \quad e(A) = \sup\{d(x, A) : x \in X\}.$$

Pour $\Theta \in \mathbb{T}^d$ on pose $e(n, \Theta) = e(\{0, \Theta, \dots, n\Theta\})$. Les fonctions $r(A)$ et $e(A)$ sont des mesures de la répartition de A dans X .

Si n est un entier, $d(n)$, $\sigma(n)$ et $\phi(n)$ désignent les fonctions arithmétiques usuelles, c'est-à-dire

$$d(n) = \sum_{d|n} 1, \quad \sigma(n) = \sum_{d|n} d, \quad \phi(n) = \sum_{d \wedge n=1} 1.$$

Soient G un groupe et A une partie ou un élément de G , $\langle A \rangle$ désigne le groupe engendré par A .

B. Meilleures approximations et réseaux. De nombreuses inégalités sur les approximations diophantiennes simultanées sont obtenues à partir d'inégalités dans les réseaux. Cependant il faut en général introduire un réseau dans un espace de dimension plus grande. Les meilleures approximations permettent de ne pas augmenter la dimension. Si q_n est une meilleure approximation de $\Theta \in \mathbb{T}^d$, les points $0, \Theta, \dots, (q_n - 1)\Theta$ sont proches d'un sous-groupe de \mathbb{T}^d . Plus précisément, soit $\varepsilon_n \in \mathbb{R}^d$ tel que $q_n\Theta = p(\varepsilon_n)$ (rappelons que p est la projection de \mathbb{R}^d sur \mathbb{T}^d) et $r_n(\Theta) = \|\varepsilon_n\|$. Posons $\Theta_n = \Theta - p(\varepsilon_n/q_n)$.

LEMME 2. (1) Pour tout $k \in \{0, \dots, q_n\}$, $d(k\Theta, k\Theta_n) \leq r_n(\Theta)$.

(2) $2r_{n-1}(\Theta) \geq r(\langle \Theta_n \rangle) \geq r_{n-1}(\Theta)/2$.

Preuve. (1) $d(k\Theta, k\Theta_n) = \|kp(\varepsilon_n/q_n)\| \leq (k/q_n)\|\varepsilon_n\| \leq r_n(\Theta)$.

La preuve de (2) est simple, elle est contenu dans la démonstration de la proposition 2.2 de [Ch]. Si $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ est tel que $\|k\Theta_n\| = r(\langle \Theta_n \rangle)$ alors $\|(q_n - k)\Theta_n\| = r(\langle \Theta_n \rangle)$, on peut donc supposer $k \leq q_n/2$, d'où,

$$\begin{aligned} \|k\Theta_n\| = r(\langle \Theta_n \rangle) &= \|k(\Theta - p(\varepsilon_n/q_n))\| \geq \|k\Theta\| - k\|p(\varepsilon_n/q_n)\| \\ &\geq r(\langle \Theta \rangle) - \frac{k}{q_n}\|\varepsilon_n\| \geq r(\langle \Theta \rangle)/2. \end{aligned}$$

Enfin $r(\langle \Theta_n \rangle) \leq \|q_{n-1}\Theta_n\| \leq \|q_{n-1}\Theta\| + \|q_{n-1}(\Theta_n - \Theta)\| \leq r_{n-1}(\Theta) + r_n(\Theta)$. ■

Le lemme suivant n'est qu'une reformulation des résultats sur les réseaux de \mathbb{R}^2 muni de la norme euclidienne. La proposition 2.1 de [Ch] correspond au même résultat pour la norme sup.

LEMME 3. On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne. Soit $\Theta \in \mathbb{T}^2$ tel que $\text{card}(\langle \Theta \rangle) = q < \infty$. Alors, $\Lambda = p^{-1}(\langle \Theta \rangle)$ est un réseau de \mathbb{R}^2 et $\det \Lambda = 1/q$. De plus, il existe une base réduite (x, x') de ce réseau, c'est-à-dire telle que

$$\|x\| = r(\langle \Theta \rangle) \quad \text{et} \quad \|x'\| = \inf\{\|y\| : y \in \Lambda, y \text{ indépendant de } x\}.$$

Les inégalités vérifiées par les bases réduites montrent que

$$\sin(\widehat{x, x'}) \geq \sqrt{3}/2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{qr(\langle \Theta \rangle)} \leq \|x'\| \leq \frac{2}{\sqrt{3}qr(\langle \Theta \rangle)}.$$

COROLLAIRE 4. On munit \mathbb{R}^2 de la norme euclidienne. Pour tout Θ dans \mathbb{T}^2 , pour tout entier n on a

$$e(q_n - 1, \Theta) \leq \frac{4\sqrt{3}}{q_n r_{n-1}}.$$

Preuve. Appliquons le lemme 2 à Θ et le lemme 3 à Θ_n . On obtient

$$\begin{aligned} e(q_n - 1, \Theta) &\leq e(\langle \Theta_n \rangle) + r_n(\Theta) \leq e(\langle \Theta_n \rangle) + 2\|x\| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|x'\| + \|x\|) + 2\|x\| \leq 3\|x'\| \leq \frac{2\sqrt{3}}{q_n r(\langle \Theta_n \rangle)} \leq \frac{4\sqrt{3}}{q_n r_{n-1}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3. Quelques inégalités

A. Rappelons des inégalités bien connues de la dimension 1. Pour Θ dans \mathbb{T}^1 on a :

- 1) $q_{n+1} \geq q_n + q_{n-1}$,
- 2) $r_{n+2} \leq \frac{1}{2}r_n$,
- 3) $q_{n+1}r_n \leq 1$ et $(q_{n+1}r_n = 1 \Rightarrow q_{n+1}\Theta = 0)$,
- 4) $q_{n+1}r_n \geq 1/2$.

Les trois premières inégalités se transposent en dimension 2. Par contre, la quatrième n'est vraie que pour une sous-suite (cf. propositions 6 et 18). L'inégalité (i) de la proposition suivante est due à J. C. Lagarias ([L2]) et l'inégalité (ii) a été prouvée pour la norme euclidienne par J. C. Lagarias ([L4]). Elles reposent sur le principe des tiroirs. Des inégalités analogues, mais en général moins bonnes, sont vraies pour une norme quelconque.

PROPOSITION 5. *Soit $\theta \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.*

(1) *Si \mathbb{R}^2 est munit de la norme sup, alors*

$$(i) \quad q_{n+4} \geq 2q_{n+1} + q_n, \quad (ii) \quad r_{n+9} \leq \frac{1}{3}r_n, \quad (iii) \quad \forall n \geq 1, \quad q_{n+1}r_n^2 < 1.$$

(2) *Si \mathbb{R}^2 est muni d'une norme quelconque, alors $q_{n+1}r_n^2 \leq 16/v$ où v désigne l'aire de la boule unité de \mathbb{R}^2 .*

Preuve. (iii) L'inégalité $q_{n+1}r_n^2 \leq 1$ a été prouvée dans [Ch], elle vient simplement du fait que les intérieurs des boules $B(k\theta, r_n/2)$, $k = 0, \dots, q_{n+1} - 1$, sont disjoints. Prouvons l'inégalité stricte.

