ACTA ARITHMETICA
LXXVII.4 (1996)

Méthodes de crible et fonctions sommes des chiffres

par

E. FOUVRY (Orsay) et C. MAUDUIT (Marseille)

I. Introduction. Soit (c_n) une suite de nombres complexes, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ deux applications, qui à tout entier $q \geq 1$ associent deux ensembles $\mathcal{Q}(q)$ et $\mathcal{R}(q)$ de classes de congruences modulo q, vérifiant $\mathcal{Q}(q) \subset \mathcal{R}(q)$.

Par définition, on dira que le réel ϑ est un *exposant de répartition* (au sens fort) pour la suite (c_n), relativement aux fonctions $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$, si, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $A > 0$, on a, pour $x \geq 1$, l'égalité

$$\sum_{q<x^{\vartheta-\varepsilon}} \max_{y\leq x} \max_{a\in\mathcal{Q}(q)} \Bigg| \sum_{\substack{n<y \\ n\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} c_n - \frac{1}{|\mathcal{R}(q)|} \sum_{\substack{n<y \\ n\in\mathcal{R}(q)}} c_n \Bigg| = O_{\varepsilon,A}\Big(\Big(\sum_{n<x} |c_n|\Big)(\log 2x)^{-A}\Big), \tag{1.1}$$

avec les conventions que, si $\mathcal{Q}(q)$ est vide, le terme correspondant est nul et que $|\mathcal{E}|$ désigne le cardinal de l'ensemble $\mathcal{E}$.

L'égalité (1.1) est une façon d'apprécier l'harmonie de la répartition en moyenne de (c_n) dans les progressions arithmétiques. Le choix de la fonction $\mathcal{R}$ s'impose de lui-même pour mener à des situations intéressantes, les situations les plus connues étant $\mathcal{R}(q) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et $\mathcal{R}(q) = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, le terme correspondant dans (1.1) apparaît alors comme un terme principal dont l'étude est en général aisée.

Des expressions semblables à (1.1) apparaissent de façon cruciale dans des problèmes de crible, la suite (c_n) étant alors positive et les estimations obtenues étant très sensibles à la valeur de ϑ. L'estimation (1.1) n'est en fait nécessaire que pour un choix très particulier de $\mathcal{Q}$, à savoir $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_b$, où b est un entier fixé et la fonction $\mathcal{Q}_b$ est définie par $\mathcal{Q}_b(q) = \{b\}$ ou $\emptyset$, suivant que $(b, q) = 1$ ou $(b, q) > 1$. Enfin, signalons que si la suite (c_n) n'est pas trop anarchique et assez dense, il est possible, par un argument de découpage, d'insérer le terme $\max_{y\leq x}$ dans une expression (1.1) dont l'exactitude n'est connue que dans le cas particulier $y = x$ (voir [Gra], Lemma 6 et [Fo–T], paragraphe 3.1, par exemple).

Rappelons quelques cas de suites (c_n) où on sait que $\vartheta = 1$ est un exposant de répartition :

• $c_n = 1$ avec $\mathcal{Q}(q) = \mathcal{R}(q) = \mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$,

• $c_n = \mu^2(n)$, fonction caractéristique des nombres sans facteur carré, avec $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_b$ et $\mathcal{R}(q) = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, le symbole O de (1.1) dépendant alors de l'entier b choisi,

• c_n nombre de représentations de l'entier n comme somme de deux nombres premiers avec, par exemple, $\mathcal{Q}(q) = \{1\}$ et $\mathcal{R}(q) = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, ceci est une conséquence de l'inégalité de Cauchy–Schwarz et du Théorème de Barban–Davenport–Halberstam ([Iw], p. 213, par exemple).

A cette liste, il convient de rajouter le cas surprenant où c_n est le nombre de diviseurs de n : en effet, (1.1) est vrai pour $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_b$ et $\mathcal{R}(q) = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$, à condition d'exclure, dans la sommation sur q, l'intervalle $[x^{2/3-\varepsilon}, x^{2/3+\varepsilon}]$ ([Fo], Corollaire 5). Si on adopte une définition plus générale de l'exposant de répartition, on sait maintenant que la suite (c_n) nombre de représentations de l'entier n sous la forme $m^2 + a^2$ (avec m entier quelconque et $a \in \mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est une suite quelconque mais assez dense) a pour exposant de répartition 1 ([Fo–I]).

Il faut aussi rappeler que pour c_n fonction caractéristique des nombres premiers, la plus grande valeur de ϑ pour laquelle on sache que (1.1) est vrai pour $\mathcal{Q}(q) = \mathcal{R}(q) = (\mathbb{Z}/q\mathbb{Z})^*$ est $\vartheta = 1/2$ (théorème de Bombieri–Vinogradov) et qu'on pense que (1.1) est vrai pour $\vartheta = 1$ (conjecture d'Elliott–Halberstam).

