ACTA ARITHMETICA
LXXVII.2 (1996)

Sur les K-nombres de Pisot de petite mesure

par

Toufik Zaïmi (Riyadh)

Introduction. Soient K un corps de nombres et θ un entier algébrique de module > 1 et de polynôme minimal P sur K. Alors θ est dit *K-nombre de Pisot* (resp. *de Salem*) si pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ le polynôme σP possède une unique racine de module > 1 et aucune (resp. au moins une) racine de module 1. Ces nombres ont été définis par A. M. Bergé et J. Martinet [1] et ont été étudiés par M. J. Bertin qui a considéré le cas où K est un corps quadratique réel [2].

On considère ici deux cas : où K est un corps quadratique imaginaire et où K est un corps cubique totalement réel. Le but est de déterminer des polynômes réciproques de petite mesure.

On commence par déterminer les K-nombres de Pisot de petite mesure dans ces deux cas. Ces résultats sont présentés dans le théorème 2, où on détermine tous les K-nombres de Pisot non réels de mesure < 2 dans le cas où K est quadratique imaginaire, et dans le théorème 4, où on détermine tous les K-nombres de Pisot qui ne sont pas des $\mathbb{Q}$-nombres de Pisot, de mesure < 4, où K est un corps cubique totalement réel.

La preuve du théorème 2 est basée sur les transformées de Schur et celle du théorème 4 sur l'algorithme de Schur généralisé [2]. Ensuite, en utilisant la construction de Salem, on détermine des K-nombres de Salem de petite mesure pour ces deux cas. Dans le cas quadratique imaginaire en appliquant la construction de Salem aux K-nombres de Pisot du théorème 2 on trouve des K-nombres de Salem non réels de mesure < 1.69, et dans le cas cubique totalement réel en appliquant cette construction aux K-nombres de Pisot du théorème 4 on trouve un seul K-nombre de Salem de mesure < 3, les autres polynômes ont 1 ou 2 conjugués hors du disque unité.

Les calculs sont faits grâce au système Pari [9].

1. Rappels et résultats préliminaires

Définition 1. Soit θ un entier algébrique de polynôme minimal F sur $\mathbb{Q}$ tel que $F(z) = (z-\theta_1)(z-\theta_2)\ldots(z-\theta_n)$. La *mesure* de θ (ou bien de F) est le nombre réel $M(\theta)$ (ou bien $M(F)$) défini par

$$M(\theta) = \prod_{1\le i\le n} \max\{1, |\theta_i|\}.$$

DÉFINITION 2 [1]. Soit K un corps de nombres. Un entier algébrique θ de module > 1 est dit *K-nombre de Pisot* (resp. *de Salem*) si au dessus de tout plongement de K dans $\mathbb{C}$ il admet un unique conjugué de module > 1 et (resp. au moins un) aucun conjugué de module 1.

La valeur absolue d'un $\mathbb{Q}$-nombre de Pisot (resp. de Salem) est un *nombre de Pisot* (resp. *de Salem*).

Généralisation de la construction de Salem. Dans tout ce qui suit, K désigne un corps quadratique ou bien un corps de nombres totalement réel, G l'ensemble des plongements de K dans $\mathbb{C}$ et θ un entier algébrique dont le polynôme minimal sur K, noté P, est non réciproque. (Un polynôme P de degré d est dit *réciproque* si la fraction P^*/P est constante, où le polynôme P^* est défini par $P^*(z) = z^d\overline{P}(1/z)$, $\overline{P}$ étant le polynôme dont les coefficients sont les conjugués complexes des coefficients de P.)

Si θ est de module supérieur à 1 et si toutes les autres racines de P sont de module inférieur à 1 alors l'équation

$$z^n P(z) + \varepsilon P^*(z) = 0, \qquad \varepsilon = \pm 1,$$

admet à partir d'un certain rang (dépendant de θ seulement) une seule racine τ_n hors du disque unité et une seule racine à l'intérieur du disque unité. De plus, la suite τ_n converge vers θ.

Si K est un corps quadratique imaginaire on peut prendre pour ε une unité de K.

La preuve de ce résultat est analogue à celle donnée par Salem pour le cas $K = \mathbb{Q}$ [4].

La méthode. Soit θ un K-nombre de Pisot et $\sigma \in G$. Le polynôme σP admet une seule racine θ_σ de module > 1 et aucune racine de module 1. De ce qui précède on déduit l'existence d'une suite d'entiers algébriques $(\tau_{\sigma,n})_n$ convergeant vers θ_σ telle que les $\tau_{\sigma,n}$ lorsque n est fixé et σ parcourt G soient racines d'un même polynôme unitaire à coefficients entiers rationnels :

$$\prod_{\sigma\in G} (z^n \sigma P(z) + \varepsilon\sigma P^*(z)).$$

De plus, chaque $\tau_{\sigma,n}$ admet (à partir d'un certain rang) au moins un conjugué de module 1. La méthode consiste alors à appliquer la construction de Salem aux K-nombres de Pisot de mesure minimale.

Commençons d'abord par donner une minoration de la mesure d'un polynôme non réciproque réductible sur certains corps de nombres primitifs. (Un corps de nombres K est dit *primitif* s'il n'existe aucun corps intermédiaire entre $\mathbb{Q}$ et K.)

THÉORÈME 1. *Soient K un corps de nombres totalement réel primitif de degré d ou bien un corps quadratique de discriminant D et P le polynôme minimal sur K d'un entier algébrique θ. Si le polynôme minimal de θ sur K est non réciproque et si pour tout plongement σ de K dans $\mathbb{C}$ les polynômes P et σP sont premiers entre eux alors*

$$M(\theta)^{2(d-1)} \geq |D|/d^d.$$

Preuve. Avec les notations précédentes, considérons la fonction non constante f définie par

$$f(z) = P(z)/P^*(z).$$

La fonction f est méromorphe dans le disque unité avec $r \geq 0$ pôles, est de module 1 sur le cercle unité et admet un développement en série de Taylor au voisinage de l'origine à coefficients entiers du corps K de la forme

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} u_n z^n.$$

Comme le corps K est ou bien totalement réel ou bien quadratique, la conjugaison complexe commute avec tout élément σ de G et par suite on a l'égalité

$$(\sigma P)^* = \sigma P^*,$$

où σP (resp. σP^*) désigne le polynôme dont les coefficients sont les conjugués par σ des coefficients de P (resp. de P^*).

Considérons alors la fonction σf définie par

$$\sigma f(z) = \sigma P(z)/\sigma P^*(z),$$

où σ est un élément de G. La fonction σf est méromorphe dans le disque unité avec $r_\sigma \geq 0$ pôles, est de module 1 sur le cercle unité et admet un développement en série de Taylor au voisinage de l'origine de la forme

$$\sigma f(z) = \sum_{n\geq 0} \sigma u_n z^n,$$

où σu_n désigne le conjugué par σ de u_n.

Soit alors la fonction Δ définie par

$$\Delta(z) = \prod_{\sigma\neq\phi} (\sigma f(z) - \phi f(z)), \qquad (\sigma, \phi) \in G^2.$$

Comme le polynôme P est premier à tous ses conjugués, on déduit qu'il en est de même pour tout couple de polynômes σP et ϕP si $\sigma \neq \phi$, et comme le polynôme minimal de θ sur K est non réciproque on déduit que la fonction Δ n'est pas identiquement nulle; de plus, le corps K étant primitif, on déduit l'existence d'un entier naturel N (on choisit le plus petit) tel que l'entier u_N engendre le corps K.

Soit H la fonction définie par

$$H(z) = (\Delta(z)/z^{Nd(d-1)})\Big(\prod_{1\le i\le k}(1-\theta_i z)/(z-\theta_i)\Big)^{2(d-1)},$$

où $\theta_1,\ldots,\theta_k$ désignent les conjugués de θ sur $\mathbb{Q}$ hors du disque unité.

La fonction H est une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque unité, est de même module que la fonction Δ sur le cercle unité, module qu'on peut majorer par d^d grâce à l'inégalité de Hadamard. En outre, sa valeur à l'origine est

$$H(0) = \Big(\prod_{\sigma\ne\phi}(\sigma u_N - \phi u_N)\Big)/M(\theta)^{2(d-1)}.$$

Du principe du maximum on déduit $|H(0)| \le d^d$, d'où le résultat.

2. Cas quadratique imaginaire

2.1. Soit $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ un corps quadratique et θ un K-nombre de Pisot de polynôme minimal P (resp. F) sur K (resp. sur $\mathbb{Q}$). De la définition 2 on déduit que soit $P = F$ et dans ce cas $\pm\theta$ est un nombre de Pisot, soit $P \ne F$ et dans ce cas θ n'est pas réel et admet deux conjugués sur $\mathbb{Q}$ de module > 1.

Par la suite on va déterminer les valeurs possibles de θ lorsque $d < 0$, $M(\theta) < 2$ et $P \ne F$; pour ceci on a besoin de certains lemmes que l'on applique plusieurs fois.

Lemme 1. *Soient ξ une unité non réelle d'un corps quadratique K et θ un nombre réel. Alors on a équivalence entre les assertions suivantes* :

(i) $|\theta|$ *est un nombre de Pisot* (*resp. de Salem*);
(ii) $\xi\theta$ *est un K-nombre de Pisot* (*resp. de Salem*) *non réel.*

Preuve. Ce cas n'a lieu que si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-1})$ ou bien $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. Si $|\theta|$ est un nombre de Pisot (resp. de Salem) alors $\xi\theta$ est un élément primitif du corps $\mathbb{Q}(\xi,\theta)$ car les plongements de ce corps dans $\mathbb{C}$ transforment $\xi\theta$ en $\xi\theta$, $\overline{\xi}\theta$, ou bien en des conjugués de module inférieur à 1, et comme ξ est non réel on déduit $K \subseteq \mathbb{Q}(\xi,\theta) = \mathbb{Q}(\xi\theta)$, d'où le résultat.

Inversement, l'égalité $\xi\overline{\xi}\theta^2 = \theta^2$ montre que θ est un entier algébrique de module > 1 et comme $K(\xi\theta) = \mathbb{Q}(\xi\theta) = \mathbb{Q}(\xi,\theta)$, on déduit que si $\xi\theta$ est de degré $2s$ sur $\mathbb{Q}$, alors θ est de degré s sur $\mathbb{Q}$.

Comme pour tout plongement σ de $\mathbb{Q}(\xi\theta)$ dans $\mathbb{C}$ on a

$$|\sigma(\xi\theta)| = |\sigma(\xi)\sigma(\theta)| = |\sigma(\theta)|,$$

en considérant les prolongements de l'identité de K on déduit le résultat.

Lemme 2 [10]. *Soit f une fonction méromorphe non constante admettant k pôles à l'intérieur du disque unité, vérifiant $|f(z)| \le 1$ sur le cercle unité et admettant un développement de Taylor au voisinage de l'origine de la forme*

$$f(z) = 1 + u_k z^k + \ldots$$

Alors u_k est non nul.

Lemme 3 (Schur). *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le disque unité telle que $|f(z)| \le 1$ sur le cercle unité. Une telle fonction est appelée fonction de Schur. Si f n'est pas constante, alors la fonction f_1 définie par*

$$f_1(z) = \frac{f(z) - f(0)}{z(1 - \overline{f(0)}f(z))}$$

est aussi une fonction de Schur.