Si $q_{n+1}(\theta)r_n^2(\theta) = 1$, les boules $B(k\theta, r_n/2)$, $k = 0, \dots, q_{n+1} - 1$, recouvrent \mathbb{T}^2 . Leurs images réciproques par p forment donc un pavage \mathbb{P} de \mathbb{R}^2 . Ce pavage est constitué par des carrés de côté r_n (les boules associées à la norme sup sont carrées). Un tel pavage est nécessairement constitué de bandes parallèles à l'un des axes de coordonnées. Supposons que ces bandes soient parallèles à l'axe des x . Posons $Q = \sqrt{q_{n+1}} = 1/r_n$, Q est un entier car \mathbb{P} est invariant par translation verticale de 1 et l'épaisseur de chaque bande est r_n . Cela montre aussi que la deuxième coordonnée de θ est un multiple de $1/Q$ et que $Q\theta$ appartient à $\mathbb{T}^1 \times \{0\}$. Le pavage \mathbb{P} contient un carré centré en $(0, 0)$, un carré centré en $(0, 1)$ et un carré centré en $Q\theta$ et comme $Q\theta$ est sur l'axe des x , la première coordonnée de $Q\theta$ doit être un

multiple de $1/Q$. Les deux coordonnées de θ sont donc des multiples de $1/Q$, ce qui contredit $\theta \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.

(2) En utilisant l'équivalence des normes, on peut déduire de l'inégalité (iii) une inégalité du même type que l'inégalité 2), mais avec une constante ne faisant pas intervenir l'aire. Utilisons le lemme 2 avec $n + 1$ à la place de n .

$A = p^{-1}(\{0, \Theta_{n+1}, \dots, (q_{n+1} - 1)\Theta_{n+1}\})$ est un réseau de déterminant $1/q_{n+1}$, donc d'après le théorème de Minkowski la boule $B(0, 2/\sqrt{vq_{n+1}})$ contient au moins un point de A différent de 0. Or la distance d'un tel point à 0 est supérieure à $r_n/2$ d'après le lemme 2. ■

B. Dans ce paragraphe on munit \mathbb{R}^2 de la distance euclidienne. Soient Θ un élément du tore \mathbb{T}^2 et θ un de ses représentants dans \mathbb{R}^2 .

PROPOSITION 6. *Si $\mathbb{Z}\Theta$ est dense dans \mathbb{T}^2 alors il existe une infinité de n dans \mathbb{N} tels que*

$$r_{n-1}r_nq_{n+1} \geq 1/100.$$

La proposition résulte des 2 lemmes suivants.

LEMME 7. *Si il existe $Q \in \{q_n, \dots, q_{n+1}\}$ tel que $d(Q\Theta, \{0, \dots, q_n\Theta\}) > 6r_{n-1}$, alors $r_{n-1}r_nq_{n+1} \geq 1/32$.*

Preuve. Soient ε_n et θ_n tels que $\theta = \theta_n + \varepsilon_n/q_n$, $q_n\theta_n = 0$ et $\|\varepsilon_n\| = r_n$ (cf. lemme 2). Notons $G_n = \langle \theta_n \rangle$, $K_n = p^{-1}(G_n) = \mathbb{Z}\theta_n + \mathbb{Z}^2$.

L'idée de la démonstration est d'exploiter le réseau K_{n+1} . On va montrer que le premier minimum de ce réseau est de l'ordre de r_n et que le deuxième est de l'ordre de r_{n-1} .

Posons

$$\varepsilon' = \frac{\varepsilon_n}{q_n} - \frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}} \quad \text{et} \quad \varepsilon = q_n\varepsilon'.$$

On a $\|\varepsilon\| \leq r_{n-1} + r_n \leq 2r_n$. Soit $x_n \in K_n$ tel que $d(x_n, 0) = r(K_n)$; on a $d(x_n, 0) = r(K_n) = r(G_n) \leq 2r_{n-1}$. On a $Q = Aq_n + b$ où $0 \leq b < q_n$ et $A \geq 1$. De plus, si $q = aq_n + b$ avec $0 \leq a \leq A$, alors

$$q\theta_{n+1} = q(\theta_n + \varepsilon') = b\theta_n + aq_n\theta_n + aq_n\varepsilon' + b\varepsilon' = b\theta_{n+1} + a\varepsilon + aq_n\theta_n,$$

d'où

$$p(q\theta_{n+1}) = p(b\theta_{n+1} + a\varepsilon).$$

Soit B la bande $\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, b\theta_{n+1} + \mathbb{R}x_n) \leq 2r_{n-1}\}$.

1) Les points $b\theta_{n+1} + a\varepsilon$, $a = 0, \dots, A$, sont des points alignés de K_{n+1} , distants de $\|\varepsilon\|$, et $Q\theta_{n+1} = b\theta_{n+1} + A\varepsilon$ n'est pas dans B . En effet,

$$\begin{aligned} d(Q\theta_{n+1}, b\theta_n + \mathbb{R}x_n) + \|x_n\| &\geq d(Q\theta_{n+1}, b\theta_n + \mathbb{Z}x_n) \geq d(Q\theta_{n+1}, G_n) \\ &\geq d(Q\theta, G_n) - d(Q\theta, Q\theta_{n+1}) \\ &\geq d(Q\theta, G_n) - d(Q\theta, Q\theta_{n+1}), \end{aligned}$$

de plus chaque point de G_n est à une distance inférieure à r_n d'un point de $\{0, \dots, q_n \Theta\}$, donc

$$d(Q\Theta, G_n) - d(Q\theta, Q\theta_{n+1}) \geq d(Q\Theta, \{0, \dots, q_n \Theta\}) - r_n - r_{n+1} > 4r_{n-1}.$$

Le point $Q\theta_{n+1}$ n'est donc pas dans B . Comme $b\theta_{n+1}$ est dans B on en déduit que le vecteur $Q\theta_{n+1} - b\theta_n$ n'est pas parallèle à l'axe de la bande B , ainsi ε et x_n ne sont pas parallèles.

2) Notons D la droite $b\theta_n + \mathbb{R}x_n$. Alors $B \cap K_{n+1}$ rencontre toute boule de rayon $4r_{n-1}$ centrée sur cette droite:

$$\forall x \in D \exists y \in K_{n+1} \cap B, \quad \|x - y\| \leq 4r_{n-1}.$$

En effet, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b\theta_n + kx_n \in B(x, 2r_{n-1})$, donc il existe $i \in \{0, \dots, q_n\}$ et $P \in \mathbb{Z}^2$ tels que $i\theta_n + P = b\theta_n + kx_n \in B(x, 2r_{n-1})$; or

$$d(i\theta_n, i\theta_{n+1}) = i\|\varepsilon'\| \leq q_n \left\| \frac{\varepsilon_n}{q_n} - \frac{\varepsilon_{n+1}}{q_{n+1}} \right\| \leq 2r_{n-1},$$

donc $i\theta_{n+1} + P \in B(x, 4r_{n-1})$.