L'objet de cet article est de donner des exemples de suites à exposant de répartition très proche de 1.

Soit $r \geq 2$ un entier, $s_r(n)$ la somme des chiffres dans le développement en base r de l'entier n. Nous nous intéressons à la répartition dans les progressions arithmétiques de la suite des entiers n, tels que $s_r(n)$ appartienne à une classe de congruence imposée.

Notre résultat principal est le

Théorème. *Soient $r \geq 2$, b et d des entiers tels que $(d, r-1) = 1$. Alors, pour $x \geq 1$, pour tout A et tout $\varepsilon > 0$, on a l'égalité*

$$\sum_{q < x^{\vartheta_r - \varepsilon}} \max_{y < x} \max_{1 \leq a \leq q} \Bigg| \sum_{\substack{n < y, s_r(n) \equiv b \,(\mathrm{mod}\, d) \\ n \equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 - \frac{1}{q} \sum_{n < y, s_r(n) \equiv b \,(\mathrm{mod}\, d)} 1 \Bigg| = O(x(\log 2x)^{-A}), \tag{1.2}$$

pour $\vartheta_r = 1 - \log M(r)/\log r$. Dans cet énoncé, la constante O dépend au plus de d, r, A et ε et la fonction $M(r)$ est définie par

$$M(r)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\cos\frac{2k+1}{4n}\pi},$$

ou

$$M(r)=\frac{1}{2n+1}\bigg(1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\cos\frac{k\pi}{2n+1}}\bigg),$$

suivant que r est pair $(r=2n)$ ou r impair $(r=2n+1)$.

Une étude précise de la constante $M(r)$ conduira, via le crible pondéré de Greaves, au

Corollaire 1. *Soient d et $r\geq 2$ deux entiers tels que $(d,r-1)=1$. Alors, pour tout entier b, on a pour $x\to\infty$ la minoration*

$$|\{n\leq x: s_r(n)\equiv b \pmod d,\ n=p_1 \ \textit{ou}\ n=p_1p_2\}|\gg\frac{x}{\log x}.$$

Nous verrons au paragraphe VI (voir (6.3)) que le point important de ce théorème est le fait que ϑ_r tende vers 1 lorsque $r\to\infty$. Le corollaire suivant est une application directe du crible de Bombieri, dans la version très agréable qu'en ont donnée Friedlander et Iwaniec [Fr–I2]. Rappelons que la *fonction généralisée de von Mangoldt* d'ordre k (k entier ≥ 1) est $\Lambda_k=(\log)^k*\mu$, et qu'elle a pour support l'ensemble des entiers ayant au plus k facteurs premiers. On prouve le

Corollaire 2. *Soient b, d, k et r des entiers vérifiant $k\geq 2$, $r\geq 2$ et $(d,r-1)=1$. Il existe alors $x_0=x_0(d,k,r)$ tel que pour $x\geq x_0$ on a l'égalité*

$$\sum_{n<x,s_r(n)\equiv b \,(\mathrm{mod}\, d)}\Lambda_k(n)=\frac{k}{d}\,x(\log x)^{k-1}\bigg(1+O\bigg(\frac{(\log\log r)^5}{\log r}\bigg)\bigg),$$

où la constante O dépend au plus de d et k.

Ce corollaire montre donc que plus la base r est grande, meilleur est l'encadrement de la somme étudiée.

II. Transformation du problème. Nous passons aux sommes trigonométriques en écrivant la fonction caractéristique des entiers n tels que $n\equiv a \pmod q$ et $s_r(n)\equiv b \pmod d$ sous la forme

$$\frac{1}{dq}\sum_{\xi^q=1}\sum_{\zeta^d=1}\xi^{n-a}\zeta^{s_r(n)-b}.$$

Soit $R_r(y;a,q;b,d)$ le terme apparaissant dans (1.2) à l'intérieur du symbole $|\cdot|$. Il devient

$$R_r(y;a,q;b,d) = \frac{1}{dq} \sum_{\substack{\xi^q=1 \\ \xi\neq 1}} \sum_{\zeta^d=1} \sum_{n<y} \xi^{n-a} \zeta^{s_r(n)-b}.$$

En écartant le terme $\zeta = 1$ dont la contribution est en $O(1/d)$, on a l'égalité

$$R_r(y;a,q;b,d) = \frac{1}{dq} \sum_{\substack{\xi^q=1 \\ \xi\neq 1}} \sum_{\substack{\zeta^d=1 \\ \zeta\neq 1}} T_r(y;a,\xi;b,\zeta) + O(1/d), \tag{2.1}$$

avec

$$T_r(y;a,\xi;b,\zeta) = \sum_{n<y} \xi^{n-a} \zeta^{s_r(n)-b}.$$

On peut supposer que y est un entier $\leq x$ que l'on décompose en base r sous la forme

$$y = \sum_{i=0}^{s} \varepsilon_i(y) r^i,$$

avec $\varepsilon_s(y) \geq 1$. Posons $y_s = \varepsilon_s(y) r^s$. En décomposant l'intervalle de sommation sur n on a l'égalité

$$T_r(y;a,\xi;b,\zeta) = T_r(y_s;a,\xi;b,\zeta) + \xi^{y_s} \zeta^{\varepsilon_s(y)} T_r(y-y_s;a,\xi;b,\zeta). \tag{2.2}$$

