ACTA ARITHMETICA
LXXVI.3 (1996)

Développement en fraction continue à l'entier le plus proche, idéaux α-réduits et un problème d'Eisenstein

par

PIERRE KAPLAN (Nancy) et YOSHIO MIMURA (Osaka)

1. Introduction. Soit D un entier positif non carré congru à 1 modulo 4. Le problème d'Eisenstein ([1], [2]) dont il sera question ici est de trouver un critère pour que l'équation

$$X^2 - DY^2 = 4 \tag{1.1}$$

ait des solutions impaires, ce qui n'est possible que si $D \equiv 5 \pmod 8$. Dans le travail [4], paru en 1990 dans cette revue, le résultat suivant a été prouvé :

THÉORÈME 0. *Soient ℓ_0 et ℓ_0^* respectivement les longueurs des périodes des développements en fraction continue des nombres $\sqrt{D}$ et $(1+\sqrt{D})/2$.*

(a) *Si l'équation* (1.1) *a des solutions impaires*, $\ell_0^* + 4 \le \ell_0 \le 5\ell_0^*$.

(b) *Si l'équation* (1.1) *n'a pas de solution impaire*, $\ell_0^*/3 \le \ell_0 \le 3\ell_0^* - 8$.

Ce résultat, qui est le meilleur possible, ne donne pas de critère. Les autres résultats connus concernant ce problème d'Eisenstein ([5–8], [11], [12]) font aussi intervenir les développements en fraction continue des nombres $\sqrt{D}$ et $(1+\sqrt{D})/2$.

Le but de ce travail est d'obtenir un critère en considérant, au lieu des développements en fraction continue usuels, les développements en fraction continue à l'entier le plus proche des nombres $\sqrt{D}$ et $(1+\sqrt{D})/2$. Le développement en fraction continue à l'entier le plus proche d'un nombre réel φ est défini par

$$\varphi_0 = \varphi, \quad \varphi_n = q_n + \varepsilon_n/\varphi_{n+1}, \quad q_n \in \mathbb{Z},\ \varepsilon_n = \pm 1, \quad \varphi_{n+1} > 2, \tag{1.2}$$

de sorte que q_n est, pour tout $n \ge 0$, l'entier le plus proche de φ_n. Si φ est un nombre irrationnel quadratique son développement est périodique à partir d'un certain rang ; soient L_0 et L_0^* les longueurs respectives des périodes des

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11R11, 11A55.

développements en fraction continue à l'entier le plus proche des nombres $\sqrt{D}$ et $(1+\sqrt{D})/2$. Nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit* $D > 5$ *un entier non carré congru à* 1 *modulo* 4.

(a) *Si l'équation* $X^2 - DY^2 = 4$ *a des solutions impaires alors*

$$2L_0^* < L_0 \leq 4L_0^*.$$

(b) *Si l'équation* $X^2 - DY^2 = 4$ *n'a pas de solution impaire alors*

$$L_0^*/2 \leq L_0 < 2L_0^*.$$

Le Théorème 1 montre que $L_0^*/2 \leq L_0 < 2L_0^*$ si $D \equiv 1 \pmod 8$ et donne un critère pour le problème d'Eisenstein quand $D \equiv 5 \pmod 8$.

Dans la théorie du développement en fraction continue à l'entier le plus proche la notion de réduction est remplacée par celle d'α-réduction. C'est à cette notion, en particulier à celle d'idéal α-réduit, qu'est consacré le §2. Dans le §3 nous donnons un exposé bref mais complet de la théorie du développement en fraction continue à l'entier le plus proche des nombres quadratiques et des idéaux associés. Une partie du contenu de ce paragraphe se trouve dans le travail [4] de Hurwitz mais, plutôt que d'y référer, il nous a semblé plus simple et plus clair d'exposer les points essentiels de cette théorie peu connue. Au §4 nous définissons et étudions une application ψ de l'ensemble E des idéaux α-réduits de l'ordre O_{4D} de discrimininant $4D$ sur l'ensemble E^* des idéaux α-réduits de l'ordre O_D de discriminant D. Soit $N = \mathrm{card}(E)$ et $N^* = \mathrm{card}(E^*)$. L'étude de ψ nous permet, pour $D \equiv 5 \pmod 8$, de déterminer N en fonction du nombre des idéaux de E^* satisfaisant à certaines conditions, obtenant, pour les idéaux α-réduits, un résultat analogue à celui de [6], Théorème 1, pour les idéaux réduits. Au §5 nous démontrons le Théorème 1(a) à partir des résultats du §4. Au §6 nous étudions la croissance de l'application ψ quand l'idéal α-réduit I décrit sa période, et c'est le fait que cette croissance est régulière, plus régulière que la croissance de l'application analogue étudiée dans [5] pour les périodes d'idéaux réduits, qui nous permet, malgré la multiplicité des cas à envisager, de parvenir à démontrer le Théorème 1(b).

La démonstration du Théorème 1 nous fournit le résultat suivant qui permet de comparer les nombres N et N^* des idéaux α-réduits primitifs des ordres O_{4D} et O_D :

Théorème 2. *Soit* $D > 5$ *un entier non carré congru à* 1 *modulo* 4.

(a) *Si* $D \equiv 5 \pmod 8$ *alors* $2N^* < N \leq 4N^*$.
(b) *Si* $D \equiv 1 \pmod 8$ *alors* $N^*/2 \leq N < 2N^*$.