3) Montrons qu'il existe deux points P et P' de $K_{n+1} \cap B$ dont la distance est inférieure à $16r_{n-1}$ et tels que PP' ne soit pas parallèle à ε . En effet, grâce à 2) on peut construire une suite P_0, \dots, P_k, \dots de points $K_{n+1} \cap B$ telle que $r_n \leq d(P_k, P_{k+1}) \leq 16r_{n-1}$ et telle que le signe du produit scalaire $(P_{k+1} - P_k) \cdot x_n$ ne dépende pas de k . Comme ε n'est pas parallèle à l'axe de la bande B et comme la suite (P_k) ne sort pas de la bande B , il existe k tel que $P_k P_{k+1}$ ne soit pas parallèle à ε .

Soient λ_1 et λ_2 les deux minimas du réseau K_{n+1} . D'après 1), on a $\lambda_1 \leq \|\varepsilon\| \leq 2r_n$. Comme PP' est indépendant de ε , on a $\lambda_2 \leq 16r_{n-1}$, d'où $32r_n r_{n-1} \geq \lambda_1 \lambda_2 \geq \det K_{n+1} = 1/q_{n+1}$. ■

LEMME 8. Soit m tel que $q_m r_{m-1} r_{m-2} \leq 1/100$. Supposons que pour tout $n \geq m$ et tout $Q \in \{q_n, \dots, q_{n+1}\}$ on ait $d(Q\Theta, \{0, \dots, q_n \Theta\}) \leq 6r_{n-1}$. Alors $\mathbb{Z}\Theta$ n'est pas dense dans \mathbb{T}^2 .

Preuve. Reprenons les notations du lemme précédent et utilisons le lemme 3. Soit (x, x') une base réduite du réseau K_m . Appelons Π la projection sur la droite $\mathbb{R}x'$ parallèlement à x . Alors Π a une norme inférieure à $2/\sqrt{3}$, $\Pi(K_m) = \mathbb{Z}x'$ et

$$\|x'\| \geq \frac{1}{q_m r(K_m)} \geq \frac{1}{2q_m r_{m-1}} \geq 50r_{m-2} \quad (\text{lemmes 2 et 3}).$$

1) Pour tout $n \geq m$ on a

$$\Pi(K_{n+1}) \subset \{y \in \mathbb{R}x' : d(y, \Pi(K_n)) \leq (16/\sqrt{3})r_{n-1}\}.$$

En effet, soit $Q\theta_{n+1} + P \in K_{n+1}$ avec $P \in \mathbb{Z}^2$ et $Q \leq q_{n+1}$. D'après

l'hypothèse du lemme, il existe $P' \in \mathbb{Z}^2$ et $Q' \leq q_n$ tel que $d(Q\theta + P, Q'\theta + P') \leq 6r_{n-1}$; or $d(Q\theta_{n+1}, Q\theta) \leq r_{n+1}$ et $d(Q\theta, Q\theta_n) \leq r_n$, donc

$$d(Q\theta_{n+1} + P, Q'\theta_n + P') \leq 8r_{n-1}$$

et

$$d(\Pi(Q\theta_{n+1} + P), \Pi(Q'\theta_n + P')) \leq (16/\sqrt{3})r_{n-1}.$$

2) Soit H un sous-groupe de \mathbb{R} tel que tout point de H soit à une distance strictement inférieure à $1/3$ d'un point de \mathbb{Z} . Alors $H \subset \mathbb{Z}$.

3) En utilisant 1) et 2), on montre par récurrence que pour tout $n \geq m$ on a $\Pi(K_n) \subset \Pi(K_m)$. Ceci prouve que $\mathbb{Z}\theta$ n'est pas dense dans \mathbb{T}^2 . ■

4. Diagramme de Voronoï et isométries. Pour trouver un analogue en dimension supérieure à 2 de la propriété des intervalles de $\mathbb{T}^1 \setminus \{0, \dots, n\theta\}$, il faut d'abord trouver une partition naturelle associée à la suite $0, \theta, \dots, n\theta$. Nous avons choisi les régions de Voronoï associées aux sites $\{0, \dots, n\theta\}$. Le paragraphe A regroupe quelques remarques préliminaires à la démonstration de la proposition 15 qui donne une majoration du nombre de régions de Voronoï distinctes à isométrie près.

A. Soit (X, d) un espace métrique ayant la propriété suivante : si x et y sont deux points de X , alors il existe un chemin γ joignant x à y , défini sur $[0, 1]$, tel que pour tout $t \in [0, 1]$ on ait $d(x, \gamma(t)) + d(\gamma(t), y) = d(x, y)$. On appellera un tel chemin une *géodésique*.

Le tore \mathbb{T}^2 muni de la distance euclidienne possède cette propriété. Dans \mathbb{T}^2 les régions de Voronoï associées à un ensemble fini sont des polygones convexes. Le lemme 11 donne une condition suffisante pour que 2 régions soient voisines et le lemme 12 donne une condition suffisante pour qu'elles soient disjointes.

DÉFINITION 9. Soit E une partie de X . Pour un élément x de E , on définit la *région de Voronoï* associée à l'ensemble E et au site x par

$$V(E, x) = \{y \in X : \forall x' \in E, d(x, y) \leq d(x', y)\}.$$

LEMME 10. Soient $E \subset X$, $x \in E$, $y \in V(E, x)$ et γ une géodésique joignant x et y . Alors γ est inclus dans $V(E, x)$.

Preuve. Soient x' dans $E \setminus \{x\}$ et t dans $[0, 1]$. On a $d(x, \gamma(t)) = d(x, y) - d(y, \gamma(t)) \leq d(x', y) - d(y, \gamma(t)) \leq d(x', \gamma(t))$. ■

LEMME 11. Soient $E \subset X$, $x \in E$ et $x' \notin E$. Posons $E' = E \cup \{x'\}$. S'il existe $y \in V(E, x)$ tel que $d(x', y) \leq d(x, y)$ alors $V(E', x) \cap V(E', x') \neq \emptyset$.

Preuve. Soit γ une géodésique joignant x à y . D'après le lemme 10, pour tout $z \in E$ et tout $t \in [0, 1]$, $d(\gamma(t), z) \geq d(\gamma(t), x)$; or par continuité il existe $s \in [0, 1]$ tel que $d(\gamma(s), x') = d(\gamma(s), x)$, donc $\gamma(s) \in V(E', x) \cap V(E', x')$. ■

LEMME 12. Soient $x, x' \in E$. Si $d(x, x') > 2e(E)$ alors $V(E, x) \cap V(E, x') = \emptyset$.