Lemme 4 (Schur). *Soit f une fonction de Schur admettant un développement en série de Taylor au voisinage de l'origine de la forme $\sum_{n\ge0} u_n z^n$. Alors $|u_1| \le 1 - |u_0^2|$.*

Lemme 5. *Soit f une fonction méromorphe sur un ouvert contenant le disque unité n'ayant qu'un pôle simple de module inférieur à 1, vérifiant $|f(z)| = 1$ sur le cercle unité et admettant un développement en série de Taylor au voisinage de l'origine à coefficients entiers d'un corps quadratique imaginaire $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de la forme*

$$f(z) = 1 + z + z^2 + u_3 z^3 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

Alors

(a) *si $d = -1$ alors ou bien $u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n, ou bien*

$$f(z) = \frac{1 - z^2 \pm iz^n(1 + z - z^2)}{(1 - z - z^2) \pm iz^n(1 - z^2)},$$

i désignant la racine carré de -1;

(b) *si $d = -3$ alors ou bien $u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n, ou bien il existe une unité non réelle j dans $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ telle que*

$$f(z) = \frac{1 - z^2 \pm jz^n(1 + z - z^2)}{(1 - z - z^2) \pm jz^n(1 - z^2)};$$

(c) *si $d \ne -1$ et $d \ne -3$, alors $u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n.*

Preuve. La preuve de ce résultat est identique au cas où f admet un développement en série de Taylor à coefficients dans $\mathbb{Z}$ [7].

Théorème 2. *Soient* $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ *un corps quadratique imaginaire et* θ *un* K*-nombre de Pisot non réel de polynôme minimal* $\mathrm{Irr}(\theta, K, z)$ (*resp.* $\mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z)$) *sur* K (*resp.* $\mathbb{Q}$) *et de mesure* $M(\theta)$.

(a) *Si* $d = -7$ *alors* $M(\theta) \geq 2$ *sauf si*

$$\mathrm{Irr}(\pm\theta, K, z) = z^2 + (1 \pm \sqrt{-7})z/2 - 1,$$
$$\mathrm{Irr}(\pm\theta, \mathbb{Q}, z) = z^4 + z^3 - z + 1 \text{ et } M(\theta) = 1.8832\ldots;$$

(b) *si* $d = -1$ *alors* $M(\theta) \geq 2$ *sauf si*

$$\mathrm{Irr}(\pm\theta, K, z) = z^3 + z + i,$$
$$\mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z) = z^6 + 2z^4 + z^2 + 1 \text{ et } M(\theta) = \theta_0^2 = 1.7548\ldots,$$

$$\mathrm{Irr}(\xi\theta, K, z) = z^3 - z^2 \pm i,$$
$$\mathrm{Irr}(\xi\theta, \mathbb{Q}, z) = z^6 - 2z^5 + z^4 + 1 \text{ et } M(\theta) = 1.8977\ldots,$$

$$\mathrm{Irr}(\pm\theta, K, z) = z^4 + iz^3 - 1,$$
$$\mathrm{Irr}(\theta, \mathbb{Q}, z) = z^8 + z^6 - 2z^4 + 1 \text{ et } M(\theta) = \theta_1^2 = 1.9051\ldots,$$

$$\mathrm{Irr}(\xi\theta, K, z) = z^3 \pm i(z^2 + z) - z - 1,$$
$$\mathrm{Irr}(\xi\theta, \mathbb{Q}, z) = z^6 - z^4 + 2z^2 + 2z + 1 \text{ et } M(\theta) = 1.9922\ldots,$$

où ξ *est l'une des puissances de la racine primitive quatrième de l'unité* i *et où* θ_0 *et* θ_1 *désignent les deux plus petits nombres de Pisot*;

(c) *si* $d = -3$ *alors* $M(\theta) \geq 2$ *sauf si*

$$\mathrm{Irr}(\eta\theta, K, z) = z^2 + jz - 1 \text{ ou bien } \mathrm{Irr}(\eta\theta, K, z) = z^2 + \overline{j}z - 1,$$
$$\mathrm{Irr}(\eta\theta, \mathbb{Q}, z) = z^4 + z^3 - z^2 - z + 1 \text{ et } M(\theta) = 1.7220\ldots,$$

$$\mathrm{Irr}(\pm\theta, K, z) = z^3 + jz + 1 \text{ ou bien } \mathrm{Irr}(\pm\theta, K, z) = z^3 + \overline{j}z + 1,$$
$$\mathrm{Irr}(\pm\theta, \mathbb{Q}, z) = z^6 + z^4 + 2z^3 + z^2 + z + 1 \text{ et } M(\theta) = \theta_0^2 = 1.7548\ldots,$$

$$\mathrm{Irr}(\eta\theta, K, z) = z^3 - jz^2 - z - \overline{j} \text{ ou bien } \mathrm{Irr}(\eta\theta, K, z) = z^3 - \overline{j}z^2 - z - j,$$
$$\mathrm{Irr}(\eta\theta, \mathbb{Q}, z) = z^6 - z^5 - z^4 + z + 1 \text{ et } M(\theta) = 1.8378\ldots,$$

$$\mathrm{Irr}(\pm\theta, K, z) = z^4 - jz^3 + j \text{ ou bien } \mathrm{Irr}(\pm\theta, K, z) = z^4 - \overline{j}z^3 + \overline{j},$$
$$\mathrm{Irr}(\pm\theta, \mathbb{Q}, z) = z^8 - z^7 + z^6 + z^4 - 2z^3 + 1 \text{ et } M(\theta) = \theta_1^2 = 1.9051\ldots,$$

où η *est l'une des puissances de la racine primitive sixième de l'unité* $j = (1 + \sqrt{-3})/2$;

(d) *si* $d \neq -1$, $d \neq -3$ *et* $d \neq -7$ *alors* $M(\theta) \geq 2$.

Preuve. Soit θ un $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombre de Pisot non réel de mesure < 2 et de polynôme minimal P sur $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Comme $P(0)$ est un entier de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ vérifiant $|P(0)| \leq |\theta| < \sqrt{2}$, il est alors de module 1.

Supposons d'abord que le polynôme minimal de θ sur $\mathbb{Q}$ soit non réciproque. Du théorème 1 on déduit que la valeur absolue du discriminant du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ est inférieure à 16 et comme il y a une bijection entre les corps quadratiques et leurs discriminants on déduit un nombre fini de valeurs possibles pour d. Considérons alors la fraction rationnelle

$$f(z) = \overline{P(0)}P(z)/P^*(z).$$

La fonction f est méromorphe dans le disque unité, admet un pôle simple $1/\overline{\theta}$ à l'intérieur du disque unité, est de module 1 sur le cercle unité et admet un développement en série de Taylor au voisinage de l'origine à coefficients entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ de la forme

$$f(z) = 1 + u_1 z + u_2 z^2 + \ldots + u_n z^n + \ldots$$

Montrons en premier lieu que $|u_1| = 1$ et que $M(\theta) > \theta_\infty = (1+\sqrt{5})/2$.

Soit F la fonction de Schur non constante définie par

$$F(z) = (1 - \overline{\theta}z)f(z)/(z - \theta).$$

La première transformée de Schur de F,

$$F_1(z) = \frac{F(z) - F(0)}{z(1 - \overline{F(0)}F(z))},$$

est aussi une fonction de Schur d'après le lemme 3. Le lemme 4 appliqué à la fonction F_1 donne

$$|u_1\theta + 1 - |\theta^2|| \leq |\theta|^2 - 1;$$

d'où

$$|u_1| \leq 2(|\theta|^2 - 1)/|\theta| < \sqrt{2}. \tag{1}$$

La dernière inégalité est due au fait que la fonction $(x^2-1)/x$ est strictement croissante sur $]0, \infty[$. On déduit alors que $|u_1| \in \{0, 1\}$.

Le lemme 2 appliqué à la fonction f montre que $u_1 \neq 0$, la fonction f n'étant pas constante (car les polynômes P et P^* sont premiers entre eux).

Remarquons que (1) entraîne que $u_1 = 0$ si $|\theta| < (1+\sqrt{17})/4$.

Par conséquent, on a le résultat suivant :

$$M(\theta) \geq ((1+\sqrt{17})/4)^2 > \theta_\infty \quad \text{et} \quad |u_1| = 1.$$

Pour la suite, on distingue quatre cas suivant les valeurs de d.

1. *$d \equiv 2$ ou $d \equiv 3$ modulo 4, $d \neq -1$.* Dans ce cas l'égalité $|u_1| = 1$ entraîne que $u_1 = \pm 1$.

Il suffit d'étudier le cas $u_1 = 1$. En effet, si θ est un $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombre de Pisot associé à $f(z)$, $-\theta$ l'est aussi, est associé à $f(-z)$ et est de même mesure que θ.

Considérons la fonction de Schur suivante :

$$G(z)=\frac{(1-\theta z)(1-\overline{\theta}z)(f(z)-\bar{f}(z))}{2z^2(\theta-z)(\overline{\theta}-z)},\quad \text{où}\quad \bar{f}(z)=\frac{\overline{P}(z)}{\overline{P}^*(z)}.$$

Le principe du maximum appliqué à la fonction non constante G donne alors

$$|u_2-\overline{u}_2|\le 2|\theta|^2<4;$$

d'où on déduit l'inégalité

$$|b_2|<2/\sqrt{-d}\quad \text{avec}\quad u_2=a_2+ib_2\sqrt{-d}\quad \text{et}\quad b_2\in\mathbb{Z}.$$

Si $d\le -5$ alors $b_2=0$ et $u_2=\overline{u}_2$. Le lemme 4 appliqué à la première transformée de Schur de G,

$$G_1(z)=G(z)/z,$$

donne aussi que $u_3=\overline{u}_3$; ainsi de suite on obtient $u_n=\overline{u}_n$ pour tout n, ce qui entraîne l'égalité des deux fractions f et $\bar{f}$, ce qui est impossible puisque le polynôme minimal de θ sur $\mathbb{Q}$ est non réciproque.

Si $d=-2$, considérons la fonction de Schur H définie par

$$H(z)=f(z)f(-z)(1-\overline{\theta}^2z^2)/(\theta^2-z^2).$$

Sa première transformée de Schur étant nulle à l'origine, on déduit que sa deuxième transformée de Schur vaut

$$H_2(z)=\frac{H(z)-H(0)}{z^2(1-\overline{H(0)}H(z))}.$$

Le lemme 4 appliqué à la fonction de Schur H_2 donne

$$|(2u_2-1)\theta^2+1-|\theta^4||<|\theta|^4-1.$$

On déduit alors l'inégalité

$$|2u_2-1|\le 2(|\theta|^4-1)/|\theta|^2<3\quad \text{si } |\theta|<\sqrt{2}.$$

La dernière inégalité est due au fait que la fonction $(x^2-1)/x$ est strictement croissante sur $]0,\infty[$. On déduit alors que $u_2\in\{0,1\}$.