2. Idéaux α-réduits. Dans tout ce travail nous poserons $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ et $\beta = (1-\sqrt{5})/2$. Soit Δ un discriminant positif, c'est-à-dire un entier positif non carré congru à 0 ou 1 modulo 4. Les idéaux primitifs de l'ordre O_Δ de discriminant Δ sont les $\mathbb{Z}$-modules $I = [a, (b + \sqrt{\Delta})/2]$ tels que

$$a > 0, \quad (\Delta - b^2)/(4a) = c \in \mathbb{Z}, \quad (a, b, c) = 1. \tag{2.1}$$

Le nombre a est la norme $N(I)$ de l'idéal I. La classe modulo 1 du nombre $\varphi = (b + \sqrt{\Delta})/(2a)$ est déterminée par I et inversement le nombre φ détermine l'idéal I. Nous dirons que I et φ sont *associés* et écrirons $I = I(\varphi)$, ce qui signifie que

$$I = a[1, \varphi], \qquad \varphi = \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

où a et b vérifient (2.1). Si a et b vérifient (2.1) nous dirons que le discriminant de I et de φ est Δ. Dans toute la suite nous supposerons que $\Delta \neq 5$. Alors parmi les représentants de φ modulo 1 il en existe un, et un seul, dont le conjugué $\overline{\varphi}$ vérifie la condition $\beta < \overline{\varphi} < \beta + 1$. Soit $\varphi(I)$ ce nombre. Nous pouvons maintenant définir les idéaux et les nombres α-réduits.

DÉFINITION 1. Le nombre φ est *α-réduit* si $\varphi > 2$ et $\beta < \overline{\varphi} < \beta + 1$. L'idéal I est *α-réduit* si le nombre $\varphi(I)$ est α-réduit.

La caractérisation suivante des idéaux α-réduits est très utile.

PROPOSITION 1. *L'idéal $I = a[1, \varphi]$ est α-réduit si, et seulement si,*

$$[\varphi] - \overline{\varphi} > \alpha. \tag{2.2}$$

Démonstration. Le nombre $[\varphi] - \overline{\varphi}$ est défini par φ modulo 1. Choisissons φ de manière que $\beta < \overline{\varphi} < \beta + 1$, c'est-à-dire, $1 < \overline{\varphi} + \alpha < 2$. On voit donc que $[\varphi] > \overline{\varphi} + \alpha$ si, et seulement si, $\varphi > 2$, ce qui prouve (2.2).

EXEMPLE. Les idéaux O_D et O_{4D} sont α-réduits. En effet, ces idéaux sont respectivement les $\mathbb{Z}$-modules $[1, (1 + \sqrt{D})/2]$ et $[1, \sqrt{D}]$, et leurs nombres φ associés, respectivement $(1 + \sqrt{D})/2$ et $\sqrt{D}$, vérifient (2.2).

Nous comparons maintenant les idéaux α-réduits avec les idéaux réduits au sens usuel et avec les idéaux k-réduits introduits dans le travail [5]. Nous commençons par un lemme.

LEMME 1. *Soit $\varphi = (b + \sqrt{\Delta})/(2a)$ un nombre irrationnel quadratique et $k \geq 0$ un entier. Alors*

$$[\varphi] - \overline{\varphi} > k \Leftrightarrow \varphi + [-\overline{\varphi}] > k. \tag{2.3}$$

Démonstration. Les nombres $[\varphi] - \overline{\varphi}$ et $\varphi + [-\overline{\varphi}]$ ne dépendant que de φ modulo 1, choisissons φ pour que $-1 < \overline{\varphi} < 0$, si bien que $[-\overline{\varphi}] = 0$ et $k - 1 < k + \overline{\varphi} < k$. Alors $[\varphi] > k + \overline{\varphi}$ si, et seulement si, $[\varphi] \geq k$, c'est-à-dire si, et seulement si, $\varphi > k = k + [-\overline{\varphi}]$, ce qu'il fallait démontrer.

Rappelons que, pour k entier, $k \geq 0$, les idéaux k-réduits ont été définis dans [5] par la condition $\varphi + [-\overline{\varphi}] > k$, condition que l'on peut remplacer par $[\varphi] - \overline{\varphi} > k$. De plus les idéaux réduits sont les idéaux 1-réduits. Ceci justifie la Définition 2 et prouve la Proposition 2 suivante.

DÉFINITION 2. Soit λ un nombre réel, $\lambda \geq 0$. L'idéal $I = a[1, \varphi]$ est dit *λ-réduit* si $[\varphi] - \overline{\varphi} > \lambda$.

PROPOSITION 2. (a) *Les idéaux α-réduits sont réduits. Les idéaux 2-réduits sont α-réduits.*

(b) *Le nombre des idéaux α-réduits est fini.*

Nous aurons besoin plus tard du lemme suivant.

LEMME 2. *Soit φ un nombre α-réduit. Alors, pour k entier ≥ 2, on a*

$$\varphi > k \Leftrightarrow [\varphi] - \overline{\varphi} > \alpha + k - 2.$$

En effet, si $\varphi > k$ alors $[\varphi] - \overline{\varphi} \geq k - \overline{\varphi} > k - (1 + \beta) = k - 2 + \alpha$. Réciproquement, si $[\varphi] - \overline{\varphi} > \alpha + k - 2$, alors $[\varphi] > \beta + \alpha + k - 2$, d'où $[\varphi] \geq k$, donc $\varphi > k$, ce qu'il fallait prouver.

3. Développement en fraction continue à l'entier le plus proche. Soit I un idéal primitif de O_Δ défini par un nombre φ. Le *α-successeur* $\varrho(\varphi)$ de φ et celui $\varrho(I)$ de I sont définis par

$$\begin{cases} \varphi = q + \dfrac{\varepsilon}{\varrho(\varphi)}, & \varrho(\varphi) > 2,\ q \in \mathbb{Z},\ \varepsilon = \pm 1, \\ \varrho(I) = I(\varrho(\varphi)). \end{cases} \tag{3.1}$$

LEMME 3. *On a*

$$\varrho(I) = \left| \frac{1}{\overline{\varrho(\varphi)}} \right| I.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la Proposition 3 de [9] à (3.1).