Preuve. Sinon, il existe $y \in V(E, x) \cap V(E, x')$ et $d(x, x') \leq d(x, y) + d(y, x') \leq 2e(E)$. ■

B. Soit f une isométrie bijective de l'espace métrique X et x_0 un point de X . On note, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $x_n = f^n(x_0)$ et $E_q = \{x_0, \dots, x_q\}$. La remarque de base pour compter les régions de Voronoï à isométries près est le lemme suivant.

LEMME 13. (1) Soit $k \in \{0, \dots, q-1\}$. Si pour tout $x \in V(E_q, x_k)$, $d(x, x_k) \leq d(x_{-1}, x)$ alors $f(V(E_q, x_k)) \subset V(E_q, x_{k+1})$.

(2) Soit $k \in \{1, \dots, q\}$. Si pour tout $x \in V(E_q, x_k)$, $d(x, x_k) \leq d(x, x_{q+1})$ alors $f^{-1}(V(E_q, x_k)) \subset V(E_q, x_{k-1})$.

Preuve. (1) Soient $x \in V(E_q, x_k)$ et $n \in \{0, \dots, q\}$. On a $d(f(x), x_n) = d(x, x_{n-1}) \geq d(x, x_k) = d(f(x), x_{k+1})$, donc $f(x) \in V(E_q, x_{k+1})$.

(2) On applique (1) en changeant f en f^{-1} et x_0 en x_q . ■

LEMME 14. Soient

$$A^+ = \{k \in \{0, \dots, q-1\} : V(E_q \cup \{x_{-1}\}, x_k) \cap V(E_q \cup \{x_{-1}\}, x_{-1}) \neq \emptyset\},$$

$$A^- = \{k \in \{1, \dots, q\} : V(E_q \cup \{x_{q+1}\}, x_k) \cap V(E_q \cup \{x_{q+1}\}, x_{q+1}) \neq \emptyset\}.$$

Pour tout entier j compris entre 0 et q , le nombre d'éléments, distincts à isométries près, parmi $\{V(E_q, x_k) : k = 0, \dots, j\}$, est inférieur ou égal à

$$1 + \text{card}(A^+ \cap \{0, \dots, j-1\}) + \text{card}(A^- \cap \{1, \dots, j\}).$$

Preuve. Soient

$$M^+ = \{k \in \{0, \dots, j-1\} : f(V(E_q, x_k)) \text{ non inclus dans } V(E_q, x_{k+1})\},$$

$$M^- = \{k \in \{1, \dots, j\} : f^{-1}(V(E_q, x_k)) \text{ non inclus dans } V(E_q, x_{k-1})\}.$$

Montrons par récurrence sur $\text{card } M^+ + \text{card } M^-$ que le nombre d'éléments distincts à isométries près parmi $\{V(E_q, x_k) : k = 0, \dots, j\}$ est inférieur à $1 + \text{card } M^+ + \text{card } M^-$.

Supposons $\text{card } M^+ + \text{card } M^- = 0$. Comme f est bijective, on a pour tout k entre 0 et $j-1$, $f(V(E_q, k)) = V(E_q, k+1)$. Toutes les régions sont donc isométriques. Supposons $\text{card } M^+ + \text{card } M^- > 0$. Soit $j' = \max(\max M^-, \max M^+ + 1)$. Pour tout k dans $\{j', \dots, j-1\}$ on a $k+1 \notin M^-$ et $k \notin M^+$, donc $f(V(E_q, x_k)) = V(E_q, x_{k+1})$. On applique l'hypothèse de récurrence à $M^+ \cap \{0, \dots, j'-2\}$ et $M^- \cap \{1, \dots, j'-1\}$ en remarquant que l'un de ces deux ensembles a un cardinal inférieur à celui de M^+ ou M^- .

Pour finir montrons que $M^+ \subset A^+$ et $M^- \subset A^-$. Soit k dans M^+ . D'après le lemme 13 il existe x dans $V(E_q, x_k)$ tel que $d(x, x_k) > d(x, x_{-1})$, donc d'après le lemme 11, $V(E_q \cup \{x_{-1}\}, x_k)$ et $V(E_q \cup \{x_{-1}\}, x_{-1})$ se coupent. Ainsi $M^+ \subset A^+$, de même $M^- \subset A^-$. ■

Remarque. Le raisonnement précédent montre un résultat un peu plus précis que celui du lemme. Il existe une partition de l'intervalle $\{0, \dots, q\}$ en au plus $1 + \text{card } A^+ + \text{card } A^-$ sous-intervalles telle que si n et $n+1$ sont dans le même sous-intervalle alors $f(V(E_q, x_k)) = V(E_q, x_{k+1})$.

C. NOTATION. On munit \mathbb{R}^d de la norme euclidienne. Pour Θ dans \mathbb{T}^d et $0 \leq m \leq n$, $V(\Theta, n, m)$ désigne la région de Voronoï associée au site $m\Theta$ de l'ensemble $\{0, \Theta, \dots, n\Theta\}$. On note $\text{Is}(\Theta, n)$ le nombre de régions de Voronoï distinctes, à isométrie près, dans l'ensemble $\{V(\Theta, n, m) : m = 0, \dots, n\}$.

PROPOSITION 15. *Avec les notations du lemme 14, pour tout $\Theta \in \mathbb{T}^d$ et tout entier $q \geq 1$, on a $\text{Is}(\Theta, q) \leq \text{card}(A^-) + 1$. En d'autres termes, le nombre de régions de Voronoï déterminé par l'ensemble $\{0, \Theta, \dots, q\Theta\}$, distinctes à isométrie près, est majoré par le nombre de régions voisines de $V(\Theta, q+1, q+1)$, plus un.*

Preuve. Appelons s la symétrie $x \in \mathbb{T}^d \rightarrow -x \in \mathbb{T}^d$ et f la translation $x \rightarrow x + \Theta$. L'application $\phi = f^q s$ est une isométrie de \mathbb{T}^d . Comme $\phi(V(\Theta, q, m)) = V(\Theta, q, q-m)$, $\text{Is}(\Theta, q)$ est le nombre de régions distinctes à isométrie près dans l'ensemble $\{V(\Theta, q, m) : 0 \leq m \leq [q/2]\}$. De plus $\phi f = f^{-1} \phi$, l'application $m \rightarrow q-m$ est donc une bijection de A^+ sur A^- , donc

$$\text{card}(A^+ \cap \{0, \dots, [q/2]-1\}) + \text{card}(A^- \cap \{1, \dots, [q/2]\}) = \text{card } A^+ = \text{card } A^-.$$

On conclut en utilisant le lemme 14 avec $j = [q/2]$. ■

Appliquée à \mathbb{T}^1 , la proposition précédente donne un résultat très voisin de la propriété des trois intervalles. En dimension 1 une région de Voronoï a au plus deux voisines, d'où

COROLLAIRE 16. *Soit $\Theta \in \mathbb{T}^1$.*

(1) *On a pour tout entier q , $\text{Is}(\Theta, q) \leq 3$.*

(2) *Soient (a_n) la suite des coefficients du développement en fraction continue de Θ et (q_n) la suite des dénominateurs des réduites de Θ . Si $q = q_{n-1} + a_n q_n - 1$, avec $a \in \{1, \dots, a_{n+1}\}$, alors $\text{Is}(\Theta, q) = 2$.*

Dans \mathbb{T}^2 , une région de Voronoï peut avoir un nombre quelconque de voisines. On peut majorer ce nombre dans deux cas grâce à des résultats de [Ch] (dans [Ch] la norme considéré est celle du sup mais un changement de norme ne modifie que les "constantes"). La proposition 18 montre qu'il existe des $\Theta \in \mathbb{T}^2$ tels que $\limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Is}(\Theta, n) = \infty$.