Cependant aucun de ces deux cas ne peut avoir lieu. En effet, d'une part, le lemme 2 appliqué à la fonction non constante $(f(z)+f(-z))/2$ montre que $u_2\neq 0$; d'autre part, le lemme 5 appliqué à la fonction f montre que f admet un développement en série de Taylor à coefficients dans $\mathbb{Z}$, ce qui n'est pas le cas puisque les fonctions f et $\bar{f}$ ne sont pas identiques.

On conclut donc pour ce cas que $M(\theta)\ge 2$.

2. $d\equiv 1$ *modulo* 4, $d\neq -3$. Dans ce cas l'égalité $|u_1|=1$ entraîne l'égalité $u_1=\pm 1$. Comme précédemment on peut se restreindre au cas $u_1=1$.

On considère la fonction H comme dans le cas $d=-2$; les mêmes calculs montrent que $u_2\in\{0,1,(1\pm i\sqrt{7})/2\}$ et de la même manière on montre que les 2 premiers cas ne peuvent pas avoir lieu.

Si $d = -7$ et $u_2 = (1 \pm i\sqrt{7})/2$, le lemme 2 appliqué à la fonction $f(z)\bar{f}(-z)$ montre que cette fonction est constante égale à 1, c'est-à-dire que θ et $-1/\overline{\theta}$ sont conjugués, cas que l'on étudiera séparément.

Ceci achève la preuve du (d).

3. $d = -1$. L'égalité $|u_1| = 1$ entraîne que $u_1 = \pm 1, \pm i$; dans ce cas aussi on peut supposer $u_1 = 1$. En effet, si $u_1 = -1$ on prend $f(-z)$ au lieu de $f(z)$ puisque le nombre $-\theta$ est un $\mathbb{Q}(i)$-nombre de Pisot de même mesure. Si $u_1 = i$ on prend $f(-iz)$ au lieu de $f(z)$; en effet, d'après le lemme 1 le nombre $i\theta$ est soit un $\mathbb{Q}(i)$-nombre de Pisot de même mesure que θ, soit un nombre de Pisot de mesure $< \sqrt{2}$; mais les nombres de Pisot de mesure $< \sqrt{2}$ sont connus et sont soit θ_0=1.32... soit $\theta_1 = 1.38\ldots$

On a le même résultat si $u_1 = -i$.

On considère la fonction H comme pour les cas précédents et on obtient que $u_2 \in \{0, 1, \pm i, 1 \pm i\}$. On montre que $u_2 \neq 0$ de la même manière que pour les cas précédents.

• $u_2 = \pm i$. Le lemme 2 appliqué à la fonction $(f(z) + \bar{f}(-z))/2$ montre que cette fonction est nécessairement constante; on en déduit que $\overline{\theta} = -\theta$ et par le lemme 1 que $\pm\theta/i$ est un nombre de Pisot inférieur à $\sqrt{2}$, donc égal à θ_0 ou θ_1.

• $u_2 = 1$. Le lemme 5 appliqué à la fonction f donne dans ce cas que $P(z)$ est de la forme

$$z^n(z^2 - z - 1) \pm i(z^2 - 1), \qquad n \geq 1.$$

Les racines $(\theta_n)_n$ hors du disque unité de ces polynômes sont des $\mathbb{Q}(i)$-nombres de Pisot de mesure supérieure à 2 qui convergent vers le nombre d'or θ_∞ racine > 1 de $z^2 - z - 1$. En effet, pour $|z| = \sqrt{2}$ et $n > 2$ on a

$$\begin{aligned} |z^n(z^2 - z - 1)|^2 - |z^2 - 1|^2 &= 2^n 7 - 5 - 2^n(z + \overline{z}) + (1 - 2^n)(z^2 + \overline{z}^2) \\ &> 2^n(3 - 2\sqrt{2}) - 1 > 0. \end{aligned}$$

Comme $\theta_\infty > \sqrt{2}$, le théorème de Rouché entraîne que $|\theta_n| \geq \sqrt{2}$ si $n \geq 3$. Pour $n \leq 2$, le calcul direct montre que $|\theta_n|^2 \geq 2$.

• $u_2 = 1 \pm i$. On peut se limiter au cas où $u_2 = 1 + i$, le cas $u_2 = 1 - i$ conduisant à la fraction conjuguée de f. Considérons alors la fonction g définie par

$$g(z) = \frac{(z^2 + (1+i)z - 1)f(z) - (z^2 + iz - 1)}{(z^2 - (1-i)z - 1) - f(z)(z^2 + iz - 1)}.$$

Comme dans la preuve du lemme 5 on montre que la fonction g est de Schur. Si $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ désigne son développement en série de Taylor au voisinage de l'origine, on déduit de la formule intégrale de Cauchy

$$\sum_{n\geq 0} |\alpha_n|^2 \leq 1$$

et par suite $g(z) = \pm z^n$ ou $g(z) = \pm iz^n$; on déduit alors les 4 formes possibles pour P :

1) $z^n(z^2-(1-i)z-1)+(z^2+iz-1),\ n\geq 1,$
2) $z^n(z^2-(1-i)z-1)-(z^2+iz-1),\ n\geq 1,$
3) $z^n(z^2-(1-i)z-1)+i(z^2+iz-1),\ n\geq 1,$
4) $z^n(z^2-(1-i)z-1)-i(z^2+iz-1),\ n\geq 1.$

Toutes ces familles donnent lieu à des suites de $\mathbb{Q}(i)$-nombres de Pisot convergeant vers le $\mathbb{Q}(i)$-nombre de Pisot racine de module $1.700\ldots$ du polynôme $z^2-(1-i)z-1$.

Pour $n\geq 4$, ces $\mathbb{Q}(i)$-nombres de Pisot sont de mesure ≥ 2. En effet, si $z=\sqrt{2}e^{i\alpha}$ où $\alpha\in[0,2\pi]$ alors

$$|z^2+iz-1|^2 = 7+6\sqrt{2}\sin(\alpha)-4\cos(2\alpha) = R(\alpha)$$

et

$$|z^2-(1-i)z-1|^2 = R(\alpha)+2-2\sqrt{2}\cos(\alpha) = L(\alpha).$$

On déduit que si $\pi/4<\alpha<7\pi/4$ alors $L(\alpha)>R(\alpha)$. De même, si $0\leq\alpha\leq\pi/4$ et $n\geq 1$ alors

$$2^nL(\alpha)-R(\alpha)\geq R(\alpha)+4-4\sqrt{2}\cos(\alpha)>7-4\sqrt{2}>0.$$

Les fonctions L et R sont croissantes sur l'intervalle $[-13\pi/90,0]$; on déduit alors pour $n\geq 4$ les inégalités suivantes :

$$L(\alpha)\geq L(-13\pi/90)>0.25>3/2^n=R(0)/2^n\geq R(\alpha)/2^n.$$

Sur l'intervalle $[-\pi/4,-3\pi/20]$ la fonction L est décroissante et la fonction R est majorée par 4; on déduit alors pour $n\geq 4$ les inégalités suivantes :

$$L(\alpha)\geq L(-3\pi/20)>0.25\geq 4/2^n\geq R(\alpha)/2^n.$$

Enfin, si $-3\pi/20\leq\alpha\leq -13\pi/90$ alors la fonction R est majorée par 1 et la fonction L est minorée par 0.14; on déduit alors l'inégalité $2^nL(\alpha)>R(\alpha)$ pour tout $n\geq 3$.

On déduit que si $n\geq 4$ alors $2^nL(\alpha)>R(\alpha)$; et le théorème de Rouché entraîne le résultat.

Pour $n\leq 4$, le calcul direct montre que seuls les cas où $n=1$ dans les familles 1) ($|\theta_1|=1.4114\ldots$) et 4) ($|\theta_1|=1.3775\ldots$) donnent des mesures <2.

On obtient alors respectivement les deux $\mathbb{Q}(i)$-nombres de Pisot de mesure $1.9922\ldots$ et $1.8977\ldots$ et de polynômes minimaux sur $\mathbb{Q}$

$$z^6-z^4+2z^2+2z+1 \quad\text{et}\quad z^6-2z^5+z^4+1.$$

4. $d=-3$. Comme u_1 est de module 1, le lemme 1 montre qu'on peut supposer $u_1=1$. On considère la fonction H comme dans les cas précédents et on obtient alors

$$u_2 \in \{0,1,1+j,1+\overline{j},\pm j,\pm\overline{j}\}.$$

De la même manière que pour les cas précédents on montre que $u_2 \neq 0$.

• $u_2 = 1$. Le lemme 5 appliqué à la fonction f donne pour valeurs possibles de P,

$$z^n(z^2-z-1)\pm j(1-z^2) \quad \text{ou} \quad z^n(z^2-z-1)\pm\overline{j}(1-z^2).$$

On obtient ainsi deux suites de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$-nombres de Pisot convergeant vers le nombre d'or θ_∞.

Seul le premier terme de la première suite est de mesure inférieure à 2, soit θ_1 racine de $z^3-jz^2-z-\overline{j}$ de module $1.3556\ldots$; la preuve ici est la même que celle pour le cas où $d=-1$ et $u_2=1$. On obtient ainsi le $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$-nombre de Pisot de mesure $1.8378\ldots$ et de polynôme minimal sur le corps des rationnels $z^6-z^5-z^4+z+1$.

• $u_2=j$ *ou* $u_2=\overline{j}$. Le lemme 2 appliqué à la fonction $f(z)\overline{f}(-z)$ montre que cette fonction est nécessairement constante et par suite que $-1/\theta$ est racine de P; ce cas sera étudié séparément.

• $u_2=-j$. Montrons que ce cas ne peut pas avoir lieu. Considérons la fonction auxiliaire f_0 définie par

$$f_0(z)=(z^2+jz-1)/(z^2+(1+j)z-1);$$

f_0 admet un pôle simple à l'intérieur du disque unité $1/\overline{\varrho}_0$ ($|\varrho_0|=2.07\ldots$), vérifie $|f_0(z)|<1$ si $|z|=1$ et admet un développement de Taylor au voisinage de l'origine de la forme

$$f_0(z)=1+z+(1+j)z^2+\ldots$$

Le lemme 2 appliqué à la fonction $f_0(z)f(-z)$ montre que ce cas ne peut pas avoir lieu.

De même le cas $u_2=-\overline{j}$ ne peut pas avoir lieu puisqu'il conduit à la fraction conjuguée de f.

• $u_2=1+j$. Considérons la fonction g définie par $g(z)=N(z)/D(z)$, où

$$N(z)=(z^2+(1+j)z-1)f(z)-(z^2+jz-1),$$
$$D(z)=(z^2-(1+\overline{j})z-1)-(z^2-\overline{j}z-1)f(z).$$

Alors g est une fonction de Schur et de la même manière que pour le cas $d=-1$ et $u_2=1+i$ on déduit que P a l'une des 6 formes possibles :

$$z^n(z^2-(1+\overline{j})z-1)\pm\xi(z^2+jz-1), \qquad n\geq 1,$$

ξ désignant l'une des 6 unités de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$.

Chacune de ces familles donne lieu à une suite de $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$-nombres de Pisot convergeant vers le $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$-nombre de Pisot racine du polynôme $z^2-(1+\overline{j})z-1$ et de module $2.07\ldots$; tous ces $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$-nombres de Pisot sont de mesure ≥ 2.