PROPOSITION 3. (a) *Si l'idéal I ou le nombre φ est α-réduit alors $\varrho(\varphi)$ est α-réduit et $\varepsilon\overline{\varrho(\varphi)} < 0$.*

(b) *Si le nombre φ est α-réduit il existe un, et un seul, nombre α-réduit ψ tel que $\varphi = \varrho(\psi)$.*

Démonstration. Posant $\varphi' = \varrho(\varphi)$ il suffit de vérifier que $\beta < \overline{\varphi'} < \beta + 1$ et $\varepsilon\overline{\varphi'} < 0$. Comme $\varphi > 2$ on a $q \geq 2$, et même $q \geq 3$ si $\varepsilon = -1$, d'où

$$0 > \overline{\varphi'} = \frac{1}{\overline{\varphi} - q} > \frac{1}{\beta + 1 - 2} = \beta, \qquad \text{si } \varepsilon = +1,$$
$$0 < \overline{\varphi'} = \frac{1}{q - \overline{\varphi}} < \frac{1}{3 - (\beta + 1)} = \beta + 1, \quad \text{si } \varepsilon = -1,$$

ce qui prouve (a).

Pour prouver (b) posons $\psi = q + \varepsilon/\varphi$. Il s'agit de montrer que $q \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon = \pm 1$ sont bien déterminés par les conditions $\beta < \overline{\psi} < \beta + 1$ et $\psi > 2$. Comme $\beta < \overline{\varphi} < \beta + 1$ on voit que $1/\overline{\varphi} < -\alpha$ si $\overline{\varphi} < 0$, et $1/\overline{\varphi} > \alpha + 1$ si

$\overline{\varphi} > 0$. La condition $\beta < q + \varepsilon/\overline{\varphi} < \beta + 1$ avec $q \geq 2$ montre que $\varepsilon\overline{\varphi} < 0$, ce qui détermine ε et donc q. Il reste à prouver que $\psi > 2$. Si $\overline{\varphi} > 0$ alors $\varepsilon = -1$ et $q > \beta + 1/\overline{\varphi} > \beta + \alpha + 1 = 2$, donc $q \geq 3$ et $\psi > 2$. Si $\overline{\varphi} < 0$ alors $\varepsilon = +1$ et $q > -1/\overline{\varphi} + \beta > \alpha + \beta = 1$, donc $q \geq 2$ et $\psi > 2$. Ceci achève de prouver la Proposition 3.

Corollaire 1. *L'application $\varrho : \varphi \to \varphi'$ définie par* (3.1) *définit une bijection sur l'ensemble des idéaux α-réduits de discriminant Δ.*

Démonstration. Comme $\varphi = q + \varepsilon/\varphi'$, les nombres φ et φ' sont équivalents, donc les idéaux $I(\varphi)$ et $I(\varphi')$ sont des idéaux équivalents de même discriminant. Les Propositions 2 et 3 montrent alors que l'application ϱ est une injection de l'ensemble fini des idéaux α-réduits dans lui-même, donc une bijection. Ceci prouve le Corollaire 1.

Nous considérons maintenant la suite des nombres $\varphi_n = \varrho^n(\varphi_0)$ définis par (1.2) et (3.1) et la suite de leurs idéaux associés $I_n = I(\varphi_n)$. Comme φ_n $(n \geq 1)$ et I_n $(n \geq 0)$ ne dépendent que de $I = I_0 = I(\varphi)$ nous pouvons supposer $\varphi_0 > 2$. Alors, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\varphi_n > 2, \quad q_n \geq 2, \quad q_n \geq 3 \quad \text{si } \varepsilon_n = -1.$$

Nous définissons trois suites d'entiers A_n, B_n $(n \geq -1)$ et μ_n $(n \geq 0)$ par

$$A_{-1} = 1, \quad A_0 = q_0, \quad A_n = A_{n-1}q_n + \varepsilon_{n-1}A_{n-2} \quad (n \geq 1), \tag{3.2}$$

$$B_{-1} = 0, \quad B_0 = 1, \quad B_n = B_{n-1}q_n + \varepsilon_{n-1}B_{n-2} \quad (n \geq 1), \tag{3.3}$$

$$\mu_0 = 1, \quad \mu_n = A_nB_{n-1} - A_{n-1}B_n \quad (n \geq 1). \tag{3.4}$$

On vérifie par récurrence sur n l'exactitude des relations suivantes :

$$\varphi_0 = \frac{A_{n-1}\varphi_n + \varepsilon_{n-1}A_{n-2}}{B_{n-1}\varphi_n + \varepsilon_{n-1}B_{n-2}}, \quad \varphi_n = \varepsilon_{n-1}\frac{A_{n-2} - \varphi_0 B_{n-2}}{B_{n-1}\varphi_0 - A_{n-1}} \quad (n \geq 1), \tag{3.5}$$

$$\mu_n = (-1)^{n-1}\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_{n-1} \quad (n \geq 0), \tag{3.6}$$

$$\varphi_1 \ldots \varphi_n = B_{n-1}\varphi_n + \varepsilon_{n-1}B_{n-2} \quad (n \geq 1). \tag{3.7}$$

Comme q_n $(n \geq 1)$ et ε_n ne dépendent que de la classe de φ modulo 1, c'est-à-dire de $I = I(\varphi)$, les suites B_n, A_n et μ_n ne dépendent que de l'idéal I.

Comme $q_n \geq 2$ on déduit de (3.2) et (3.3) que

$$0 < A_n < A_{n+1} \quad (n \geq -1), \quad 0 < B_n < B_{n+1} \quad (n \geq 0) \tag{3.8}$$

si bien que A_n et B_n tendent vers ∞ avec n.

Nous pouvons maintenant énoncer et démontrer le résultat principal de ce paragraphe.