Dans (2.2), l'entier $y - y_s$ vérifie maintenant $\varepsilon_s(y-y_s) = 0$, donc cette formule se prête fort bien à une itération. En prenant les modules, l'égalité (2.1) devient

$$|R_r(y;a,q;b,d)| \leq \frac{1}{dq} \sum_{u\in\mathcal{X}} \sum_{\substack{\xi^q=1 \\ \xi\neq 1}} \sum_{\substack{\zeta^d=1 \\ \zeta\neq 1}} |T_r^*(u;\xi,\zeta)| + O(1/d), \tag{2.3}$$

où $\mathcal{X}$ désigne l'ensemble des entiers inférieurs à x de la forme kr^j avec $1 \leq k < r$ et $j \geq 0$ et où on a défini

$$T_r^*(u;\xi,\zeta) = \sum_{0\leq n<u} \xi^n \zeta^{s_r(n)}.$$

L'existence et l'unicité du développement en base r de tout entier n fournit l'égalité de factorisation

$$T_r^*(kr^N;\xi,\zeta) = \Big(\sum_{l=0}^{k-1} \zeta^l \xi^{lr^N}\Big) \prod_{0\leq n<N} \Big(\sum_{l=0}^{r-1} \zeta^l \xi^{lr^n}\Big), \tag{2.4}$$

pour N entier quelconque et $1 \leq k < r$. Dans l'expression (2.4), le premier facteur est plus petit que r en module. Puisque le nombre d'éléments de $\mathcal{X}$ est $O_r(\log x)$, en regroupant (2.3) et (2.4), on voit que la partie gauche de

(1.2) est en

$$O\Big(\log x\cdot \max_{\substack{\zeta^d=1\\ \zeta\neq 1}}\ \max_{N\le(\log x)/(\log r)}\ \sum_{q<x^{\vartheta_r-\varepsilon}} q^{-1}\sum_{\substack{\xi^q=1\\ \xi\neq 1}}\Big|\prod_{0\le n<N}\Big(\sum_{l=0}^{r-1}\zeta^l\xi^{lr^n}\Big)\Big|\Big) + O(x^{\vartheta_r-\varepsilon}). \tag{2.5}$$

En posant maintenant $\zeta=\exp(2\pi ij/d)$ et $\xi=\exp(2\pi ik/q)$ on a l'identité

$$\Big|\sum_{l=0}^{r-1}\zeta^l\xi^{lr^n}\Big| = \frac{\big|\sin\pi\big(\frac{j}{d}r+\frac{k}{q}r^{n+1}\big)\big|}{\big|\sin\pi\big(\frac{j}{d}+\frac{k}{q}r^n\big)\big|} = \Big|\varphi\Big(r^n\frac{k}{q},\frac{j}{d}\Big)\Big|,$$

avec

$$\varphi(\alpha,\beta)=\frac{\sin\pi r(\alpha+\beta)}{\sin\pi(\alpha+\beta)},$$

si $\alpha+\beta$ est non entier, et $\varphi(\alpha,\beta)=(-1)^{(\alpha+\beta)(r-1)}r$, dans le cas contraire.

Posons

$$F_N(\alpha,\beta)=\prod_{0\le n<N}\varphi(r^n\alpha,\beta). \tag{2.6}$$

Grâce à ces notations et à la relation (2.5), on voit que la preuve du Théorème se ramène à montrer que la relation

$$\sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{k=1}^{q-1}|F_N(k/q,j/d)| = O(Qx(\log 2x)^{-A}) \tag{2.7}$$

est exacte pour tout $Q\le x^{\vartheta_r-\varepsilon}$, pour tout $0<j<d$, pour tout $N\le(\log x)/(\log r)$ et pour tout A.

III. Étude de $\|F_N\|_\infty$. Nous aurons besoin du lemme suivant lors de la preuve du Théorème :

LEMME 1. *Soient r et d des entiers tels que $(d,r-1)=1$. Alors, il existe une constante absolue $M(r,d)<r$ telle que pour tout $N\ge 0$ et tout entier $0<j<d$, on ait la relation*

$$\|F_N(\cdot,j/d)\|_\infty = O_r(M(r,d)^N).$$

Signalons que cette relation est triviale pour $M(r,d)=r$ (puisque $|\varphi(\alpha,\beta)|\le r$) et qu'une étude plus élaborée conduit à des valeurs intéressantes de cette constante $M(r,d)$ et, ainsi, à des résultats sur la répartition dans une progression arithmétique fixée des entiers n tels que $s_r(n)\equiv b \pmod d$ (voir [Ge]).