En effet, si $z=\sqrt{2}e^{i\alpha}$ où $\alpha\in[0,2\pi]$ alors

$$|z^2-1+jz|^2=7-4\cos(2\alpha)+\sqrt{2}\cos(\alpha)+3\sqrt{6}\sin(\alpha)=R(\alpha)$$

et

$$|z^2-1-(1+\overline{j})z|^2=R(\alpha)+4-4\sqrt{2}\cos(\alpha)=L(\alpha).$$

On déduit que si $\pi/4<\alpha<7\pi/4$ alors $L(\alpha)>R(\alpha)$. De même, si $0\leq\alpha\leq\pi/4$ et $n\geq 1$ alors

$$2^nL(\alpha)-R(\alpha)\geq 15-4\cos(2\alpha)+3\sqrt{6}\sin(\alpha)-7\sqrt{2}\cos(\alpha)\geq 11-7\sqrt{2}>0.$$

Sur l'intervalle $[-\pi/10,0]$, la fonction L est croissante et la fonction R est majorée par 5.2; on déduit alors pour $n\geq 2$ les inégalités suivantes :

$$L(\alpha)\geq L(-\pi/10)>1.45>(5.2)/2^n\geq R(\alpha)/2^n.$$

Sur l'intervalle $[-\pi/4,-\pi/7]$, la fonction L est décroissante et la fonction R est majorée par 5.1; on déduit alors pour $n\geq 2$ les inégalités suivantes :

$$L(\alpha)\geq L(-\pi/7)>1.5>(5.1)/2^n>R(\alpha)/2^n.$$

Enfin, sur l'intervalle $[-\pi/7,-\pi/10]$ la fonction R est majorée par 4 et la fonction L est minorée par 0.5; on déduit alors pour $n\geq 3$ l'inégalité $2^nL(\alpha)>R(\alpha)$, et le théorème de Rouché entraîne le résultat. Pour $n\leq 2$, le calcul direct montre que ce cas ne peut pas avoir lieu.

Le cas $u_2=1+\overline{j}$ conduit aux polynômes conjugués et les mesures sont les mêmes.

Supposons enfin que $P(z)=(z-\theta)(z+1/\theta)$ ou $P(z)=(z-\theta)(z+1/\overline{\theta})$ ou $P(z)=(z-\theta)(z-1/\theta)$.

Le degré de P ainsi que ses coefficients (entiers d'un corps quadratique imaginaire) sont bornés, on déduit alors un nombre fini de valeurs possibles; les calculs montrent que deux cas seulement peuvent avoir lieu :

• $d=-3$. Pour ce cas le polynôme P prend douze valeurs différentes; en changeant au besoin $P(z)$ en $P(-z)$ ou bien $P(z)$ en $\overline{P}(z)$ on peut se restreindre aux valeurs suivantes :

$$z^2+jz-1,\quad z^2-jz+j,\quad z^2-z+j.$$

Les mesures de ces polynômes sont égales et valent $1.7220\ldots$

• $d = -7$. Pour ce cas le polynôme P prend 4 valeurs différentes. Pour la même raison que précédemment on peut se restreindre à la valeur suivante :

$$z^2 + (1 + i\sqrt{7})z/2 - 1.$$

La mesure de ce polynôme est égale à $1.8832\ldots$

Il ne reste donc plus qu'à rajouter les $\mathbb{Q}(i)$-nombres de Pisot $\pm i\theta_0$ et $\pm i\theta_1$ et les $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$-nombres de Pisot $\pm j\theta_0, \pm j\theta_1, \pm \bar{j}\theta_0, \pm \bar{j}\theta_1$, où θ_0 et θ_1 désignent les nombres de Pisot inférieurs à $\sqrt{2}$.

Ceci achève la preuve du théorème.

Théorème 3. *Les valeurs de $M(\theta)$ inférieures à 2 de l'énoncé du théorème 2 sont des points d'accumulation de l'ensemble des mesures des entiers algébriques.*

P r e u v e. La construction de Salem montre que si θ est un $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombre de Pisot non réel ($d< 0$) de polynôme minimal P sur $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ non réciproque alors l'équation

$$(*) \qquad z^n P(z) + \xi P^*(z) = 0,$$

où ξ désigne une unité de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, admet pour n assez grand comme racine hors du disque unité un $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombre de Salem τ_n. De plus, la suite $(\tau_n)_n$ converge vers θ.

Comme θ n'est pas réel, en considérant l'équation conjuguée complexe de $(*)$ on déduit $\lim M(\tau_n) = M(\theta)$, d'où le résultat.

2.2. *Application à la détermination de polynômes réciproques de petites mesures.* Avec les notations du théorème 3 et de sa preuve, l'équation

$$z^n P(z) + \xi P^*(z) = 0$$

admet à partir d'un certain rang comme racine hors du disque unité un $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombre de Salem non réel τ_n. De plus, $\lim M(\tau_n) = M(\theta) \ge m = 1.722\ldots$, où m désigne la plus petite mesure des $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombres de Pisot.

On déduit alors que si on fixe une borne supérieure $A < m$ pour les $M(\tau_n)$ on obtient au plus un nombre fini de valeurs des τ_n.

Le lemme suivant montre que l'équation précèdente admet pour $n \ge 16$, pour P l'un quelconque des polynômes de l'énoncé du théorème 2 et pour ξ une unité quelconque du corps auquel appartiennent les coefficients de P, une racine hors du disque unité de valeur absolue > 1.3.

On déduit alors que τ_n est ou bien non réel de mesure supérieure à 1.69 ou bien réel de mesure supérieure à 1.3.

Lemme 6. *Soient θ un $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombre de Pisot non réel de mesure < 2 et de polynôme minimal P sur $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$, n un entier naturel ≥ 16 et ξ est une* *unité de* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. *Alors le polynôme* Q_n *défini par* :

$$Q_n(z) = z^n P(z) + \xi P^*(z)$$

admet une racine τ_n *telle que* $|\tau_n| \geq 1.3$.

Preuve. Soit θ un tel $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombre de Pisot; d'après le théorème 2 on a

$$|\theta| > \sqrt{1.722} > 1.3$$

et l'on peut vérifier par un simple calcul que θ est sans conjugué sur le cercle $|z| = 1/1.3$.

Si α est un conjugué de θ de module < 1 au-dessus du corps $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ alors

$$|z - \alpha|^2 - |1 - \overline{\alpha}z|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |\alpha|^2);$$

on déduit alors pour $|z| = 1.3$ l'inégalité

$$|P(z)/\overline{P}^*(z)| > |(z - \theta)/(1 - \overline{\theta}z)|.$$

De manière identique à la preuve de la construction de Salem [4] on a

$$|(z - \theta)/(1 - \overline{\theta}z)|^2 \geq g(|\theta|) = (|\theta|^2 - 2.6|\theta| + 1.69)/(1.69|\theta|^2 - 2.6|\theta| + 1).$$

Comme la fonction g est croissante sur l'intervalle $[\sqrt{1.722}, \sqrt{2}]$, on déduit l'inégalité

$$|(z - \theta)/(1 - \overline{\theta}z)|^2 > g(\sqrt{1.722}) > 0.0003,$$

et par suite pour $|z| = 1.3$ et $n \geq 16$ on a

$$|z^n P(z)/\overline{P}^*(z)|^2 \geq (1.69)^n \cdot 0.0003 > 1,$$

et comme le polynôme P admet une racine θ de module supérieur à 1.3, le théorème de Rouché entraîne le résultat.

On peut donc déterminer tous les $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombres de Pisot non réels de mesure < 1.69 ainsi que les nombres de Salem de mesure < 1.3 de cette construction en affectant à P les valeurs de l'énoncé du théorème 2, à n les entiers de 1 à 16 et à ξ les unités du corps correspondant.

Les calculs ci-dessous montrent qu'on n'obtient que des $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombres de Salem non réels.

Pour chaque valeur de P on précise dans l'ordre suivant et sur la même ligne du tableau 1 l'unité ξ, l'entier n, le degré du polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ du $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombre de Salem et enfin sa mesure.

Dans le cas où $|\tau_n|$ est un nombre de Salem (lemme 1), on note σ_k^2 la mesure de τ_n, σ_k désignant le k-ième plus petit nombre de Salem connu selon la notation de Boyd [5].

Tableau 1

d	$P(z)$				
-7	$z^2+(1+\sqrt{-7})z/2-1$	1	3	10	$1.5817\ldots$
		1	5	14	$1.5671\ldots$
-1	z^3+z+i	$+1$	11	16	$\sigma_{22}^2=1.6400\ldots$
		-1	09	20	$\sigma_7^2=1.5138\ldots$
		$-i$	10	20	$\sigma_{19}^2=1.5907\ldots$
		$+i$	08	20	$\sigma_1^2=1.3836\ldots$
		$+i$	12	20	$\sigma_{38}^2=1.6731\ldots$
	z^3-z^2+i	1	6	16	$1.5771\ldots$
	$z^3+iz^2-(1-i)z-1$	1	4	12	$1.6385\ldots$
	z^4-iz^3-1	$+i$	7	20	$\sigma_5^2=1.4796\ldots$
		-1	8	16	$\sigma_{22}^2=1.6400\ldots$
	$z-(1+i)$	-1	7	12	$1.5823\ldots$
-3	z^2+jz-1	$+1$	06	16	$1.4280\ldots$
		$+1$	08	12	$1.5264\ldots$
		$+1$	13	24	$1.6750\ldots$
		$+1$	15	34	$1.6895\ldots$
		-1	05	12	$1.6123\ldots$
		-1	09	22	$1.6595\ldots$
		-1	14	30	$1.6755\ldots$
		$-j$	04	12	$1.4986\ldots$
		$-j$	11	26	$1.6552\ldots$
		$+j$	08	14	$1.5897\ldots$
		$+j$	10	18	$1.5674\ldots$
		$+\bar{j}$	11	20	$1.6219\ldots$
		$+\bar{j}$	13	20	$1.6710\ldots$
		$-\bar{j}$	10	24	$1.6604\ldots$
		$-\bar{j}$	12	20	$1.6336\ldots$
	$z^3-jz^2-\bar{j}$	-1	7	16	$1.4672\ldots$
		-1	8	18	$1.6225\ldots$
		$-\bar{j}$	4	14	$1.5897\ldots$
	$z^3+\bar{j}z+1$	$+1$	12	20	$\sigma_{38}^2=1.6731\ldots$
		-1	09	20	$\sigma_7^2=1.5138\ldots$
		$-j$	03	12	$1.6123\ldots$
		$-j$	10	20	$\sigma_{19}^2=1.5907\ldots$
		$+\bar{j}$	11	16	$\sigma_{22}^2=1.6400\ldots$
		$-\bar{j}$	03	12	$1.6123\ldots$
		$-\bar{j}$	08	20	$\sigma_1^2=1.3836\ldots$

R e m a r q u e s. 1. Soit τ_n le nombre de Salem racine du polynôme

$$A_n(z)=z^nP_0(z)\pm P_0^*(z),$$

où $P_0(z) = z^3 - z - 1$. Alors $i\tau_n$ (resp. $j\tau_n$) est racine du polynôme

$$z^n P(z) \pm \xi P^*(z),$$

où $\xi = i^{n+3}$ et $P(z) = z^3 + z + i$ (resp. $\xi = j^{n+3}$ et $P(z) = z^3 + \overline{j}z + 1$).