COROLLAIRE 17. (1) *Pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^2$, on a $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Is}(\Theta, n) < \infty$.*

(2) *Si $\Theta \in \mathbb{T}^2$ est un nombre mal approximable, c'est-à-dire tel que*

$$c = \inf\{n\|n\Theta\|^2 : n \in \mathbb{N}^*\} > 0,$$

alors il existe une constante C ne dépendant que de c telle que $\text{Is}(\Theta, n) \leq C$ pour tout n .

Preuve. (1) D'après le théorème 4.1 de [Ch], on a pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^2$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} e(n, \Theta)/r(\{0, \Theta, \dots, n\Theta\}) = c < \infty.$$

Soit n tel que $e(n, \Theta)/r(\{0, \Theta, \dots, n\Theta\}) \leq a$. Le lemme 12 montre que les régions voisines de $V(\Theta, n, n)$ sont dans la boule de centre $n\Theta$ et de rayon $2e(n, \Theta)$, leurs nombre est donc inférieure à $(2e(n, \Theta))^2/(r(\{0, \Theta, \dots, n\Theta\})/2)^2 \leq 16a^2$. D'où d'après la proposition 15, $\text{Is}(\Theta, n-1) \leq 16a^2 + 1$.

(2) D'après le corollaire 7 de [Ch], il existe une constante c' ne dépendant que de c telle que $e(n, \Theta)/r(\{0, \Theta, \dots, n\Theta\}) \leq c'$ pour tout n . On conclut de la même manière que pour le (1). ■

Il reste une question naturelle : a-t-on $\liminf_{n \rightarrow \infty} \text{Is}(\Theta, n) < \infty$ pour tout $\Theta \in \mathbb{T}^2$?

5. Deux exemples

PROPOSITION 18. (1) *L'ensemble*

$$\{\Theta \in \mathbb{T}^2 : \liminf_{n \rightarrow \infty} r_{n-1}(\Theta)r_n(\Theta)q_{n+1}(\Theta) = 0\}$$

contient un G_δ dense.

(2) *L'ensemble $\{\Theta \in \mathbb{T}^2 : \limsup_{n \rightarrow \infty} \text{Is}(\Theta, n) = \infty\}$ contient un G_δ dense.*

Remarque. Cela montre en particulier que ces deux ensembles sont non vides.

Preuve de la proposition 18. (1) Soit ε un réel positif. Appelons V l'ensemble des $\Theta \in \mathbb{T}^2$ tels que

$$\inf\{r_{n-1}(\Theta)r_n(\Theta)q_{n+1}(\Theta) : n \geq 1\} < \varepsilon.$$

Considérons l'ensemble des $\theta \in \mathbb{R}^2$ dont l'une des composantes est irrationnelle et l'autre rationnelle; cet ensemble est dense dans \mathbb{R}^2 . Soit θ un élément de cet ensemble. On a $\sup\{r_n(\theta)q_{n+1}(\theta) : n \geq 1\} < \infty$, donc $r_{n-1}(\theta)r_n(\theta)q_{n+1}(\theta) < \varepsilon$ pour n assez grand. Fixons un tel n . Comme r_n et r_{n-1} dépendent continûment de Θ , l'inégalité $r_{n-1}(\Theta)r_n(\Theta)q_{n+1}(\Theta) < \varepsilon$ est valable sur un voisinage de θ . Ainsi V contient un ouvert dense. L'intersection des V , pour une suite de ε tendant vers 0, contient donc un G_δ dense.

(2) Soit N un entier. Appelons U l'ensemble des $\Theta \in \mathbb{T}^2$ tels que $\sup\{\text{Is}(\Theta, n) : n \geq 1\} \geq N$. Montrons que U contient un ouvert dense. Soient k un entier et $\theta = (2^{-k}, 3^{-k}) + \delta$ où $\delta = (10\varepsilon, \varepsilon)$ et ε est strictement positif. Posons $N_k = 2^k 3^k$. Le groupe engendré par la classe de $(2^{-k}, 3^{-k})$

dans \mathbb{T}^2 est $\{(a2^{-k}, b3^{-k}) : 0 \leq a < 2^k \text{ et } 0 \leq b < 3^k\}$, donc pour ε assez petit il existe $n \in \{0, \dots, N_k\}$ tel que $n\theta = (0, 3^{-k}) + n\delta + A$ où $A \in \mathbb{Z}^2$. Appelons P la projection orthogonale de $(0, 3^{-k}) + n\delta$ sur la droite $\mathbb{R}\delta$. On peut choisir ε suffisamment petit pour qu'il y ait au moins $2N$ multiples de δ dans le segment $]0, P[$. Choisissons $q = 2N_k N$. Il revient au même de considérer la situation dans \mathbb{R}^2 . Appelons E l'ensemble $\{m\theta : 0 \leq m \leq q\} + \mathbb{Z}^2$. Soit $j \in \{1, \dots, 2N - 1\}$. La projection de $V(E, jN_k\delta)$ dans \mathbb{T}^2 est $V(\Theta, q, jN_k)$. Le bord d'une région $V(E, jN_k\delta)$ est une ligne polygonale convexe et fermée. Par des raisonnements de géométrie élémentaire on montre que pour ε assez petit les propriétés suivantes sont vraies pour chaque $j \in \{1, \dots, 2N - 1\}$.

1) Il y a 3 côtes du bord de $V(E, jN_k\delta)$ qui sont consécutifs et qui sont inclus dans les médiatrices des segments $[j\delta, (j-1)\delta]$, $[j\delta, (0, 3^{-k}) + n\delta]$ et $[j\delta, (j+1)\delta]$.

2) L'angle entre la médiatrice du segment $[j\delta, (j-1)\delta]$ et la médiatrice du segment $[j\delta, (0, 3^{-k}) + n\delta]$ est une fonction strictement décroissante de j .