Théorème 3. (a) *Il existe n_0 tel que l'idéal $I_n = \varrho^n(I)$ et le nombre $\varphi_n = \varrho^n(\varphi)$ soient α-réduits pour $n \geq n_0$. Les suites I_n et φ_n sont périodiques à partir de n_0.*

(b) *Deux idéaux α-réduits I et I' équivalents sont dans la même période. Plus précisément, si $I' = \lambda I$ avec $\lambda > 1$, il existe $n \geq 1$ tel que $I' = \varrho^n(I)$ et $\lambda = \prod_{i=1}^n |1/\overline{\varphi}_i|$.*

Démonstration. De (3.4), (3.5) et (3.6) on déduit

$$\frac{A_n}{B_n} - \varphi_0 = \frac{-\mu_{n+1}}{B_n^2\varphi_n + \varepsilon_n B_n B_{n-1}}, \tag{3.9}$$

ce qui montre que $A_n/B_n - \varphi_0 \to 0$ quand $n \to \infty$. Mais, d'après (3.5), on a

$$-\varepsilon_n\overline{\varphi}_{n+1} = \frac{B_{n-1}}{B_n} \cdot \frac{\varphi_0 - \overline{\varphi}_0 + A_{n-1}/B_{n-1} - \varphi_0}{\varphi_0 - \overline{\varphi}_0 + A_n/B_n - \varphi_0},$$

ce qui montre que $-\varepsilon_n\overline{\varphi}_{n+1}B_n/B_{n-1} \to 1$ quand $n \to \infty$. Il existe donc n_0 tel que $\varepsilon_n\overline{\varphi}_{n+1} < 0$ pour $n \geq n_0$. On vérifie par récurrence que, pour $n \geq 1$,

$$\text{si} \quad \varepsilon_n = -1 \quad \text{alors} \quad B_n > \frac{3+\sqrt{5}}{2}B_{n-1}. \tag{3.10}$$

Alors, utilisant (3.3), on trouve, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} &B_n > q_n B_{n-1} && \text{si } \varepsilon_{n-1} = 1,\\ &B_n > (q_n + \alpha - 2)B_{n-1} && \text{si } \varepsilon_{n-1} = -1, \end{aligned} \tag{3.11}$$

ce qui montre que

$$\begin{cases} \text{si } \varepsilon_n = 1 \text{ on a } B_{n-1}/B_n < 1/2, \text{ sauf si } q_n = 2,\ \varepsilon_{n-1} = -1,\\ \text{si } \varepsilon_n = -1 \text{ on a } B_{n-1}/B_n < 1/3, \text{ sauf si } q_n = 3,\ \varepsilon_{n-1} = -1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Supposons $n \geq n_0$ de sorte que $\varepsilon_n\overline{\varphi}_{n+1} < 0$. Comme $-1/2 > \beta$ et $1/3 < \beta+1$ on voit que, si φ_{n+1} n'était jamais α-réduit, on aurait, pour tout n assez grand, $\varepsilon_{n-1} = -1$, $\varepsilon_n = 1$, $q_n = 2$ ou bien $\varepsilon_{n-1} = \varepsilon_n = -1$, $q_n = 3$. Le premier cas ne peut convenir, car $\varepsilon_n = 1$, $\varepsilon_{n+1} = \pm 1$, donc φ_{n+2} serait α-réduit. Donc $\varepsilon_n = -1$ et $q_n = 3$ à partir d'un certain rang. Mais alors $\varphi_n = (3+\sqrt{5})/2$ à partir de ce rang, cas exclu car $\Delta \neq 5$. Ceci montre qu'il existe n_0 tel que φ_{n_0} soit α-réduit. Le fait que la suite φ_n soit périodique pour $n \geq n_0$ vient de ce que $\varphi_n = \varrho^{n-n_0}(\varphi_{n_0})$ avec les notations du Corollaire 1. Ceci achève la démonstration de (a).

Avant de démontrer (b) remarquons que

$$\frac{B_{n+1}}{B_{n-1}} = q_{n+1}\frac{B_n}{B_{n-1}} + \varepsilon_n,$$

ce qui, compte tenu de (3.10) et (3.11), donne, dans tous les cas,

$$B_{n+1} > (2+\sqrt{5})B_{n-1}. \tag{3.13}$$

Il reste à prouver (b), c'est-à-dire que deux nombres équivalents α-réduits sont dans la même période. Nous adaptons le raisonnement classique (voir par exemple [3], §10-6, 10-10, 10-11) à notre objet. Nous commençons par le

LEMME 4. *Si $\varphi_0 = (P\psi + Q)/(R\psi + S)$ avec $PS - QR = \pm 1$, $R > 2|S| > 0$ et $\psi > 0$, il existe n tel que $\psi = \varphi_n$, $P = A_n$, $R = B_n$, $S = \varepsilon_{n-1}B_{N-1}$ et $Q = \varepsilon_{n-1}A_{N-1}$.*

Démonstration. Nous appliquons le processus (3.1) au nombre rationnel $P/R = \varphi'_0$. Dans ce cas (3.1) s'écrit successivement

$$\begin{array}{llll}
P = q'_0 R + \varepsilon'_0 r_1, & \varphi'_0 = P/R, & q'_0, & 0 \le 2r_1 < R, \\
R = q'_1 r_1 + \varepsilon'_1 r_2, & \varphi'_1 = R/r_1, & q'_1 \ge 2, & 0 \le 2r_2 < r_1, \\
\ldots & & & \\
r_{n-1} = q'_n r_n + \varepsilon'_n r_{n+1}, & \varphi'_n = r_{n-1}/r_n, & q'_n \ge 2, & 0 \le 2r_{n+1} < r_n, \\
\ldots & & & \\
r_{N-1} = q'_N r_N, & \varphi'_N = r_{N-1}/r_N = q'_N, & q'_N \ge 2, & r_{N+1} = 0.
\end{array}$$

Le fait qu'il existe N tel que $r_{N+1} = 0$ vient de ce que la suite des entiers positifs r_i est strictement décroissante.