Réciproquement, si τ_n est la racine de valeur absolue > 1 du polynôme

$$Q_n(z) = z^n P(z) + \xi P^*(z),$$

où ξ est une puissance de i (resp. de j), alors τ_n/i (resp. τ_n/j) est un nombre de Salem racine de A_n si et seulement si ξ/i^{n+1}(resp. ξ/j^n) est réel.

Ceci explique pourquoi dans le cas où $P(z) = z^3+z+i$ (resp. $z^3+\overline{j}z+1$) on obtient des multiples de nombres de Salem.

Les calculs précédents montrent que la réciproque reste vraie si on suppose $|\tau_n| \leq 1.3$ (resp. $|\tau_n| < \sqrt{1.6123\ldots}$) et sans poser de condition sur ξ.

2. On a la même propriété que précédement dans le cas où $P(z) = z^4 - iz^3 - 1$ en considérant le polynôme $z^4 - z^3 - 1$ au lieu du polynôme P_0.

En conclusion l'application de la construction de Salem aux $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombres de Pisot de mesure < 2 fournit des $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombres de Salem non réels de mesure < 1.69. Les nombres de Salem qu'on peut en déduire (lemme 1) sont parmi ceux qu'on obtient en appliquant la construction de Salem aux nombres de Pisot $< \sqrt{2}$.

3. Cas cubique totalement réel

3.1. Soient K un corps cubique totalement réel et θ un K-nombre de Pisot de polynôme minimal P (resp. F) sur K (resp. sur $\mathbb{Q}$). De la définition 2 on déduit que soit $P = F$ et dans ce cas $\pm\theta$ est un nombre de Pisot, soit $P \neq F$ et dans ce cas

$$F(z) = \prod_{\sigma \in G} \sigma P(z).$$

Si le polynôme F est réciproque alors il est ou bien de degré 2 et dans ce cas $P = F$, ou bien de degré 6 et dans ce cas P est de degré 2 et $P \neq F$.

Par la suite on suppose que F est non réciproque.

La fraction rationnelle définie par

$$f(z) = \varepsilon P(z)/P^*(z),$$

où $\varepsilon = \pm 1$ vérifie $f(0) > 0$, est une fonction méromorphe sur un ouvert contenant le disque unité, a un seul pôle $1/\theta$ (qu'on peut supposer positif en changeant au besoin θ en $-\theta$) à l'intérieur du disque unité, admet un développement en série de Taylor au voisinage de l'origine à coefficients entiers de K et est de module 1 sur le cercle unité.

Désignons par $(f_i)_{i\geq 0}$ la suite des transformées de Schur de f définie par récurrence, à partir de $f_0 = f$ et aussi longtemps que $|f_{i-1}(0)| < 1$ par la formule

$$f_i(z) = \frac{f_{i-1}(z) - f_{i-1}(0)}{z(1 - f_{i-1}(z) f_{i-1}(0))}.$$

Les f_i sont alors bornées par 1 sur le cercle unité.

Chamfy [6] a montré qu'il existe un entier $p \geq 0$ tel que $|f_p(0)| \geq 1$. Si $p = 0$ alors $f_0(0) = f(0) \geq 1$ (ce cas a été traité par Dufresnoy et Pisot [7]) et si $p \geq 1$ alors $0 < f(0) < 1$ (ce cas a été traité par M. J. Bertin [2]).

Comme dans [2], on note N_p l'ensemble des fractions vérifiant les propriétés précédentes.

Rappelons quelques résultats qui nous seront utiles pour déterminer les valeurs possibles de θ lorsque $P \neq F$ et $M(\theta) < 4$.

LEMME 1 [7]. *Si f appartient à N_0 et est de rang s (i.e. $f = \varepsilon P/P^*$ et $\deg P = s$), et si $\sum_{n\geq 0} u_n z^n$ est son développement en série de Taylor au voisinage de l'origine alors pour $n = 1, \ldots, s+1$ (resp. sauf si $n = 2$ et $u_0 = 1$) il existe un seul polynôme D_n (resp. D_n^+) de degré n à coefficients dans K tel que si $E_n(z) = -z^n D_n(1/z)$ (resp. $E_n^+(z) = z^n D_n^+(1/z)$) alors $E_n(0) = 1$ (resp. $E_n^+(0) = 1$) et la fraction D_n/E_n (resp. D_n^+/E_n^+) admet un développement en série de Taylor au voisinage de l'origine de la forme*

$$u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1} + w_n z^n + \ldots$$
$$(\textit{resp. } u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1} z^{n-1} + w_n^+ z^n + \ldots).$$

En outre, les polynômes D_n (resp. D_n^+) vérifient les propriétés suivantes :

(1) *Pour $n = 1, \ldots, s-1$,*

$$D_{n+2}(z) = (1+z) D_{n+1}(z) - z(u_{n+1} - w_{n+1}) D_n(z)/(u_n - w_n).$$

Pour $n = 3, \ldots, s-1$,

$$D_{n+2}^+(z) = (1+z) D_{n+1}^+(z) - z(u_{n+1} - w_{n+1}^+) E_n^+(z)/(u_n - w_n^+).$$

(2) *Sauf peut être pour $n = 1$ (resp. $n \leq 2$) les polynômes D_n (resp. D_n^+) possèdent chacun un zéro unique τ_n (resp. τ_n^+) hors du disque unité et les autres à l'intérieur du disque unité et les deux suites τ_n et τ_n^+ vérifient les inégalités*

$$\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_s \leq \tau_{s+1} = \theta = \tau_{s+1}^+ \leq \tau_s^+ < \tau_{s-1}^+ < \ldots < \tau_3^+.$$

(3) *Les quantités w_n et w_n^+ sont des fonctions rationnelles des u_n indépendantes de f vérifiant :*

$$w_1 < u_1,\ w_2 < u_2,\ w_n < u_n < w_n^+ \quad \textit{pour } n = 3, \ldots, s-1,$$
$$w_s = u_s < w_s^+ \textit{ si } f(1) = 1 \quad \textit{et} \quad w_s < u_s = w_s^+ \textit{ sinon.}$$

(4) *Si on note* $D_n(z)=\sum_{0\le i\le n} a_{i,n}z^n$, *alors*

$$w_n=-1+\sum_{0\le i\le n-1} a_{i,n}u_i.$$

Lemme 2 [2]. *Si* $f\in N_p$ *où* $p\ge 0$ *alors*

(1) *les polynômes* D_n (*resp.* D_n^+) *définis précédemment existent pour* $n=1,\dots,s+1$ *et vérifient les propriétés* 1 *et* 2 *du lemme* 1 *sauf lorsque* $f_p(0)=-1$ (*resp. sauf lorsque* $f_p(0)=1$) *et* $n=p+2$;

(2) *on a les inégalités suivantes* :

$$(\theta^2+u_0)(u_0-1)/\theta\le u_1\le(\theta^2-u_0)(1+u_0)/\theta$$

et pour $n\ge 2$,

$$w_n^+-(1+1/\theta)D_n^+(\theta)(w_{n-1}^+-u_{n-1})/D_{n-1}^+(\theta)\le u_n$$

et

$$u_n\le w_n+(1+1/\theta)D_n(\theta)(u_{n-1}-w_{n-1})/D_{n-1}(\theta).$$

Théorème 4. *Soient* K *un corps cubique totalement réel de discriminant* D_K *et* $\pm\theta$ *un* K*-nombre de Pisot de mesure* $M(\theta)$ *et de polynôme minimal* P *sur* K. *Si* $\pm\theta$ *n'est pas un nombre de Pisot alors* $M(\theta)\ge 4$ *sauf dans les cas suivants* :

(a) $D_K=81$ *et*

$$P(z)=z^3-tz^2-t\quad \textit{où}\quad t^3-3t^2+1=0\quad \textit{et}\quad M(\theta)=3.7508\dots$$

ou bien

$$P(z)=z^4+tz^3-1\quad \textit{où}\quad t^3-3t+1=0\quad \textit{et}\quad M(\theta)=3.8035\dots;$$

(b) $D_K=49$ *et*

$$P(z)=z^4+tz^3-1\quad \textit{où}\quad t^3-t^2-2t+1=0\quad \textit{et}\quad M(\theta)=3.3555\dots$$

ou bien

$$P(z)=z^4+tz^3-1\quad \textit{où}\quad t^3-2t^2-t+1=0\quad \textit{et}\quad M(\theta)=3.4931\dots$$

ou bien

$$P(z)=z^3-tz^2-t\quad \textit{où}\quad t^3-2t^2-t+1=0\quad \textit{et}\quad M(\theta)=3.5041\dots$$

Preuve. Soient donc K un corps cubique totalement réel de discriminant D_K et θ un K-nombre de Pisot de mesure <4 et qui n'est pas un nombre de Pisot. Du théorème 1, on déduit $D_K\le 6912$. On connaît d'après [8] tous les corps cubiques de discriminant ≤ 6912, la détermination est donc ramenée à un nombre fini de corps connus.

Si P est le polynôme minimal de θ sur K alors P est non réciproque. En effet, si P était réciproque alors θ serait un entier algébrique totalement réel de degré 6 sur $\mathbb{Q}$; un résultat de Schinzel (cf. théorème 2 de [11]) montre dans ce cas que $M(\theta) > ((1+\sqrt{5})/2)^3 > 4$.

On peut supposer qu'au moins deux conjugués de θ hors du disque unité sont positifs. En effet, si θ est un K-nombre de Pisot alors $-\theta$ l'est aussi et est de même mesure que θ.

Dans ce qui suit, σ et τ désignent les plongements de K dans $\mathbb{R}$ distincts de l'identité; θ, $\sigma\theta$ et $\tau\theta$ les conjugués de θ hors du disque unité et M le produit de ces trois nombres.

Par la suite on distingue deux cas suivant le degré de $P(0)$ sur $\mathbb{Q}$.

1. *Cas où* $P(0) \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas θ est de degré ≥ 2 sur K. Des inégalités

$$4 > M(\theta) \geq (P(0))^3,$$

on déduit $P(0) = \pm 1$.

1.1. *Cas où* $M > 0$. On associe alors à θ (resp. $\sigma\theta$ et $\tau\theta$) la fraction $f(z) = P(0)P(z)/P^*(z)$ (resp. $P(0)\sigma P(z)/\sigma P^*(z)$ et $P(0)\tau P(z)/\tau P^*(z)$) qui est un élément de N_0.

Si D_n est un polynôme associé suivant le lemme 1 à la fraction f, les deux conjugués de D_n, à savoir σD_n et τD_n (polynômes dont les coefficients sont les conjuguées par σ et τ des coefficients de D_n), sont aussi associés aux deux fractions conjugués de f suivant le lemme 1 (unicité des polynômes D_n) et les inégalités (2) et (3) du lemme 1 restent vraies par conjugaison, ce qui donne un nombre fini de valeurs pour l'entier u_n de K. Les entiers algébriques u_n de K s'écrivent $u_n = i_n + j_n\alpha + k_n\omega$, où i_n, j_n et $k_n \in \mathbb{Z}$ et $\{1, \alpha, \omega\}$ est une base des entiers de K. Pour $D_K \leq 6912$, la base des entiers est connue [8]. Déterminer u_n revient donc à déterminer i_n, j_n et k_n.