3) La médiatrice du segment $[j\delta, (j-1)\delta]$ et la médiatrice du segment $[j\delta, (j+1)\delta]$ sont parallèles.

Ces trois propriétés assurent qu'il y a au moins N régions distinctes à isométrie près parmi les régions $V(E, jN_k\delta)$, $j \in \{1, \dots, 2N - 1\}$. Ceci est valable pour tous les θ de la forme $\theta = (a2^{-k}, b3^{-k}) + \delta$ avec a impair et b non multiple de 3. Comme les régions de Voronoï dépendent continûment de θ , pour chaque k , l'ensemble U contient un voisinage de $\{(a2^{-k}, b3^{-k}) + \delta : a \text{ impair et } b \text{ non multiple de } 3\}$, U contient donc un G_δ dense. ■

6. Coefficients associés à la suite des meilleures approximations, majoration de ces coefficients. Les coefficients (a_n) du développement en fraction continue de $\Theta \in \mathbb{T}^1$ vérifient les relations suivantes :

$$a_{n+1} = [q_{n+1}/q_n] = [r_{n-1}/r_n].$$

Pour $\Theta \in \mathbb{T}^2$ il n'y a pas de tels coefficients mais en remplaçant les a_n par $[r_{n-1}/r_n]$ on peut étendre à \mathbb{T}^2 le résultat classique suivant.

Pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^1$, la suite des coefficients du développement en fraction continue est non bornée.

THÉORÈME 19. *Pour presque tout $\Theta \in \mathbb{T}^2$, $M(\Theta) = \sup\{r_{n-1}(\Theta)/r_n(\Theta) : n \geq 2\} = \infty$.*

P r e u v e. Nous supposons que \mathbb{R}^2 est muni de la norme sup. La démonstration pour une norme quelconque s'obtient en modifiant les constantes dans les inégalités. Notons

$$A = \{\Theta \in \mathbb{T}^2 : M(\Theta) = \infty\},$$

et T l'endomorphisme défini par $T : x \in \mathbb{T}^2 \rightarrow 2x \in \mathbb{T}^2$. Soient α un réel strictement positif et (β_n) une suite de réels strictement positifs plus petits que 1 et $\alpha/2$, qui décroît vers 0. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soient

$$\begin{aligned} G(n) &= p(\{(k/n, k'/n) : k, k' \in \mathbb{N}\}), \\ B(n) &= \{a \in G(n) : \text{ordre}(a) = n, r(\langle a \rangle) \geq \alpha n^{-1/2}\}, \\ E(n) &= \{x \in \mathbb{T}^2 : d(x, B(n)) \leq \beta_n n^{-3/2}\}. \end{aligned}$$

Comme T est ergodique, pour prouver que A est de mesure 1, il suffit de montrer que A est un ensemble T -invariant de mesure strictement positive. On montre successivement :

- (1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} E(n) \subset A$,
- (2) pour un bon choix de α et de (β_n) , l'ensemble $\limsup_{n \rightarrow \infty} E(n)$ est de mesure strictement positive,
- (3) $T(A) \subset A$.

Preuve de (1). Soit $x \in E(n)$. Si $y \in B(n)$ est tel que $d(x, y) \leq \beta_n n^{-3/2}$, alors $\|nx\| \leq \beta_n n^{-1/2}$ car $ny = 0$ et pour $m < n$ on a

$$\begin{aligned} \|mx\| &= \|m(y + x - y)\| \geq \|my\| - \|m(x - y)\| \geq \alpha n^{-1/2} - m\|x - y\| \\ &\geq \alpha n^{-1/2} - \beta_n n^{-1/2} \geq (\alpha - \beta_n)\{\|nx\|/\beta_n\} \geq (\alpha/2)\{\|nx\|/\beta_n\}. \end{aligned}$$

Ainsi n est une meilleure approximation de x et

$$M(x) \geq \inf\{\|mx\|/\|nx\| : m < n\} \geq 1/(2\beta_n).$$

Cela montre que $\limsup_{n \rightarrow \infty} E(n) \subset A$.

Preuve de (2)

LEMME 20 ([Sp], p. 17). *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(\Omega) < \infty$ et $A_q \in \mathcal{A}$ une suite de parties de Ω telle que*

$$\sum_{q=1}^{\infty} \mu(A_q) = \infty.$$

Alors,

$$\mu(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n) = \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{(\sum_{1 \leq q \leq m} \mu(A_q))^2}{\sum_{1 \leq p, q \leq m} \mu(A_p \cap A_q)}.$$

LEMME 21 ([Sp], p. 52). *Pour r entier notons T_r l'application $x \rightarrow rx$ de \mathbb{T}^1 dans lui même. Soient A et B deux intervalles de \mathbb{T}^1 , et p et q deux entiers. On a*

$$|T_p^{-1}A \cap T_q^{-1}B| = |A| \cdot |B| + O\left(|A| \frac{p \wedge q}{p}\right),$$

où O ne dépend pas des intervalles A et B et des entiers p et q .

LEMME 22 ([H-W]). (1) Pour tout $\varepsilon > 0$, $d(n) = O(n^\varepsilon)$.

(2) On a

$$\sum_{n=1}^N \sigma(n) = O(N^2), \quad \sum_{n=1}^N \phi(n) \geq AN^2$$

où A ne dépend pas de N .

LEMME 23 ([Ch], lemme 4.3). On a

$$\text{card } B(n) \geq n\phi(n) - 4\alpha^2\sigma(n)\phi(n) - 2\alpha d(n)\phi(n)n^{1/2}.$$

Utilisons le lemme 20 avec $A_n = E(n)$. Notre but est de prouver que pour un bon choix de la suite (β_n) , on a

$$\sum_{p \geq 1} |E(p)| = \infty \quad \text{et} \quad \sum_{1 \leq p, q \leq N} |E(p) \cap E(q)| \leq C \left\{ \sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| \right\}^2$$

où C ne dépend pas de N .

1) D'après le lemme 23, on a

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| &\geq \text{card } E(p)(2\beta_p p^{-3/2})^2 \\ &\geq 4 \sum_{1 \leq p \leq N} \beta_p^2 p^{-3} (p\phi(p) - 4\alpha^2\sigma(p)\phi(p) - 2\alpha d(p)\phi(p)p^{1/2}), \end{aligned}$$

et comme $\phi(p) \leq p$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| &\geq \sum_{1 \leq p \leq N} \beta_p^2 p^{-3} (p\phi(p) - 4\alpha^2\sigma(p)p - 2\alpha d(p)p^{3/2}) \\ &\geq \sum_{1 \leq p \leq N} \beta_p^2 p^{-2} (\phi(p) - 4\alpha^2\sigma(p) - 2\alpha d(p)p^{1/2}). \end{aligned}$$

Posons $D(q) = \beta_q^2 q^{-2} - \beta_{q+1}^2 (q+1)^{-2}$. Une transformation d'Abel et le lemme 22 montrent que

$$\sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| \geq \sum_{1 \leq p \leq N-1} D(p)(Ap^2 - \alpha O(p^2)).$$