Si $q'_N = 2$ et $\varepsilon'_{N-1} = 1$ la fin du développement de P/R est $q'_{N-1} - 1/2$ avec $q'_{N-1} \ge 3$; ceci s'écrit aussi $(q'_{N-1} - 1) + 1/2$, donc on peut supposer que l'on n'a pas à la fois $q'_N = 2$, $\varepsilon'_{N-1} = -1$, et donc, d'après (3.11), que $2B_{N-1} < B_N$.

Tenant compte de (3.5), (3.2) et (3.3), il vient

$$\frac{P}{R} = \frac{A_{N-1}q'_N + \varepsilon'_{N-1}A_{N-2}}{B_{N-1}q'_N + \varepsilon'_{N-1}B_{N-2}} = \frac{A_N}{B_N},$$

puis, comme $(P, R) = (A_N, B_N) = 1$, R et $B_N > 0$, on voit que $P = A_N$ et $R = B_N$. Donc $PS - QR = \varepsilon(PB_{N-1} - QA_{N-1})$ $(\varepsilon = \pm 1)$, d'où résulte $P(S - \varepsilon B_{N-1}) = R(Q - \varepsilon A_{N-1})$. Comme $(P, R) = 1$ et $|S| + B_{N-1} < R$ on a $S = \varepsilon B_{N-1}$, $Q = \varepsilon A_{N-1}$, d'où

$$\varepsilon_0 = \frac{P\psi + Q}{R\psi + S} = \frac{A_N\psi + \varepsilon A_{N-1}}{B_N\psi + \varepsilon B_{N-1}} = \frac{A_N\varphi_{N+1} + \varepsilon_N A_{N-1}}{B_N\varphi_{N+1} + \varepsilon_N B_{N-1}}.$$

Développant et tenant compte de (3.4) et (3.6), on obtient $\varepsilon\mu_N\psi = \varepsilon_N\mu_N\varphi_{N+1}$. Comme $\psi > 0$ et $\varphi_{N+1} > 2$ on a donc $\psi = \varphi_{N+1}$ et $\varepsilon_N = \varepsilon$, ce qui achève la démonstration du Lemme 4.

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du Théorème 3(b).

Soient ψ et φ deux nombres α-réduits équivalents, $\psi = (a\varphi + b)/(c\varphi + d)$ avec a, b, c, d entiers tels que $ad - bc = \pm 1$, où nous pouvons supposer $c\varphi + d > 0$ en changeant, si nécessaire, les signes de a, b, c et d. Développons $\varphi = \varphi_0$ en fraction continue à l'entier le plus proche et remplaçons; il vient, d'après (3.5),

$$\psi = \frac{P\varphi_n + Q}{R\varphi_n + S} \quad \text{avec } R = cA_{n-1} + dB_{n-1},\ S = \varepsilon_{n-1}(cA_{n-2} - dB_{n-2}).$$

D'après (3.9) et (3.7) on a $A_{n-1} = \varphi B_{n-1} \pm 1/\theta_{n-1}$, $A_{n-2} = \varphi B_{n-2} \pm 1/\theta_{n-2}$, où on a posé $\theta_k = \varphi_1 \ldots \varphi_k$. On a donc

$$R = B_{n-1}(c\varphi + d) \pm \frac{c}{\theta_{n-1}}, \qquad S = \varepsilon_{n-1}\biggl(B_{n-2}(c\varphi + d) \pm \frac{c}{\theta_{n-2}}\biggr).$$

Comme, d'après (3.13), $B_{n-1} > 2B_{n-2}$ pour une infinité d'indices n et que θ_{n-1} et $\theta_{n-2} \to \infty$ quand $n \to \infty$, on voit qu'il existe n tel que $R > 2|S| > 0$, ce qui, d'après le Lemme 4, montre que φ_n est dans la période de ψ. Donc φ et ψ sont dans la même période. Tenant compte du Lemme 3, ceci achève la démonstration du Théorème 3(b).

4. Définition de l'application ψ. Comparaison des nombres des idéaux α-réduits des discriminants D et $4D$ pour $D \equiv 5 \pmod 8$. Dans cette section nous désignerons par φ les nombres de discriminant $4D$ et par ω les nombres de discriminant D. Soit E (respectivement E^*) l'ensemble des idéaux α-réduits de discriminant $4D$ (respectivement D). Soit $I = a[1, \varphi] \in E$ avec $\varphi = (b + \sqrt{D})/a$, où φ est choisi α-réduit. Comme $D = b^2 + ac \equiv 1 \pmod 4$ on voit que soit $a \equiv 1 \pmod 2$, soit $a \equiv 0 \pmod 4$ et $b \equiv 1 \pmod 2$. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 5. (i) *Soit $\varphi = (b + \sqrt{D})/a$ un nombre de discriminant $4D$.*

- *Si $a \equiv b \equiv 1 \pmod 2$ les nombres $\varphi/2$ et $2/\varphi$ sont de discriminant D.*
- *Si $a \equiv 1$, $b \equiv 0 \pmod 2$ les nombres $(\varphi - 1)/2$ et $2/(\varphi - 1)$ sont de discriminant D.*
- *Si $a \equiv 0 \pmod 4$ le nombre 2φ est de discriminant D.*

(ii) *Soit $\omega = (b + \sqrt{D})/(2a)$ un nombre de discriminant D. Si $D \equiv 5 \pmod 8$ les nombres 2ω, $\omega/2$ et $2/\omega$ sont de discriminant D.*

Démonstration. (i) Si $b \equiv 0 \pmod 2$ on remplace b par $b - a$. Alors $D = b^2 + ac$ s'écrit $D = b^2 + a(4c')$ avec $(a, b, c') = 1$ si $a \equiv 1 \pmod 2$, et $D = b^2 + (4a')c$ avec $(a', b, c) = 1$ si $a = 4a'$. Tenant compte de ce que les nombres λ et $1/\lambda$ sont équivalents ceci, prouve (i).