Si $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ sont connus, les polynômes $D_1, \ldots, D_n$ le sont aussi d'après le lemme 1(2). On calcule w_n par le lemme 1(4). Les inégalités

$$w_n \leq u_n \leq w_n + (1+A)(u_{n-1} - w_{n-1})D_n(A)/(AD_{n-1}(A))$$

ainsi que les inégalités conjuguées, où A est remplacé respectivement par B et C, permettent de déterminer u_n, puis D_n et w_{n+1}.

L'inégalité de gauche provient du lemme 1(3); celle de droite résulte de l'inégalité $D_{n+1}(A) < 0$, où $A = 4$, $B = 2$, et $C = 4^{1/3}$ sont respectivement des bornes pour θ, $\sigma\theta$ et $\tau\theta$.

(En fait, on peut choisir des valeurs pour A, B et C qui décroissent avec n comme dans [3], toutefois à cause de la complexité des calculs on préfère les laisser invariants.)

En résolvant successivement les trois premiers systèmes d'inégalités ($n = 1, 2$ et 3) où K est tel que $D_K \leq 6912$, et en ne retenant que les valeurs de u_3 pour lesquelles le produit des racines > 1 du polynôme à coefficients rationnels $(D_4)(\sigma D_4)(\tau D_4)$ est < 4, on trouve $u_1 = u_2 = 1$ ou bien $u_1 = 1, u_2 = 2$ et $u_3 = 2$ ou 3.

• $u_1 = u_2 = 1$. Ce cas donne des nombres de Pisot [7].

• $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ *et* $u_3 = 2$. Ce cas donne lieu à un nombre de Pisot. En effet, le polynôme D_4 s'écrit $D_4(z) = (1+z)D_3(z) = (1+z)(1+z^2-z^3)$; par suite, θ est racine de D_3, d'où le résultat.

• $u_1 = 1$, $u_2 = 2$ et $u_3 = 3$. On détermine de la même manière u_4 et u_5, et en éliminant les cas qui donnent des nombres de Pisot on trouve $u_4 = 4$ et $u_5 = 7$, puis $u_6 = w_6 = 11$, ce qui donne encore un nombre de Pisot. On conclut alors que si les conjugués de θ hors du disque unité sont de même signe et si $P(0) \in \mathbb{Z}$, alors $M(\theta) \geq 4$.

1.2. *Cas où* $M < 0$. Dans ce cas la fraction $\tau f(-z) \in N_0$ et admet comme pôle dans le disque unité $-1/\tau\theta$. Si D_n est associé à la fraction f comme pour le cas précédent alors σD_n est associé à σf et $\tau D_n(-z)$ est associé à $\tau f(-z)$ seulement lorsque n est pair.

Dans ce cas les inégalités pour $u_1, \sigma u_1$ et $-\tau u_1$ sont identiques au cas précédent, soit :

$$0 < u_1 < 2(\theta - 1/\theta), \quad 0 < \sigma u_1 < 2(\sigma\theta - 1/\sigma\theta), \quad 0 < -\tau u_1 < 2((1/\tau\theta) - \tau\theta).$$

On en déduit que u_1 engendre K et en résolvant ce système sous la condition du lemme 1(2) on trouve $D_K \leq 2233$.

On obtient ensuite de manière identique au cas précédent des inégalités pour u_2, σu_2, et τu_2, et en cherchant les u_2 possibles sous la condition du lemme 1(2) on trouve $D_K \leq 321$.

On détermine ensuite les u_3 possibles sous la même condition, on trouve $D_K \leq 81$.

Cas $D_K = 49$. Si t est une racine du polynôme $t^3 + t^2 - 2t - 1$, alors $\{1, t, t^2\}$ est une base des entiers de K. Pour ce cas on a deux valeurs de u_1 soit $2 - t - t^2$ et $-t$.

• $u_1 = 2 - t - t$. Dans ce cas $u_2 = 5 - t - 2t^2$ et $u_3 = 13 - 4t - 6t^2$. En cherchant les valeurs de u_4 possibles on trouve $u_4 = w_4 = 30 - 7t - 13t^2$, ou bien $u_4 = 35 - 8t - 15t^2$.

Si $u_4 = w_4$ alors θ est un K-nombre de Pisot de degré 4 sur K et de polynôme minimal sur K, $-D_4(z) = z^4 + (t^2 + t - 2)z^3 - 1$, les conjugués de θ hors du disque unité sont $1.1736\ldots$, $2.3264\ldots$ et $-1.2794\ldots$ et la mesure de θ est $3.49316\ldots$

Si $u_4 = 35 - 8t - 15t^2$, on ne trouve aucune valeur de u_5 sous la condition du lemme 1(2). On déduit que ce cas ne peut pas avoir lieu.

• $u_1 = -t$. Dans ce cas $u_2 = t^2$ et $u_3 = t^2 - 3t - 1$ et on trouve deux valeurs possibles pour u_4 : ou bien $u_4 = w_4 = 4t^2 - t - 1$ ou bien $u_4 = 5t^2 - t - 1$.

Si $u_4 = w_4$ alors θ est un K-nombre de Pisot ayant pour polynôme minimal sur K, $-D_4(z) = z^4 + tz^3 - 1$. Les conjugués de θ hors du disque unité sont $1.1328\ldots$, $1.9390\ldots$ et $-1.5275\ldots$, et $M(\theta) = 3.35556\ldots$

Le cas $u_4 = 5t^2 - t - 1$ ne donne aucune valeur pour u_5 sous la même condition que précédemment. On en déduit que ce cas ne peut pas avoir lieu.

Cas $D_K = 81$. Si t est une racine du polynôme t^3-3t-1, alors l'ensemble $\{1, t, t^2\}$ est une base des entiers de K.

Pour ce cas on trouve une seule valeur de u_1, à savoir $u_1 = -t$, qui correspond à $u_2 = t^2$ et $u_3 = -4t - 1$. Ce cas donne une seule valeur possible pour u_4, $u_4 = w_4 = t + 4t^2$; et par suite θ est un K-nombre de Pisot ayant pour polynôme minimal sur K, $-D_4(z) = z^4 + tz^3 - 1$. Les conjugués de θ hors du disque unité sont $1.0995\ldots$, $1.7264\ldots$ et -2.0036, et $M(\theta) = 3.80357\ldots$

2. *Cas où* $P(0) \notin \mathbb{Z}$. Dans ce cas $P(0)$ engendre K et le discriminant du polynôme minimal Q de $P(0)$ sur $\mathbb{Q}$ est $\geq D_K$. Des inégalités $4 > M(\theta) > M(P(0))$, on déduit que les coefficients de Q sont bornés et que $P(0)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

En utilisant les inégalités de Mahler liant les coefficients et la mesure de Q et en ne gardant que les polynômes irréductibles à racines réelles tels que $Q(0) > 0$ on obtient 21 valeurs possibles pour Q.

Pour chacune de ces valeurs on donne (par ordre croissant de mesure) sur la même ligne du tableau 2 et dans l'ordre suivant les coefficients du polynôme Q, son discriminant et une valeur approchée de ses racines.

Tableau 2

1	−2	−1	1	049	−0.80	0.55	2.24
1	−1	−2	1	049	−1.24	0.44	1.80
1	−3	+0	1	081	−0.53	0.65	2.87
1	+0	−3	1	081	−1.87	0.34	1.53
1	−2	−2	2	148	−1.17	0.68	2.48
1	−3	−1	2	229	−0.86	0.74	3.11
1	−3	−1	1	148	−0.67	0.46	3.21
1	−1	−3	1	148	−1.48	0.31	2.17
1	−3	+0	3	081	−0.87	1.34	2.53
1	−3	−2	1	257	−0.83	0.34	3.49
1	−2	−3	1	257	−1.19	0.28	2.91
1	−4	+1	1	169	−0.37	0.72	3.65
1	+1	−4	1	169	−2.65	0.27	1.37
1	+0	−4	2	148	−2.21	0.53	1.67
1	−3	−2	3	473	−1.28	0.79	3.33
1	−2	−3	2	316	−1.34	0.52	2.81
1	−4	+0	2	404	−0.65	0.78	3.86
1	−4	+0	1	229	−0.47	0.53	3.93
1	+0	−4	1	229	−2.11	0.25	1.86
1	−2	−3	3	321	−1.46	0.76	2.69
1	−3	−1	4	229	−1.11	1.25	2.86

On en déduit que $D_K \leq 473$, que si $K = \mathbb{Q}(P(0))$ alors le discriminant du polynôme minimal de $P(0)$ sur $\mathbb{Q}$ est égal à D_K (on déduit alors que la partie $\{1, P(0), P(0)^2\}$ est une base des entiers de K) et que l'entier de K, $\varepsilon P(0)$ où $\varepsilon = \pm 1$, ne peut être un K-nombre de Pisot de mesure < 4 (si $M(P(0)) = 4$ alors $P(0)$ ne peut être un $\mathbb{Q}(P(0))$-nombre de Pisot sauf s'il est racine du polynôme $z^3 - 3z^2 - z + 4$ qui est de discriminant 229); et par suite $P(0)$ admet au moins un conjugué de module < 1.

Un simple calcul montre que les entiers cubiques totalement positifs sont de mesure $\geq M(t) > 5.0489\ldots$, où t est racine du polynôme $t^3 - 5t^2 + 6t + 1$; on en déduit que les conjugués de $P(0)$ ne sont pas de même signe car sinon

$$M(P(0)) = M(|P(0)|) > 5.$$

D'autre part, $P(0)$ admet au moins un conjugué (on le note encore $P(0)$) en valeur absolue > 1; si $u_0 = \varepsilon P(0) > 1$ où $\varepsilon = \pm 1$, alors les conjugués de u_0, σu_0 et τu_0 où σ et τ désignent les deux plongements de K dans $\mathbb{R}$ distincts de l'identité, ne peuvent pas être tous les deux dans l'intervalle $]-1, 0[$. Sinon l'entier totalement positif $u_0 + 1$ serait un nombre de Pisot et dans ce cas

$$M(u_0 + 1) = u_0 + 1 > 5,$$

et par suite $M(u_0) = u_0 > 4$. On distingue alors 3 cas possibles suivant les valeurs de σu_0 et τu_0.

2.1. *Cas où* u_0 *admet au moins deux conjugués supérieurs à* 1. Si on note τu_0 le conjugué de u_0 supérieur à 1, le tableau 2 montre que ce cas n'a lieu que si $D_K = 81$ et avec ces notations on a

$$u_0 = 2.53\ldots, \quad \sigma u_0 = -0.87\ldots \quad \text{et} \quad \tau u_0 = 1.34\ldots$$

2.1.1. *Cas où* $M > 0$. Si on associe à θ (resp. $\sigma\theta$ et $\tau\theta$) la fraction f (resp. σf et τf) comme pour le cas où $P(0) \in \mathbb{Z}$, alors les deux fractions f et $\tau f \in N_0$ et il existe un entier $p \geq 1$ tel que la fraction $-\sigma f \in N_p$. (Par la suite on dira simplement que $f \in N_p$ où p désigne un entier naturel non nul.)