Choisissons α suffisamment petit pour que $Ap^2 - \alpha O(p^2) \geq cp^2$ où c est une constante strictement positive. On a alors

$$\sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| \geq c \sum_{1 \leq p \leq N-1} D(p)p^2.$$

2) Soit I_p l'intervalle $[-\beta_p p^{-1/2}, \beta_p p^{-1/2}]$. On a $E(p) \subset \{T_p^{-1}(I_p)\}^2$. D'où, d'après le lemme 21,

$$\begin{aligned}
|E(p) \cap E(q)| &\leq |\{T_p^{-1}(I_p)\}^2 \cap \{T_q^{-1}(I_q)\}^2| = |\{T_p^{-1}(I_p) \cap T_q^{-1}(I_q)\}^2| \\
&\leq \left\{ |I_p| \cdot |I_q| + O\left(\min\left(|I_p| \frac{p \wedge q}{p}, |I_q| \frac{p \wedge q}{q} \right) \right) \right\}^2 \\
&\leq \{|I_p| \cdot |I_q|\}^2 + O\left(\min\left(|I_p| \frac{p \wedge q}{p}, |I_q| \frac{p \wedge q}{q} \right) \right)^2 \\
&\quad + 2|I_p| \cdot |I_q| O\left(\min\left(|I_p| \frac{p \wedge q}{p}, |I_q| \frac{p \wedge q}{q} \right) \right) \\
&\leq 2\{|I_p| \cdot |I_q|\}^2 + 2O\left(\min\left(|I_p| \frac{p \wedge q}{p}, |I_q| \frac{p \wedge q}{q} \right) \right)^2.
\end{aligned}$$

Estimons les deux termes de cette dernière expression, après sommation sur $1 \leq p, q \leq N$.

3) On a

$$\sum_{1 \leq p, q \leq N} (|I_p| \cdot |I_q|)^2 = \left\{ \sum_{1 \leq q \leq N} |I_q|^2 \right\}^2 = \left\{ \sum_{1 \leq q \leq N} q^{-1} \beta_q^2 \right\}^2.$$

4) De plus,

$$\begin{aligned}
&\sum_{1 \leq p \leq q \leq N} O\left(\min\left(|I_p| \frac{p \wedge q}{p}, |I_q| \frac{p \wedge q}{q} \right) \right)^2 \\
&\leq \sum_{1 \leq p \leq q \leq N} O\left(|I_q| \frac{p \wedge q}{q} \right)^2 \leq \sum_{1 \leq p \leq q \leq N} O\left(\beta_q q^{-1/2} \frac{p \wedge q}{q} \right)^2 \\
&= O\left(\sum_{1 \leq p \leq q \leq N} (\beta_q q^{-3/2} p \wedge q)^2 \right) \leq O\left(\sum_{1 \leq q \leq N} \beta_q^2 q^{-3} \sum_{1 \leq p \leq q} (p \wedge q)^2 \right) \\
&\leq O\left(\sum_{1 \leq q \leq N} \beta_q^2 q^{-3} \sum_{d|q} d^2 \sum_{k \leq q/d} 1 \right) \leq O\left(\sum_{1 \leq q \leq N} \beta_q^2 q^{-3} \sum_{d|q} d^2 q/d \right) \\
&\leq O\left(\sum_{1 \leq q \leq N} \beta_q^2 q^{-2} \sum_{d|q} d \right) \leq O\left(\sum_{1 \leq q \leq N} \beta_q^2 q^{-2} \sigma(q) \right).
\end{aligned}$$

Avec une transformation d'Abel et le lemme 22 on obtient

$$\sum_{1 \leq q \leq N} \beta_q^2 q^{-2} \sigma(q) = O\left(\sum_{1 \leq q \leq N-1} [\beta_q^2 q^{-2} - \beta_{q+1}^2 (q+1)^{-2}] q^2 \right) + \beta_N O(1).$$

Avec 1) cela montre

$$\sum_{1 \leq p, q \leq N} O\left(\min\left(|I_p| \frac{p \wedge q}{p}, |I_q| \frac{p \wedge q}{q} \right) \right)^2 = O\left(\sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| \right) + \beta_N O(1).$$

5) Choisissons $\beta_n = (\ln n)^{-1/2}$. On obtient $D(q) = q^{-3}(\ln q)^{-1}(2 + o(1))$. D'après 1) on a

$$\sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| \geq c \sum_{1 \leq p \leq N-1} D(p)p^2 \geq c' \sum_{1 \leq p \leq N-1} p^{-1}(\ln p)^{-1}$$

et

$$\sum_{p \geq 1} |E(p)| = \infty.$$

D'après 3) on a

$$\sum_{1 \leq p, q \leq N} (|I_p| \cdot |I_q|)^2 = \left(\sum_{1 \leq p \leq N-1} p^{-1}(\ln p)^{-1} \right)^2 = O\left(\left\{ \sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| \right\}^2 \right).$$

D'après 4) on a

$$\sum_{1 \leq p, q \leq N} O\left(\min\left(|I_p| \frac{p \wedge q}{p}, |I_q| \frac{p \wedge q}{q} \right) \right)^2 = O\left(\sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| \right).$$

Ces dernières estimations et 2) montrent que

$$\sum_{1 \leq p, q \leq N} |E(p) \cap E(q)| \leq C \left\{ \sum_{1 \leq p \leq N} |E(p)| \right\}^2,$$

ce qui achève la démonstration de la deuxième étape.

Preuve de (3). Soient $x \in A$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $r_n(x) \leq r_{n-1}(x)/2$. Nous avons

$$\|q_n(x)2x\| \leq 2\|q_n(x)x\| = 2r_n(x).$$

Soit m le plus grand entier tel que $q_m(2x) < q_n(x)/2$. Comme $q_{m+4}(2x) \geq 2q_{m+1}(2x)$ (cf. proposition 5), on a $q_{m+4}(2x) \geq q_n(x)$ et donc $r_{m+4}(2x) \leq \|q_n(x)(2x)\| \leq 2\|q_n(x)x\| = 2r_n(x)$. On a aussi $r_m(2x) = \|2q_m(2x)x\| \geq r_{n-1}(x)$, donc

$$r_m(2x)/r_{m+4}(2x) \geq r_{n-1}(x)/(2r_n(x)),$$

et pour un $k \in \{m, \dots, m+4\}$, $r_k(2x)/r_{k+1}(2x) \geq [r_{n-1}(x)/(2r_n(x))]^{1/4}$. Cela prouve que $M(2x) \geq (M(x)/2)^{1/4}$. ■