D'après l'expression de la fonction F_N en produit de la fonction continue φ, on voit, en regroupant les termes deux par deux, que, pour démontrer ce lemme, il suffit de prouver l'inégalité

$$|\varphi(t,j/d)\varphi(rt,j/d)| < r^2,$$

pour tout t et tout $0 < j < d$. S'il existait un t tel que $|\varphi(t,j/d)\varphi(rt,j/d)| = r^2$, en revenant à l'écriture de $|\varphi|$ sous la forme

$$|\varphi(t,j/d)| = \Big|\sum_{l=0}^{r-1} \exp(2\pi i(lj/d + lt))\Big|,$$

on voit que t vérifierait simultanément les relations $j/d + t \equiv 0 \pmod 1$ et $j/d + rt \equiv 0 \pmod 1$, ce qui entraînerait $j(r-1)/d \equiv 0 \pmod 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse du Lemme 1 qui est ainsi démontré.

IV. Étude de $\|F_N\|_1$. L'objet de ce paragraphe est de majorer l'intégrale

$$I_N(r,\beta) = \int_0^1 |F_N(t,\beta)|\,dt,$$

uniformément par rapport à β, pour N et r tendant vers l'infini. En partant de la définition (2.6), en découpant l'intervalle d'intégration en intervalles de la forme $[k/r,(k+1)/r]$ puis en faisant le changement de variable $u = rt - k$, on parvient à l'égalité

$$I_N(r,\beta) = \int_0^1 \psi_1(t,\beta)|F_{N-1}(t,\beta)|\,dt \tag{4.1}$$

avec

$$\psi_1(t,\beta) = \frac{1}{r}\sum_{0\le k<r} \varphi\Big(\frac{t+k}{r},\beta\Big) = \frac{1}{r}\sum_{0\le k<r}\bigg|\frac{\sin\pi(t+r\beta)}{\sin\pi\big(\frac{t+k}{r}+\beta\big)}\bigg|.$$

Ce processus peut fort bien s'itérer, faisant apparaître des fonctions ψ_2, $\psi_3,\ldots$ construites par récurrence à partir de ψ_1; nous n'aurons pas besoin de ce processus qui a été exploité dans [Fo–M].

Posons

$$\Psi_r(u) = \frac{1}{r}\sum_{0\le k<r}\bigg|\frac{\sin\pi ru}{\sin\pi(u+k/r)}\bigg|.$$

La formule (4.1) conduit clairement à l'inégalité

$$I_N(r,\beta) \le \|\Psi_r\|_\infty I_{N-1}(r,\beta) \le \|\Psi_r\|_\infty^N. \tag{4.2}$$

L'étude de $\|F_N\|_1$ se ramène ainsi à celle de $\|\Psi_r\|_\infty$. La fonction $\Psi_r(u)$ est de période $1/r$, ceci nous autorise à n'étudier les valeurs de $\Psi_r(u)$ que pour $0 \le u \le 1/r$ où cette fonction a l'expression plus agréable

$$\Psi_r(u) = \frac{1}{r}\sum_{0\le k<r}\frac{\sin\pi ru}{\sin\pi(u+k/r)}, \tag{4.3}$$

où n'apparaissent que des termes positifs. Notre but est de rattacher la fonction Ψ_r à la fonction $M(r)$ définie dans le Théorème sous forme du

LEMME 2. *Pour tout entier $r \geq 2$, on a l'égalité*

$$\|\Psi_r\|_\infty = M(r).$$

Pour faire apparaître au numérateur et au dénominateur la même quantité, on écrit la formule (4.3) sous la forme

$$\Psi_r(u) = \frac{1}{r} \sum_{0 \leq k < r} (-1)^k \frac{\sin \pi r(u + k/r)}{\sin \pi(u + k/r)}, \tag{4.4}$$

puis la démonstration se scinde en deux cas suivant la parité de r.

(i) *Cas où $r = 2n$ est pair*. On écrit l'égalité

$$(-1)^k \frac{\sin \pi r(u + k/r)}{\sin \pi(u + k/r)} = 2(-1)^k \sum_{j=0}^{n-1} \cos\Big((2j+1)\Big(u + \frac{k}{2n}\Big)\pi\Big),$$

d'où l'égalité

$$\begin{aligned} r\Psi_r(u) &= 2 \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \sum_{j=0}^{n-1} \cos\Big((2j+1)\Big(u + \frac{k}{2n}\Big)\pi\Big) \\ &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \cos\Big((2j+1)\Big(u + \frac{k}{2n}\Big)\pi\Big), \end{aligned}$$