Des inégalités

$$\theta > u_0, \quad \sigma\theta > 1, \quad \tau\theta > \tau u_0 \quad \text{et} \quad M(\theta) < 4,$$

on déduit

$$\theta < 2.97, \quad \sigma\theta < 1.18 \quad \text{et} \quad \tau\theta < 1.58.$$

Le lemme 1(2), (3) ainsi que le lemme 2(2) entraînent alors les inégalités suivantes pour $u_1, \sigma u_1$ et τu_1 :

$$5.4 < u_1 < 7.4, \quad -0.82 < \sigma u_1 < 0.24 \quad \text{et} \quad 0.8 < \tau u_1 < 1.71.$$

En résolvant ce système on trouve que u_1 ne peut prendre qu'une seule valeur, soit $u_1 = w_1$, et ce cas n'est pas possible puisque θ est de degré ≥ 2

(en fait, θ est de degré ≥ 3 car si θ était de degré 2 alors il serait totalement réel et la conclusion serait la même que pour le cas où P est réciproque).

2.1.2. *Cas où* $M < 0$. Ici trois cas se présentent: le cas où $\theta < 0$, le cas où $\sigma\theta < 0$ et le cas où $\tau\theta < 0$.

Si $\theta < 0$ ou bien $\tau\theta < 0$ alors on considère respectivement les fractions $f(-z)$ ou $\tau f(-z)$ qui sont des éléments de N_0 et si $\sigma\theta < 0$ on considère la fraction $-\sigma f(-z)$ qui est un élément de N_p, et les mêmes calculs que précédemment montrent que ce cas ne peut pas avoir lieu.

2.2. *Cas où* u_0 *admet un conjugué inférieur à* -1 *noté* τu_0 *et un conjugué positif noté* σu_0. Le tableau 2 montre que ce cas n'a lieu que pour les corps de discriminant 49, 81, 169, 229, 257, 316, 321 et 473 avec une seule valeur pour u_0 et dans le corps de discriminant 148 avec 3 valeurs pour u_0.

Comme la partie $\{1, u_0, u_0^2\}$ est une base des entiers du corps $K = \mathbb{Q}(u_0)$, on exprimera pour ce cas ainsi que pour les cas qui vont suivre les $(u_k)_{k\geq 0}$ dans cette base, chose qui permet de simplifier les calculs.

2.2.1. *Cas où* $M > 0$. Dans ce cas les fractions f et $-\tau f$ sont des éléments de N_0 et la fraction σf est un élément de N_p. Du lemme 1(2), (3) ainsi que du lemme 2(2), on déduit que seuls les u_0 de discriminant 49 et 148 donnent des valeurs possibles pour u_1 à savoir :

Si $D_K = 49$,

$$\begin{aligned} u_0 &= 1.80\ldots, & \sigma u_0 &= 0.44\ldots, & \tau u_0 &= -1.24\ldots, \\ u_1 &= 4.04\ldots, & \sigma u_1 &= -0.35\ldots, & \tau u_1 &= -0.69\ldots \end{aligned}$$

Si $D_K = 148$,

$$\begin{aligned} u_0 &= 2.48\ldots, & \sigma u_0 &= 0.68\ldots, & \tau u_0 &= -1.17\ldots, \\ u_1 &= 7.63\ldots, & \sigma u_1 &= 0.16\ldots, & \tau u_1 &= -0.80\ldots \end{aligned}$$

Du lemme 1(2), (3) ainsi que du lemme 2(2), on déduit que le deuxième cas donne une seule valeur possible pour u_2, soit $u_2 = w_2$, cas qui ne peut pas avoir lieu car θ est de degré ≥ 3.

Quant au premier cas, il donne $u_2 = w_2$ ou bien $u_2 = 3u_0^2 + 3u_0 - 2$. La première valeur de u_2 n'est pas possible et la seconde ne donne aucune valeur pour u_3.

2.2.2. *Cas où* $M < 0$. Ici trois cas sont à envisager :

• $\theta < 0$. Dans ce cas la fraction $f(-z)$ est un élément de N_0. Le raisonnement est le même que pour le cas précédent. On trouve que seuls les u_0 de discriminant 49, 81, et 148 donnent des valeurs possibles pour u_1, et que seul le u_0 de discriminant 49 donne une valeur pour u_2, à savoir :

$$u_0 = 1.80\dots,\quad \sigma u_0 = 0.44\dots,\quad \tau u_0 = -1.24\dots,$$
$$u_1 = -3.24\dots,\quad \sigma u_1 = -0.19\dots,\quad \tau u_1 = -1.55\dots,$$
$$u_2 = 7.65\dots,\quad \sigma u_2 = 0.53\dots,\quad \tau u_2 = -3.18\dots$$

De la même manière que pour le cas précédent, ce cas ne donne aucune valeur possible pour u_3.

• $\sigma\theta < 0$. Dans ce cas la fraction $\sigma f(-z)$ est un élément de N_p. Seuls les u_0 de discriminant 49 et 148 donnent des valeurs possibles pour u_1 et seul le u_0 de discriminant 49 donne une valeur de u_2 et les valeurs de u_0, u_1, u_2 ainsi que celles de leurs conjugués sont identiques au cas où $\theta > 0$, $\sigma\theta > 0$, $\tau\theta > 0$. Ce cas aussi ne donne aucune valeur possible pour u_3.

• $\tau\theta < 0$. Dans ce cas la fraction $-\tau f(-z)$ est un élément de N_0. Seul les u_0 de discriminant 49, 81 et 148 donnent des valeurs possibles pour u_1 et seul le u_0 de discrimiant 49 donne une valeur pour u_2. Les valeurs de u_0, $-u_1$ et u_2 sont identiques respectivement aux valeurs de u_0, u_1 et u_2 du cas $\theta < 0$. Ce cas donne une valeur pour u_3, soit $u_3 = 17.03\dots$, $\sigma u_3 = 0.43\dots$, $\tau u_3 = 5.52\dots$

La racine > 1 du polynôme D_4 (resp. σD_4, d_4) où D_4 (resp. σD_4, d_4) est associé suivant le lemme 1 à la fraction f (resp. σf, $-\tau f(-z)$), vaut $2.21\dots$ (resp. $1.03\dots$, $1.73\dots$); et ce cas ne donne aucune valeur de u_4 .

On conclut pour ce cas que $M(\theta) \geq 4$.

2.3. *Cas où* u_0 *admet un conjugué compris entre* 0 *et* 1 *noté* σu_0 *et un conjugué compris entre* -1 *et* 0 *noté* τu_0. Le tableau 2 montre que ce cas a lieu pour les corps de discriminant 49, 81, 148, 169, 257 et 404 avec une seule valeur de u_0 et le corps de discriminant 229 avec deux valeurs de u_0.

2.3.1. *Cas où* $M > 0$. Dans ce cas la fraction f est un élément de N_0 et les fractions σf et $-\tau f$ sont des éléments de N_p.

Du lemme 1(2), (3) ainsi que du lemme 2(2), on déduit que seuls les u_0 de discriminant 49, 81, 148 et 169 donnent des valeurs possibles pour u_1 et que toutes ces valeurs de u_0 ne donnent aucune valeur possible pour u_2.

Supposons maintenant que les conjugués de θ hors du disque unité ne soient pas de même signe.

2.3.2. *Cas où* $M < 0$. Ici trois cas sont à envisager :

• $\theta < 0$. Dans ce cas la fraction $f(-z)$ est un élément de N_0. Le raisonnement est le même que précédemment, on trouve que seuls les u_0 de discriminant 49, 81 et 148 donnent des valeurs pour u_1 et que seul le u_0 de discriminant 49 donne des valeurs pour u_2, à savoir :

$$\begin{array}{rlll}
 & u_0 = 2.24\ldots, & \sigma u_0 = 0.55\ldots, & \tau u_0 = -0.80\ldots, \\
\text{et} & (u_1 = -9.09\ldots, & \sigma u_1 = 0.38\ldots, & \tau u_1 = -0.28\ldots \\
\text{et} & \;\; u_2 = 31.78\ldots, & \sigma u_2 = -0.04\ldots, & \tau u_2 = -0.74\ldots \\
\text{ou bien} & \;\; u_2 = 36.83\ldots, & \sigma u_2 = 0.26\ldots, & \tau u_2 = -0.10\ldots) \\
\text{ou bien} & (u_1 = -5.04\ldots, & \sigma u_1 = -0.30\ldots, & \tau u_1 = -0.64\ldots \\
\text{et} & \;\; u_2 = 15.39\ldots, & \sigma u_2 = -0.52\ldots, & \tau u_2 = -0.87\ldots).
\end{array}$$

Du lemme 1(2), (3) ainsi que du lemme 2(2) on déduit qu'aucun de ces cas ne peut donner une valeur de u_3 possible.

• $\sigma\theta < 0$. Dans ce cas la fraction $\sigma f(-z)$ est un élément de N_p. Le raisonnement est le même que précédemment; on trouve que seuls les u_0 de discriminant 49, 81 et 148 donnent des valeurs pour u_1 et qu'aucun d'eux ne donnent de valeur pour u_2.

• $\tau\theta < 0$. Dans ce cas la fraction $-\tau f(-z)$ est un élément de N_p. Le raisonnement est le même que précédemment; on trouve que seuls les u_0 de discriminant 49, 81, 148, 169 et 229 donnent des valeurs possibles pour u_1 et que seuls les u_0 de discriminant 49 et 81 donnent des valeurs pour u_2.

Cas $D_K = 81$:

$$\begin{array}{lll}
u_0 = 2.87\ldots, & \sigma u_0 = 0.65\ldots, & \tau u_0 = -0.53\ldots, \\
u_1 = 8.29\ldots, & \sigma u_1 = 0.42\ldots, & \tau u_1 = 0.28\ldots, \\
u_2 = 26.75\ldots, & \sigma u_2 = 0.93\ldots, & \tau u_2 = -0.68\ldots
\end{array}$$

En cherchant les valeurs possibles pour u_3 on trouve $u_3 = w_3 = 84.32\ldots$ On déduit alors que θ est K-nombre de Pisot de polynôme minimal sur K

$$-D_3(z) = z^3 - tz^2 - t \quad \text{où } t^3 - 3t^2 + 1 = 0,$$

les conjugués de θ hors du disque unité sont $3.1665\ldots$, $1.1479\ldots$ et $-1.0318\ldots$, et $M(\theta) = 3.7508\ldots$

Cas $D_K = 49$. Les quantités u_0, $-u_1$ et u_2 prennent respectivement les valeurs que prennent les u_0, u_1 et u_2 du cas $\theta < 0$ et de plus une autre valeur pour u_2 lorsque $u_1 = 5.04\ldots$, soit $u_2 = 13.59\ldots$, $\sigma u_2 = 0.72\ldots$ et $\tau u_2 = -1.31\ldots$

De la même manière que pour les cas précédents ces cas ne donnent aucune valeur de u_3 et u_4 sauf le dernier cas qui donne $u_3 = w_3 = 34.58\ldots$ On déduit alors que θ est un K-nombre de Pisot de polynôme minimal sur K

$$-D_3(z) = z^3 - tz^2 - t \quad \text{où } t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0,$$

les conjugués de θ hors du disque unité sont $2.5836\ldots$, $1.0542\ldots$ et $-1.2864\ldots$, et $M(\theta) = 3.5041\ldots$

Ceci achève la preuve du théorème.