7. Tours de Rokhlin dans \mathbb{T}^2 . Soit f un automorphisme d'un espace mesuré (X, \mathcal{A}, μ) . Une *tour de Rokhlin* associée à f est une suite finie de parties mesurables A_1, \dots, A_n , deux à deux disjointes, telle que $f(A_i) = A_{i+1}$, $i = 1, \dots, n-1$. La propriété suivante est classique. Soit $\Theta \in \mathbb{T}^1$ telle que $\mathbb{Z}\Theta$ soit dense dans \mathbb{T}^1 . Pour tout entier pair n , \mathbb{T}^1 est la réunion de deux tours de Rokhlin disjointes. Posons $A_1 = [-r_{n+1}(\Theta), 0[$, $A_2 = [0, r_n(\Theta)[$,

$I_1 = \{0, \dots, q_n - 1\}$ et $I_2 = \{0, \dots, q_{n+1} - 1\}$. On a la partition

$$\mathbb{T}^1 = \left\{ \bigcup_{k \in I_1} (k\Theta + A_1) \right\} \cup \left\{ \bigcup_{k \in I_2} (k\Theta + A_2) \right\}.$$

Le diamètre des éléments de ces tours de Rokhlin tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Dans \mathbb{T}^2 , on a le théorème.

THÉORÈME 24. *Soit $\Theta \in \mathbb{T}^2$ de trajectoire dense. Il existe un entier m vérifiant : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un entier n , une partition de $\{0, \dots, n\}$ en m intervalles I_1, \dots, I_m , et des parties A_1, \dots, A_m de \mathbb{T}^2 tels que*

1) *les parties $k\Theta + A_i$, $i \in \{1, \dots, m\}$ et $k \in I_i$, sont disjointes et de diamètres inférieurs à ε ,*

2) *la mesure du complémentaire de la réunion de ces parties est inférieure à ε .*

Preuve. Montrons que l'on a soit $\liminf_{n \rightarrow \infty} e(n, \Theta)/r(n, \Theta) = c < \infty$, soit $M(\Theta) = \infty$. Supposons que pour tout k on ait $r_{k-1}(\Theta)/r_k(\Theta) \leq M < \infty$. D'après la proposition 6, il existe une partie infinie J de \mathbb{N} telle que pour tout k dans J on ait $r_{k-1}r_k q_{k+1} \geq 1/100$. Donc pour tout k dans J on a $q_{k+1}r_k^2 \geq 1/(100M)$. D'après le corollaire 4 on obtient

$$e(q_{k+1} - 1, \Theta) \leq (400/\sqrt{3})Mr_k(\Theta)$$

pour tout k appartenant à J , et donc

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{e(n, \Theta)}{r(n, \Theta)} \leq \liminf_{k \in J, k \rightarrow \infty} \frac{e(q_{k+1} - 1, \Theta)}{r_k(\Theta)} \leq (400/\sqrt{3})M.$$

1) Supposons $\liminf_{n \rightarrow \infty} e(n, \Theta)/r(n, \Theta) < c < \infty$. Soit n tel $e(n, \Theta)/r(n, \Theta) \leq c$. Le nombre de régions de Voronoï voisines de $V(\Theta, n, 0)$ est inférieure à $C = 16c^2$. D'après le lemme 14 et la remarque qui le suit, l'intervalle $\{0, \dots, n - 1\}$ est la réunion d'au plus $m = 2[C] + 1$ intervalles disjoints I_1, \dots, I_m tels que si k et $k + 1$ sont dans le même I_i alors $V(\Theta, k, n - 1) + \Theta = V(\Theta, k + 1, n - 1)$. On conclut en remarquant que $V(\Theta, k, n - 1)$, $k = 0, \dots, n - 1$, forment une partition de \mathbb{T}^2 et que le diamètre de ces régions tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

2) Supposons $M(\Theta) = \infty$. Soient n un entier, ε_n et $\theta_n \in \mathbb{R}^2$ tels que $\theta_n = \theta - \varepsilon_n/q_n$, $q_n\theta_n = 0$ et $\|\varepsilon_n\| = r_n(\Theta)$. Soit

$$A = \{x \in \mathbb{T}^2 : d(x, 0) \leq d(x, k\theta_n) - 2r_n, k = 1, \dots, q_n - 1\}.$$

Pour tous $k \in \{0, \dots, q_n - 1\}$ on a

$$k\Theta + A \subset V(\theta_n, k, q_n - 1).$$

En effet, si $x \in A$ alors pour $p \neq k$, $p \in \{0, \dots, q_n - 1\}$, on a

$$d(x + k\Theta, p\theta_n) \geq -d(x + k\Theta, x + k\theta_n) + d(x + k\theta_n, p\theta_n)$$

$$\begin{aligned} &\geq -r_n + d(x, (k-p)\Theta_n) \geq d(x, 0) + r_n \\ &= d(x + k\Theta, k\Theta) + r_n \geq d(x + k\Theta, k\Theta_n). \end{aligned}$$

Les parties $k\Theta + A$, $k = 0, \dots, q_n - 1$, sont donc disjointes. Lorsque r_{n-1}/r_n tend vers l'infini,

$$\frac{|A|}{|V(\Theta_n, 0, q_n - 1)|} \rightarrow 1,$$

en choisissant n convenablement on a donc

$$\left| \mathbb{T}^2 \setminus \bigcup_{k=0, \dots, q_n-1} (k\Theta + A) \right| \leq \varepsilon. \blacksquare$$

Références

- [Ca] J. W. S. Cassels, *An Introduction to Diophantine Approximation*, Cambridge Tracts in Math. and Math. Phys. 45, Cambridge Univ. Press, 1965.
- [Ch] N. Chevallier, *Distances dans la suite des multiples d'un point du tore à deux dimensions*, Acta Arith. 74 (1996), 47–59.
- [H-W] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed., Oxford University Press, 1971.
- [L1] J. C. Lagarias, *Some new results in simultaneous Diophantine approximation*, in: Proc. of the Queen's Number Theory Conference 1979, P. Ribenboim (ed.), Queen's Papers in Pure and Appl. Math. 54, 1980, 453–474.
- [L2] —, *Best simultaneous Diophantine approximations I. Growth rates of best approximations denominators*, Trans. Amer. Math. Soc. 272 (1982), 545–554.
- [L3] —, *Best simultaneous Diophantine approximations II. Behavior of consecutive best approximations*, Pacific J. Math. 102 (1982), 61–88.
- [L4] —, *Geodesic multidimensional continued fractions*, Proc. London Math. Soc. (3) 69 (1994), 464–488.
- [Sp] V. G. Sprindžuk, *Metric Theory of Diophantine Approximations*, V. H. Winston & Sons, Washington, D.C., 1979.
- [Sz-Só] G. Szekeres and V. T. Sós, *Rational approximation vectors*, Acta Arith. 49 (1988), 255–261.

Université de Haute Alsace
4, rue des Frères Lumière
68093 Mulhouse, France
E-mail: N.Chevallier@univ-mulhouse.fr

Reçu le 1.12.1995
et révisé le 20.3.1996

(2900)