puis en utilisant la formule

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \cos(a + hk) = \frac{\cos\left(a + \frac{m-1}{2}h + \frac{m-1}{2}\pi\right) \sin\left(\frac{mh}{2} + \frac{m\pi}{2}\right)}{\cos \frac{h}{2}},$$

on parvient à l'égalité

$$\begin{aligned} r\Psi_r(u) &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\cos\big((2j+1)\pi u + \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2j+1}{2n}\pi + \frac{2n-1}{2}\pi\big) \sin\left(n\frac{(2j+1)\pi}{2n} + n\pi\right)}{\cos \frac{(2j+1)\pi}{4n}} \\ &= 2 \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\cos\big((2j+1)\big(u - \frac{1}{4n}\big)\pi\big)}{\cos \frac{2j+1}{4n}\pi}. \end{aligned}$$

On voit alors que pour $0 \leq u \leq 1/r$, la fonction $\Psi_r(u)$ est concave, et, puisqu'elle vérifie l'égalité $\Psi_r(u) = \Psi_r(1/r - u)$, elle atteint son maximum au point $u = 1/(4n)$, où elle vaut $M(r)$.

(ii) *Cas où $r = 2n + 1$ est impair*. On écrit l'égalité

$$(-1)^k \frac{\sin \pi r(u + k/r)}{\sin \pi(u + k/r)} = (-1)^k + 2(-1)^k \sum_{j=1}^{n} \cos\Big(2j\pi\Big(u + \frac{k}{2n+1}\Big)\Big),$$

d'où la relation

$$\begin{aligned} r\Psi_r(u) &= 1+2\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\cos\left(2j\pi\left(u+\frac{k}{2n+1}\right)\right)\\ &= 1+2\sum_{j=1}^{n}\frac{\cos\left(2j\pi u+n\frac{2j\pi}{2n+1}+n\pi\right)\sin\left(\frac{2n+1}{2}\cdot\frac{2j\pi}{2n+1}+\frac{2n+1}{2}\pi\right)}{\cos\frac{j\pi}{2n+1}}\\ &= 1+2\sum_{j=1}^{n}\frac{\cos\left(2j\pi\left(u-\frac{1}{4n+2}\right)\right)}{\cos\frac{j\pi}{2n+1}}. \end{aligned}$$

Écrite ainsi, la fonction $\Psi_r(u)$ est une somme de fonctions concaves sur $[0,1/r]$, symétrique par rapport à $u=1/(4n+2)$, où elle atteint donc son maximum. Ceci termine la preuve du Lemme 2.

V. Démonstration du théorème. Notre démarche est très proche de celle de [Fo–M]. Pour montrer la relation (2.7), on rend tout d'abord les fractions k/q irréductibles, d'où l'égalité

$$(5.1)\qquad \sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{k=1}^{q-1}|F_N(k/q,j/d)| = \sum_{\delta=1}^{2Q}\sum_{Q\delta^{-1}<q\le 2Q\delta^{-1}}\sum_{\substack{k=1\\(k,q)=1}}^{q-1}|F_N(k/q,j/d)|$$

$$:=\sum_{\delta=1}^{2Q}G_N(Q\delta^{-1},j/d),$$

par définition. On introduit un paramètre $N_1\le N$, qui permet de découper F_N en

$$F_N(t,j/d)=F_{N_1}(t,j/d)\cdot F_{N-N_1}(r^{N_1}t,j/d),$$

ce qui, grâce au Lemme 1, donne la relation

$$|F_N(t,j/d)|=O(M(r,d)^{N-N_1}|F_{N_1}(t,j/d)|),$$

et, enfin

$$(5.2)\qquad G_N(Q\delta^{-1},j/d)=O(M(r,d)^{N-N_1}G_{N_1}(Q\delta^{-1},j/d)).$$

On applique l'inégalité de Sobolev–Gallagher ([Fo–M], Lemme 1), puisque les points k/q sont $\delta^2/(4Q^2)$ bien espacés, on a donc la majoration

$$(5.3)\qquad G_{N_1}(Q\delta^{-1},j/d)\ll Q^2\delta^{-2}\|F_{N_1}(\cdot,j/d)\|_1+\|F'_{N_1}(\cdot,j/d)\|_1.$$