(ii) Quand $D \equiv 5 \pmod 8$ l'égalité $D = b^2 + 4ac$ montre que $a \equiv c \equiv 1 \pmod 2$. Comme on a $(a, b, c) = 1$ on voit que

$$2\omega = \frac{2b + \sqrt{4D}}{2a}, \quad 4D = (2b)^2 + 4a(4c) \quad \text{avec } (a, 2b, 4c) = 1,$$
$$\frac{\omega}{2} = \frac{2b + \sqrt{4D}}{2 \cdot 4a}, \quad 4D = (2b) + 4(4a)c \quad \text{avec } (4a, 2b, c) = 1,$$

ce qui prouve que 2ω, $\omega/2$, et aussi $2/\omega$, sont de discriminant $4D$ et prouve (ii).

Nous définissons une partition de E en cinq sous-ensembles E_1, E'_1, E_2, E'_2 et E_4 et une application ψ de E dans E^* définie par ses restrictions à chacun de ces sous-ensembles.

$$(4.1)\quad \begin{cases} E_1 : a \equiv b \equiv 1 \pmod 2,\ \overline{\varphi} < 0, & \psi(I) = I(2/\varphi), \\ E'_1 : a \equiv b \equiv 1 \pmod 2,\ \overline{\varphi} > 0, & \psi(I) = I(-2/\varphi), \\ E_2 : a \equiv 1,\ b \equiv 0 \pmod 2), \varphi > 3 \text{ et } \overline{\varphi} < 2-\sqrt{5}, & \\ & \psi(I) = I((\varphi-1)/2), \\ E'_2 : a \equiv 1,\ b \equiv 0 \pmod 2),\ \varphi < 3 \text{ ou } \overline{\varphi} > 2-\sqrt{5}, & \\ & \psi(I) = I(2/(\varphi-1)), \\ E_4 : a \equiv 0 \pmod 4, & \psi(I) = I(2\varphi). \end{cases}$$

Nous désignerons par ψ_1, ψ'_1, ψ_2, ψ'_2 et ψ_4 les restrictions de ψ à E_1, E'_1, E_2, E'_2 et E_4 respectivement. Remarquons que l'on a

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < \sqrt{5} < \alpha+1 < 2\alpha < \alpha+2 < \alpha+3,$$
$$\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 2-\sqrt{5} < 0 < \frac{3-\sqrt{5}}{4} < \beta+1 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Avec les définitions (4.1) nous avons

PROPOSITION 4. *L'idéal $\psi(I)$ est un idéal de discriminant D. De plus, pour $D \equiv 5 \pmod 8$,*

(1) *ψ_1 est une bijection de E_1 sur les idéaux $(1+\sqrt{5})$-réduits de E^*,*

(2) *ψ'_1 est une bijection de E'_1 sur les idéaux $(2+\sqrt{5})$-réduits de E^*,*

(3) *ψ_2 est une bijection de E_2 sur les idéaux de E^* tels que $\overline{\omega} > (3-\sqrt{5})/4$,*

(4) *l'image de E'_2 par ψ'_2 est formée des idéaux α-réduits non $(2+\sqrt{5})$-réduits de E^*, l'image réciproque d'un idéal de E^* est formée de deux éléments si $\sqrt{5} < [\omega]-\overline{\omega} < 1+\sqrt{5}$, un seul sinon,*

(5) *l'image de E_4 par ψ_4 est formée des idéaux 2α-réduits de E^*, l'image réciproque d'un idéal de E^* par ψ_4 est formée d'un idéal si $2\alpha < [\omega]-\overline{\omega} < 2+\alpha$ et $\overline{\omega} < 2-\sqrt{5}$ ou $2+\alpha < [\omega]-\overline{\omega} < 3+\alpha$ et $\overline{\omega} > 2-\sqrt{5}$, et de deux idéaux si $2+\alpha < [\omega]-\overline{\omega} < 3+\alpha$ et $\overline{\omega} < 2-\sqrt{5}$ ou $3+\alpha < [\omega]-\overline{\omega}$.*

D é m o n s t r a t i o n. Le Lemme 5(i) montre que, dans tous les cas, l'idéal $\psi(I)$ est de discriminant D. Il reste à vérifier les points 1 à 5. Pour cela nous partons d'un idéal $I = a[1,\varphi]$, où φ est α-réduit appartenant successivement à E_1, E'_1, E_2, E'_2, E_4, et étudions son image par ψ. Puis, partant d'un idéal $J = a[1,\omega] \in E^*$, où ω est α-réduit, nous déterminons le nombre des éléments de $\psi^{-1}(J)$ dans chacun des sous-ensembles E_1, E'_1, E_2, E'_2 et E_4. Dans chacun des cinq cas le Lemme 5(ii) montre que les images inverses sont bien des idéaux de discriminant $4D$.

(1) Comme φ est α-réduit et $\overline{\varphi} < 0$ on a $[2/\varphi] - 2/\overline{\varphi} > 0 - 2/\beta = 2\alpha$, ce qui prouve que $\psi_1(I)$ est 2α-réduit.