3.2. *Application à la détermination de polynômes réciproques de petite mesure.* En appliquant la construction de Salem aux K-nombres de Pisot de mesure < 4 cités dans l'énoncé du théorème précédent, on obtient des polynômes réciproques ayant j racines hors du disque unité, où $1 \le j \le 3$.

Si on note P le polynôme minimal sur K d'un tel K-nombre de Pisot, on regarde la valeur absolue M_n du produit des racines hors du disque unité du polynôme R_n défini par

$$R_n(z) = \prod_{\sigma \in G} (z^n \sigma P(z) + \xi \sigma P^*(z)),$$

où $\xi = \pm 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour les calculs on s'est limité aux cas où $M_n \le 3$ et le lemme suivant montre que la valeur 16 est une borne supérieure de n suffisante.

Lemme 3. *Avec les notations précédentes et si $n > 16$ alors $M_n > 3$.*

Preuve. Avec les mêmes notations et d'après le théorème 4, le nombre θ ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

Si α est un conjugué de θ sur K de module < 1, alors de l'égalité

$$|z - \alpha|^2 - |1 - \alpha z|^2 = (|z|^2 - 1)(1 - |\alpha|^2)$$

on déduit pour $|z| = \varrho > 1$ et lorsque le cercle $|z| = \varrho$ ne contient aucun des inverses des conjugués de θ l'inégalité

$$|P(z)/P^*(z)| > |(z - \theta)/(1 - \theta z)|.$$

De la preuve de la construction de Salem [4] on a pour $|z| = \varrho < |\theta|$ l'inégalité

$$|(z - \theta)/(1 - \theta z)| > (|\theta| - \varrho)/(\varrho|\theta| - 1),$$

d'où l'inégalité pour $|z| = \varrho$

$$|z^n P(z)/P^*(z)| > \varrho^n (|\theta| - \varrho)/(\varrho|\theta| - 1) = m_n(\theta).$$

Le calcul qui va suivre montre qu'on peut choisir une valeur minimale > 1 pour $m_n(\theta)$ lorsque $n > 16$.

Ensuite du théorème de Rouché on déduit que le polynôme

$$T_n(z) = z^n P(z) + \xi P^*(z)$$

admet une racine de valeur absolue supérieure à ϱ lorsque $n > 16$.

Si l'on considère le conjugué de θ hors du disque unité $\sigma\theta$ (resp. $\tau\theta$) et si on lui associe la quantité $\sigma\varrho$ (resp. $\tau\varrho$) de la même manière qu'on associe ϱ à θ, alors le polynôme conjugué σT_n (resp. τT_n) de T_n admet une racine de valeur absolue $> \sigma\varrho$ (resp. $\tau\varrho$).

Il suffit maintenant de choisir ϱ, $\sigma\varrho$ et $\tau\varrho$ tels que leur produit soit > 3, pour déduire le résultat.

Le calcul. On vérifie d'abord que les valeurs absolues des conjugués de θ sur $\mathbb{Q}$ ne sont pas des rationnels et on choisit alors ϱ dans $\mathbb{Q}$.

• $M(\theta) = 3.75\ldots$ L'un des conjugués de θ (qu'on note θ) a pour valeur absolue $3.1665\ldots$ Si on choisit $\varrho = 3.1$ alors pour $n \geq 5$, on a $m_n(\theta) > 2.147$ et $M_n > 3.1$.

• $M(\theta) = 3.50\ldots$ Deux conjugués de θ (qu'on note θ et $\sigma\theta$) ont pour valeurs absolues $2.5836\ldots$ et $1.2864\ldots$ Si on choisit $\varrho = 2.51$ et $\sigma\varrho = 1.2$ alors on obtient $m_n(\theta) > 1.336$ lorsque $n \geq 5$ et $m_n(\sigma\theta) > 1.1804$ lorsque $n \geq 11$, et par suite $M_n > 3.01$ lorsque $n \geq 11$.

• $M(\theta) = 3.80\ldots$ De manière identique au cas précédent et en choisissant $\varrho = 2$ et $\sigma\varrho = 1.7$ on obtient pour $n \geq 10$, l'inégalité $M_n > 3.4$.

• $M(\theta) = 3.49\ldots$ Les trois conjugués de θ qu'on note θ, $\sigma\theta$ et $\tau\theta$ ont pour valeurs absolues respectivement $2.3264\ldots$, $1.2794\ldots$ et $1.1736\ldots$ Si on choisit $\varrho = 2.3$, $\sigma\varrho = 1.2$ et $\tau\varrho = 1.1$ on trouve $m_n(\theta) > 2.06$ si $n \geq 7$, $m_n(\sigma\theta) > 1.1$ si $n \geq 11$ et $m_n(\tau\theta) > 1.05$ si $n \geq 15$, et par suite $M_n > 3.036$ lorsque $n \geq 15$.

• $M(\theta) = 3.35\ldots$ De manière identique au cas précédent et en choisissant $\varrho = 1.93$, $\sigma\varrho = 1.03$ et $\tau\varrho = 1.52$ on trouve $M_n > 3.02$ pour $n > 16$ et ceci achève la preuve du lemme.

Par la suite on donne tous les polynômes réciproques irréductibles non cyclotomiques de mesure ≤ 3 obtenus en affectant à θ les valeurs de l'énoncé du théorème 4, à n les entiers de 1 à 16 (en fait, pour chaque cas on choisit pour n la borne correspondante trouvée dans la preuve du lemme précédent au lieu de 16) et à ξ les valeurs ± 1.

Pour chaque polynôme P, on précise dans l'ordre suivant et sur la même ligne du tableau 3 l'entier ξ, l'entier n, le degré du polynôme réciproque obtenu et enfin ses racines hors du disque unité.

Tableau 3

D_K	$P(z)$					
81	$z^4 + tz^3 - 1$	$+1$	1	12	$2.9758\ldots$	
	où $t^3 - 3t + 1 = 0$	$+1$	3	18	$2.0225\ldots$	
		-1	4	18	$1.8455\ldots$	$-1.4371\ldots$
	$z^3 - tz^2 - t$	-1	2	12	$1.7358\ldots$	$-1.1738\ldots$
	où $t^3 - 3t^2 + 1 = 0$	-1	3	12	$2.8406\ldots$	
49	$z^4 + tz^3 - 1$	$+1$	01	06	$+2.3821\ldots$	
	où $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$	$+1$	03	18	$+1.7790\ldots$	$-1.5076\ldots$
		$+1$	09	36	$+1.5502\ldots$	$-1.9341\ldots$
		$+1$	11	42	$+1.5377\ldots$	$-1.9377\ldots$
		$+1$	13	24	$+1.5320\ldots$	$-1.9387\ldots$
		$+1$	15	36	$+1.5295\ldots$	$-1.93899\ldots$
		-1	03	18	$-1.3433\ldots$	$-2.1485\ldots$

Tableau 3 (suite)

D_K	$P(z)$	
49	$z^4 + tz^3 - 1$	-1 04 18 $-1.7604\ldots$
	où $t^3 + t^2 - 2t - 1 = 0$	-1 06 18 $+1.3886\ldots$ $-1.8998\ldots$
		-1 08 24 $+1.4798\ldots$ $-1.9293\ldots$
		-1 10 30 $+1.5091\ldots$ $-1.9365\ldots$
		-1 12 42 $+1.5200\ldots$ $-1.9384\ldots$
		-1 14 42 $+1.5244\ldots$ $-1.93891\ldots$
		-1 16 48 $+1.5262\ldots$ $-1.9390\ldots$ $-1.0084\ldots$
	$z^3 - tz^2 - t$	$+1$ 6 24 $+1.1407\ldots$ $2.6004\ldots$
	où $t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0$	-1 2 06 $-1.6355\ldots$
		-1 3 12 $+2.1658\ldots$
		-1 5 12 $+2.5352\ldots$
		-1 7 24 $+2.5767\ldots$
	$z^4 + tz^3 - 1$	$+1$ 01 12 $+1.9710\ldots$
	où $t^3 - 2t^2 - t + 1 = 0$	-1 02 06 $-1.6355\ldots$
		-1 04 18 $-2.2324\ldots$
		-1 06 18 $-2.3106\ldots$
		-1 07 30 $-2.3328\ldots$ $-1.2648\ldots$
		-1 08 30 $-2.3235\ldots$ $+1.0234\ldots$
		-1 10 24 $-2.3258\ldots$ $+1.1910\ldots$
		-1 12 42 $-2.3263\ldots$ $+1.2350\ldots$

Remarque. L'application de la construction de Salem aux K-nombres de Pisot énoncés dans le théorème 4 permet d'obtenir des polynômes réciproques de petite mesure.

Ces mesures semblent augmenter avec le discriminant du corps K. Par exemple le plus petit nombre de Salem qu'on obtient par cette méthode au dessus du corps de discriminant 49 est $1.6355\ldots$ alors que le plus petit nombre de Salem qu'on obtient au dessus du corps de discriminant 81 est $2.0225\ldots$

De même, on obtient un K-nombre de Salem de mesure < 3 au dessus du corps de discriminant 49, ce qui n'est pas le cas pour le corps de discriminant 81. Un analogue du théorème 1 pour des polynômes réciproques pourrait expliquer ceci.

Bibliographie

[1] A. M. Bergé et J. Martinet, *Notions relatives de régulateurs et de hauteurs*, Acta Arith. 54 (1989), 155–170.

[2] M. J. Bertin, *K-nombres de Pisot et de Salem*, ibid. 68 (1994), 113–131.

[3] —, *K-nombres de Pisot et de Salem*, dans : Advances in Number Theory, F. Q. Gouvêa et N. Yui (eds.), Proceedings of the third Conference of the Canadian Number Theory Association, Oxford University Press, 1993, 391–397.

[4] M. J. Bertin et M. Pathiaux-Delefosse, *Conjecture de Lehmer et petits nombres de Salem*, Queen's Papers in Pure and Appl. Math. 81, Kingston, 1989.
[5] D. W. Boyd, *Small Salem numbers*, Duke Math. J. 44 (1977), 315–327.
[6] C. Chamfy, *Fonctions méromorphes dans le cercle unité et leurs séries de Taylor*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 8 (1958), 211–261.
[7] M. M. J. Dufresnoy et C. Pisot, *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cércle unité*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 70 (1955), 69–92.
[8] M. Olivier, *Tables de corps cubiques réels de discriminant inférieur à* 2000000, ftp anonyme à l'URL "ftp://megrez.math.u-bordeaux.fr/pub/numberfields".
[9] *Pari Calculator*, par C. Batut, D. Bernardi, H. Cohen et M. Olivier, copyright 1989, 1992.
[10] C. Pisot, *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*, Presses de l'Université de Montréal, 1963.
[11] A. Schinzel, *On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic number*, Acta Arith. 24 (1973), 385–399.

Department of Mathematics
College of Sciences
King Saud University
P.O. Box 2455
Riyadh 1145, Saudi Arabia
E-mail: f40m009@saksu.bitnet

Reçu le 12.1.1995
et révisé le 2.11.1995 (2726)