La définition (2.6) de la fonction F_N donne, par dérivation par rapport à t, l'inégalité

$$|F'_{N_1}(t,\xi)|\ll_r \sum_{0\le i<N_1} r^i\prod_{\substack{j<N_1\\ j\ne i}}|\varphi(r^jt,\xi)|,$$

d'où la relation

$$\|F'_{N_1}(\cdot, j/d)\|_1 = O_r\Big(\sum_{i<N_1} r^i \cdot r^{N_1-i}\|F_i(\cdot, j/d)\|_1\Big) = O(r^{N_1}\|\Psi_r\|_\infty^{N_1}), \tag{5.4}$$

d'après (4.2). En regroupant (5.3) et (5.4), on a

$$G_{N_1}(Q\delta^{-1}, j/d) \ll_r \|\Psi_r\|_\infty^{N_1}(Q^2\delta^{-2} + r^{N_1}),$$

ce qui nous incite à prendre pour N_1 le minimum de la partie entière de $2\log(Q/\delta)/\log r$ et de N. La relation (5.2) devient alors

$$\begin{aligned} G_N(Q\delta^{-1}, j/d) \\ = O\bigg(M(r,d)^N\bigg(\frac{r\|\Psi_r\|_\infty}{M(r,d)}\bigg)^{2\log(Q/\delta)/\log r} + Q^2\delta^{-2}\|\Psi_r\|_\infty^N\bigg). \end{aligned}\tag{5.5}$$

D'après (5.1), il reste à sommer (5.5) sur les $\delta < 2Q$. Pour faciliter la majoration de cette série, on peut supposer que $M(r,d)$, dont l'existence est assurée par le Lemme 1, est très proche de r, de telle façon qu'on ait l'inégalité $r\|\Psi_r\|_\infty/M(r,d) \le \sqrt{r}$ (ceci est possible pour $r > 2$ puisque $\|\Psi_r\|_\infty = M(r)$ et qu'on verra en (6.5) l'inégalité $\vartheta_r > 1/2$ qui équivaut à $\|\Psi_r\|_\infty < \sqrt{r}$).

Avec une telle supposition, (5.5) est affaiblie en

$$G_N(Q\delta^{-1}, j/d) = O(M(r,d)^N Q\delta^{-1} + Q^2\delta^{-2}\|\Psi_r\|_\infty^N),$$

d'où, en sommant sur δ, on a

$$\sum_{Q<q\le 2Q}\sum_{k=1}^{q-1}|F_N(k/q, j/d)| \ll M(r,d)^N Q\log x + Q^2\|\Psi_r\|_\infty^N.$$

Il suffit d'utiliser les Lemmes 1 et 2 pour constater que la relation (2.7) est démontrée pour le choix de Q fixé par le théorème, dont la preuve est ainsi complète.

VI. Preuve du Corollaire 1. Dans un premier temps, il faut rendre plus parlante la valeur de l'exposant de répartition ϑ_r du Théorème. Nous utiliserons le fait que pour $a = \pi/(2n)$ ou $a = \pi/(2n+1)$, la fonction $x \mapsto 1/\sin(x+1/2)a$ est positive et décroissante sur l'intervalle $[0, n-1]$.

(i) *Cas où r est pair* ($r = 2n$, $r \ge 6$). Dans ce cas, on écrit

$$\begin{aligned} M(r) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{2k+1}{4n}\pi} = \frac{1}{n\sin\frac{\pi}{4n}} + \frac{1}{n\sin\frac{3\pi}{4n}} + \frac{1}{n\sin\frac{5\pi}{4n}} + \frac{1}{n}\sum_{k=3}^{n-1}\frac{1}{\sin\frac{2k+1}{4n}\pi} \\ &\le \frac{1}{n\sin\frac{\pi}{4n}} + \frac{1}{n\sin\frac{3\pi}{4n}} + \frac{1}{n\sin\frac{5\pi}{4n}} + \frac{1}{n}\int_2^{n-1}\frac{dx}{\sin\big(x+\frac{1}{2}\big)\frac{\pi}{2n}} \\ &\le \frac{1}{3\sin\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{3\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3\sin\frac{5\pi}{12}} + \frac{2}{\pi}\log\frac{\tan\big(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8n}\big)}{\tan\frac{5\pi}{8n}}, \end{aligned}$$

car la fonction $x/\sin x$ est croissante sur $[0,\pi/2]$, d'où la majoration

$$M(r) \le \frac{1}{3\sin\frac{\pi}{12}} + \frac{1}{3\sin\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{3\sin\frac{5\pi}{12}} - \frac{2}{\pi}\log\biggl(\tan\frac{5\pi}{4r}\biggr)$$

qu'on écrit de façon plus explicite comme

$$M(r) \le 2.105 - \frac{2}{\pi}\log\biggl(\tan\frac{5\pi}{4r}\biggr). \tag{6.1}$$

(ii) *Cas où r est impair* ($r = 2n+1$, $r \ge 7$). La méthode est fort semblable :

$$\begin{aligned} M(r) &= \frac{1}{2n+1}\biggl(1 + 2\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{\sin\frac{2k+1}{2(2n+1)}\pi}\biggr) \\ &\le \frac{1}{r} + \frac{2}{r\sin\frac{\pi}{2r}} + \frac{2}{r\sin\frac{3\pi}{2r}} + \frac{2}{r\sin\frac{5\pi}{2r}} + \frac{2}{r}\int_2^{n-1}\frac{dx}{\sin(x+\frac12)\frac{\pi}{r}} \\ &\le \frac{1}{7} + \frac{2}{7\sin\frac{\pi}{14}} + \frac{2}{7\sin\frac{3\pi}{14}} + \frac{2}{7\sin\frac{5\pi}{14}} - \frac{2}{\pi}\log\biggl(\tan\frac{5\pi}{4r}\biggr), \end{aligned}$$

qui s'écrit finalement

$$M(r) \le 2.203 - \frac{2}{\pi}\log\biggl(\tan\frac{5\pi}{4r}\biggr). \tag{6.2}$$