Réciproquement, soit J un idéal 2α-réduit de E^*. Les nombres $\varphi = \varphi(I)$ α-réduits tels que $J = \psi_1(I)$ sont à chercher parmi les nombres φ tel qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\omega = 2/\varphi + n$, c'est-à-dire $\varphi = 2/(\omega - n)$, avec $\varphi > 2$ et $\beta < \overline{\varphi} < \beta + 1$, c'est-à-dire $n = [\omega]$ et $\beta < 2/(\overline{\omega} - [\omega]) < \beta + 1$. Comme $\overline{\omega} - [\omega] < 0$ cette dernière condition équivaut à $[\omega] - \overline{\omega} > -2/\beta = 2\alpha$. Ainsi pour tout $J \in E^*$ qui est 2α-réduit il existe un et un seul $I \in E_1$ tel que $\psi_1(I) = J$, ce qui prouve (1).

(2) Comme φ est α-réduit et $0 < \overline{\varphi} < \beta + 1$ on a $[-2/\varphi] + 2/\overline{\varphi} > -1 + 2/(1+\beta) = 2 + \sqrt{5}$, ce qui prouve que $\psi_1'(I)$ est $(2+\sqrt{5})$-réduit.

Si J est un idéal $(2+\sqrt{5})$-réduit les nombres $\varphi = \varphi(I)$ tels que $J = \psi_1'(I)$ sont à chercher parmi les nombres $2/(n - \omega)$, $n \in \mathbb{Z}$, tels que $2/(n-\omega) > 2$, d'où $n = [\omega] + 1$ et alors $\beta < 2/([\omega] + 1 - \overline{\omega}) < \beta + 1$. Comme $[\omega] + 1 - \overline{\omega} > 0$ cette condition équivaut à $[\omega] + 1 - \overline{\omega} > 2/(\beta+1) = 3 + \sqrt{5}$ soit $[\omega] - \overline{\omega} > 2 + \sqrt{5}$, ce qui prouve (2).

(3) Si $a \equiv 1$, $b \equiv 0 \pmod 2$, $\varphi > 3$ et $\overline{\varphi} < 2 - \sqrt{5}$ on a

$$\left[\frac{\varphi - 1}{2}\right] + \frac{1 - \overline{\varphi}}{2} > 1 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = \alpha,$$

donc $\psi_2(I)$ est α-réduit.

Réciproquement, soit $J(\omega) \in E^*$. Les idéaux $I(\varphi)$ tels que $\psi_2(I) = J$ sont tels que $\omega = (\varphi - 1)/2 + n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi > 3$, $\beta < \overline{\varphi} < 2 - \sqrt{5}$, c'est-à-dire $\varphi = 1 + 2(\omega - n) > 3$, $\beta = (1 - \sqrt{5})/2 < 1 + 2(\overline{\omega} - n) < 2 - \sqrt{5}$, ou bien $\omega > n + 1$, $(-1 - \sqrt{5})/4 < \overline{\omega} - n < \beta$, ce qui montre que $n = 1$ et qu'il y a une possibilité si, et seulement si, $\overline{\omega} > (3 - \sqrt{5})/4$, ce qu'il fallait prouver.

(4) Si $a \equiv 1$, $b \equiv 0 \pmod 2$ et $\varphi < 3$ ou $\overline{\varphi} > 2 - \sqrt{5}$ on a

$$\left[\frac{2}{\varphi - 1}\right] + \frac{2}{1 - \overline{\varphi}} > 1 + \frac{2}{1 - \beta} = \sqrt{5} > \alpha \qquad \text{si } \varphi < 3,$$
$$\left[\frac{2}{\varphi - 1}\right] + \frac{2}{1 - \overline{\varphi}} > 0 + \frac{2}{-1 + \sqrt{5}} = \alpha \qquad \text{si } \overline{\varphi} > 2 - \sqrt{5},$$

ce qui prouve que $\psi_2'(I)$ est α-réduit.

L'idéal $J = J(\omega) \in E^*$ étant donné, les nombres α-réduits $\varphi = \varphi(I)$ tels que $J = \psi_2'(I)$ sont à chercher parmi les nombres tels que $\omega - n = 2/(\varphi - 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $\varphi = 1 + 2/(\omega - n)$ vérifiant en outre $\varphi < 3$ ou $\overline{\varphi} > 2 - \sqrt{5}$, c'est-à-dire soit

$$1 < \frac{2}{\omega - n} < 2 \quad \text{et} \quad \beta - 1 < \frac{2}{\overline{\omega} - n} < \beta,$$

soit

$$2 < \frac{2}{\omega - n} \quad \text{et} \quad 1 - \sqrt{5} < \frac{2}{\overline{\omega} - n} < \beta.$$

La première alternative impose $1 < \omega - n < 2$, c'est-à-dire $n = [\omega] - 1$ et la deuxième condition s'écrit $\sqrt{5} < [\omega] - \overline{\omega} < 2 + \sqrt{5}$. La deuxième alternative impose $0 < \omega - n < 1$, c'est-à-dire $n = [\omega]$ et la deuxième condition s'écrit $\alpha < [\omega] - \overline{\omega} < 1 + \sqrt{5}$. Ceci prouve (4).

(5) Si $a \equiv 0 \pmod 4$ on a $[2\varphi] - 2\overline{\varphi} \geq 2[\varphi] - 2\overline{\varphi} > 2\alpha$, ce qui prouve que $\psi_4(I)$ est 2α-réduit. Réciproquement, soit J un idéal 2α-réduit. Par ψ_4 il peut provenir soit de $I_1 = I(\omega/2)$, soit de $I_2 = I((\omega - 1)/2)$.

L'idéal I_1 est α-réduit si, et seulement si, $[\omega/2] - \overline{\omega}/2 > \alpha$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2[\omega/2] > 2\alpha + \overline{\omega}$. Comme $\beta < \overline{\omega} < \beta + 1$ et $\alpha + \beta = 1$ on voit que $2 < 1 + \alpha < 2\alpha + \overline{\omega} < 2 + \alpha < 4$, ce qui montre que I_1 est α-réduit si, et seulement si, $[\omega/2] \geq 2$, c'est-à-dire $\omega > 4$. Appliquant le Lemme 2, on voit que I_1 est α-réduit si, et seulement si, J est $\alpha + 2$ réduit.