Les relations (6.1) et (6.2) entraînent

$$M(r) = O(\log r) \qquad (r\to\infty),$$

ce qui, par la définition de ϑ_r donnée lors de l'énoncé du Théorème, implique que, pour $r\to\infty$, on a

$$\vartheta_r = 1 - O\biggl(\frac{\log\log r}{\log r}\biggr). \tag{6.3}$$

Pour prouver le Corollaire 1, il suffit de vérifier, grâce au crible pondéré ([H–R], Theorem 9.3) que ϑ_r vérifie, pour tout $r \ge 2$, une inégalité de la forme

$$\vartheta_r \Lambda_2 > 1; \tag{6.4}$$

mais, grâce aux travaux de Greaves, on sait qu'on peut prendre une valeur de Λ_2 très proche de la valeur conjecturale $\Lambda_2 = 2$, à savoir $\Lambda_2 = 1.936$ ([Gre]), ce qui ramène la vérification de (6.4) à celle de

$$\frac{\log M(r)}{\log r} < 0.483. \tag{6.5}$$

En minorant ϑ_r par (6.1) ou (6.2) suivant les cas, on voit que (6.5) est vérifiée pour $r \ge 6$; ceci pourra se faire en calculant la dérivée de la fonction $r^{0.483} + \frac{2}{\pi}\log\bigl(\tan\frac{5\pi}{4r}\bigr)$.

Il reste donc à traiter les petites valeurs de r. Pour $r = 2$, on a $M(2) = \sqrt{2}$, d'où $\vartheta_2 = 1/2$; l'inégalité (6.5) n'est pas vérifiée, mais, d'après [Fo–M], on sait, par une méthode plus élaborée que le Corollaire 1 est vrai pour cette valeur de r. On a $M(3) = 5/3$, donc $\vartheta_3 = 0.5350\ldots$ et l'inégalité (6.5) est exacte. On a de même $M(4) = 2\cos(\pi/8)$, $M(5) = (1 + 2/\cos(\pi/5) + 2/\cos(2\pi/5))/5$, d'où $\vartheta_4 = 0.5571\ldots$, $\vartheta_5 = 0.5727\ldots$ et (6.5) est toujours vérifiée. Ceci termine la preuve du Corollaire 1.

VII. Le crible asymptotique de Bombieri. On doit à Bombieri ([Bo1] et aussi [Bo2]) d'avoir démontré que pour un problème de crible linéaire appliqué à une suite (c_n) positive ou nulle, ayant 1 pour exposant de répartition, il est possible d'accéder à un équivalent asymptotique de la somme

$$\sum_{n<x} c_n \Lambda_k(n),$$

pour $x \to \infty$ et $k \geq 2$. Nous avons volontairement schématisé et simplifié cet important résultat de Bombieri. Ce travail a été étendu par Friedlander et Iwaniec ([Fr–I1]) par une étude délicate des uniformités par rapport aux différents paramètres. Nous utiliserons une autre très récente extension de ce travail, qui s'adapte parfaitement à notre situation puisqu'elle traite du cas où l'exposant de répartition tend vers 1 ([Fr–I2]). Afin de rendre notre travail complet, nous rappelons dans sa plus grande généralité le résultat de Friedlander et Iwaniec.

Soit

$$a(n) \geq 0, \qquad A(x) = \sum_{n \leq x} a(n).$$

On pose aussi

$$A_d(x) = \sum_{n \leq x,\, d \mid n} a(n), \qquad A_d(x) = g(d)A(x) + r_d(x)$$

et

$$R(x, D) = \sum_{d<D} {}^{\flat} |r_d(x)|,$$

où le $^\flat$ signifie que la somme est restreinte aux entiers sans facteur carré. On choisit un nombre z tel que

$$2 \leq z \leq x^{\delta}, \quad \delta \leq \min\left(\frac{1}{20}, \frac{1}{k+1}\right). \tag{7.1}$$

Les hypothèses sont au nombre de huit :

$$R(x, x/z) \leq A(x)(\log x)^{-2}, \tag{H_1}$$

$$A(x/z) \leq A(x)(\log x)^{-2}, \tag{H_2}$$

$$(\mathrm{H}_3) \qquad \sum_{p\ge z} A_{p^2}(x)\log p \le \delta A(x).$$

Ces trois premières hypothèses concernaient le terme d'erreur, les suivantes traitent du terme principal :

$$(\mathrm{H}_4) \qquad g \text{ est multiplicative avec } 0 \le g(p) < 1.$$

Il existe une constante $c \ge 2$, telle que, pour tout $u \ge w \ge 2$, on ait

$$(\mathrm{H}_5) \qquad \sum_{w\le p<u} \frac{g(p)}{1-g(p)}\log p \le \log\frac{cu}{w}.$$

Il existe une fonction f vérifiant

$$(\mathrm{H}_6) \qquad f \text{ est complètement multiplicative avec } 0 \le f(p) < 1,$$

$$(\mathrm{H}_7) \qquad \sum_{p\ge z} |f(p)-g(p)| \le \delta^3,$$

$$(\mathrm{H}_8) \qquad \sum_{n\le t} f(n) = a\log t + b + O((\log t)^{-2}),$$

pour tout $t \ge 2$ avec $a > 0$ et b des constantes. On a le

Lemme 3 ([Fr–I2]). *Soit $k \ge 2$ et $x > x_0(k)$. Supposons que les hypothèses* (H_1)–(H_5) *soient vraies pour $z = x^\delta$ vérifiant* (7.1). *Supposons qu'il existe f proche de g, autrement dit telle que les hypothèses* (H_6)–(H_7) *soient satisfaites. Sous ces hypothèses, on a l'égalité*

$$(7.2) \qquad \sum_{n\le x}{}^{\flat} a(n)\Lambda_k(n) = kHA(x)(\log x)^{k-1}\{1+O(\delta(\log\delta)^4)\},$$

avec

$$H = \prod_p (1-g(p))\Big(1-\frac{1}{p}\Big)^{-1},$$

la constante O dépendant au plus de c, k et f.

Pour démontrer le Corollaire 2, on choisit pour $a(n)$ la fonction caractéristique des entiers n tels que $s_r(n)$ soit congru à b modulo d. On prend

$$A(x) = \sum_{n<x,\, s_r(n)\equiv b \,(\mathrm{mod}\, d)} 1, \qquad f(d) = g(d) = 1/d.$$

La fonction $A(x)$ vérifie donc $A(x) \sim x/d$ pour $x \to \infty$, et le Théorème affirme que l'hypothèse (H_1) est vraie pour $z = x^{2(1-\vartheta_r)}$, d'où le choix $\delta = 2(1-\vartheta_r) = O(\log\log r/\log r)$ grâce à (6.3). On obtient alors directement le Corollaire 2, puisque la contribution à la somme étudiée des entiers divisibles par un carré est en $o(x(\log x)^{k-1})$.

Bibliographie

[Bo1] E. Bombieri, *The asymptotic sieve*, Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. (5) 1/2 (1975–76), 243–269.

[Bo2] —, *On twin almost primes*, Acta Arith. 28 (1975), 177–193 et Corrigendum, 457–461.

[Fo] E. Fouvry, *Sur le problème des diviseurs de Titchmarsh*, J. Reine Angew. Math. 357 (1985), 51–76.

[Fo–I] E. Fouvry and H. Iwaniec, *Gaussian primes*, preprint.

[Fo–M] E. Fouvry et C. Mauduit, *Sommes des chiffres et nombres presque premiers*, Math. Ann. 305 (1996), 571–599.

[Fo–T] E. Fouvry et G. Tenenbaum, *Répartition statistique des entiers sans grand facteur premier dans les progressions arithmétiques*, Proc. London Math. Soc. (3) 72 (1996), 481–514.

[Fr–I1] J. Friedlander and H. Iwaniec, *On Bombieri's asymptotic sieve*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 4 (1978), 719–756.

[Fr–I2] —, —, *Bombieri's sieve*, dans : Conference on Analytic Number Theory, in honour of H. Halberstam, Urbana 1995, à paraître.

[Ge] A. O. Gelfond, *Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données*, Acta Arith. 13 (1968), 259–265.

[Gra] A. Granville, *Integers without large prime factors in arithmetic progressions, I*, Acta Math. 170 (1993), 255–273.

[Gre] G. Greaves, *A weighted sieve of Brun's type*, Acta Arith. 40 (1982), 297–332.

[H–R] H. Halberstam and H. E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, 1974.

[Iw] H. Iwaniec, *Rosser's sieve—bilinear forms of the remainder term—some applications*, dans : Recent Progress in Analytic Number Theory, Vol. 1, H. Halberstam and C. Hooley (eds.), Academic Press, 1981, 203–230.

Mathématique, Bâtiment 425
Université de Paris-Sud
F-91405 Orsay Cedex, France
E-mail: etienne.fouvry@math.u-psud.fr

Laboratoire de Mathématiques Discrètes
163, Avenue de Luminy, Case 930
F-13288 Marseille Cedex 09, France
E-mail: mauduit@lmd.univ-mrs.fr

Reçu le 31.10.1995 (2887)