L'idéal I_2 est α-réduit si, et seulement si, $[(\omega - 1)/2)] - (\overline{\omega} - 1)/2 > \alpha$, c'est-à-dire si, et seulement si, $2[(\omega - 1)/2] > 2\alpha - 1 + \overline{\omega}$. Ici on a $1 < 2\alpha - 1 + \overline{\omega} < 3$ et donc I_2 est α-réduit si, et seulement si, soit $\omega > 3$ et $\overline{\omega} < 2 - \sqrt{5}$, soit $\omega > 5$, ce qui, tenant compte du Lemme 2, prouve (5) et achève la démonstration de la Proposition 4.

Corollaire 2. *Soit $n_1(J)$, $n_2(J)$, $n_3(J)$ définis par*

$$n_1(J) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha < [\omega] - \overline{\omega} < \sqrt{5}, \\ 2 & \text{si } \sqrt{5} < [\omega] - \overline{\omega} < 2 + \alpha, \\ 3 & \text{si } 2 + \alpha < [\omega] - \overline{\omega} < 3 + \alpha, \\ 4 & \text{si } 3 + \alpha < [\omega] - \overline{\omega}; \end{cases}$$

$$n_2(J) = 1 \quad \text{si } 2\alpha < [\omega] - \overline{\omega} < 3 + \alpha \text{ et } \overline{\omega} < 2 - \sqrt{5}, \quad n_2(J) = 0 \quad \text{sinon};$$

$$n_3(J) = 1 \quad \text{si } \overline{\omega} > (3 - \sqrt{5})/4, \quad n_3(J) = 0 \quad \text{sinon}.$$

Alors $\operatorname{card}(\psi^{-1}(J)) = n_1(J) + n_2(J) + n_3(J)$.

Corollaire 3. *Parmi les N^* idéaux α-réduits de discriminant $D \equiv 5 \pmod 8$ désignons par*

- N_1^* *le nombre des idéaux α-réduits non $\sqrt{5}$-réduits,*
- N_2^* *le nombre des idéaux $\sqrt{5}$-réduits non $(\alpha + 2)$-réduits,*
- N_3^* *le nombre des idéaux $(\alpha + 2)$-réduits non $(\alpha + 3)$-réduits,*
- N_4^* *le nombre des idéaux $(\alpha + 3)$-réduits,*
- N'^* *le nombre des idéaux 2α réduits non $(3 + \alpha)$-réduits et tels que $\overline{\omega} < 2 - \sqrt{5}$,*
- N''^* *le nombre des idéaux α-réduits tels que $\overline{\omega} > (3 - \sqrt{5})/4$.*

Alors

$$N = \operatorname{card}(E) = N_1^* + 2N_2^* + 3N_3^* + 4N_4^* + N'^* + N''^*.$$

Démonstration des Corollaires 2 et 3. D'après (1), (2), (4) de la Proposition 4 on obtient par les applications ψ_1, ψ_1' et ψ_2' une fois les idéaux α-réduits non $\sqrt{5}$-réduits et deux fois les idéaux $\sqrt{5}$-réduits de E^*. Ceci étant, (3) et (5) nous permettent de terminer les démonstrations.

5. L'application θ et la démonstration du Théorème 1(a). Nous désignerons par $H(4D)$ et $H(D)$ les groupes de classes d'idéaux primitifs de discriminant $4D$ et D respectivement, et par ε_{4D} et ε_D les unités fondamentales > 1 des anneaux O_{4D} et O_D respectivement. Nous désignerons aussi par $C(I)$ la classe de l'idéal I.

Soit $C \in H(4D)$ et $I = [a, b+\sqrt{D}]$ un idéal de C. Comme $D \equiv 1 \pmod 4$ on a $b \equiv 1 \pmod 2$ si $a \equiv 0 \pmod 4$ ou bien $b \not\equiv b + a \pmod 2$, donc on peut toujours supposer $b \equiv 1 \pmod 2$. Alors on sait (voir par exemple [9], Théorème 1 et Corollaire 4) que l'idéal

$$\theta(I) = \begin{cases} \left[a, \dfrac{b+\sqrt{D}}{2}\right] & \text{si } a \equiv 1 \pmod 2, \\ \left[\dfrac{a}{4}, \dfrac{b+\sqrt{D}}{2}\right] & \text{si } a \equiv 0 \pmod 4, \end{cases} \tag{5.1}$$

est un idéal primitif de O_D dont la classe

$$\theta(C) = C(\theta(I)) \tag{5.2}$$

ne dépend que de la classe C de I, et que si les idéaux $I = [a, b + \sqrt{D}]$ et $I' = [a', b' + \sqrt{D}]$, vérifiant $a \equiv a' \equiv 1 \pmod 2$, sont équivalents alors

$$\text{pour tout } \lambda \in Q(\sqrt{D}) \text{ tel que } I' = \lambda I \text{ on a } \theta(I') = \lambda\theta(I). \tag{5.3}$$

D'autre part, on sait (voir [2], §256, VI ou [10], §151) que l'application de $H(4D)$ dans $H(D)$ définie par $C \to \theta(C)$ est un homomorphisme surjectif et que

$$\begin{cases} \operatorname{card}(\operatorname{Ker}\theta) = 1 \Leftrightarrow \\ \qquad\qquad (1.1) \text{ a des solutions impaires ou } D \equiv 1 \pmod 8, \\ \operatorname{card}(\operatorname{Ker}\theta) = 3 \Leftrightarrow \\ \qquad\qquad (1.1) \text{ n'a pas de solution impaire et } D \equiv 5 \pmod 8, \end{cases} \tag{5.4}$$

et

$$\begin{cases} (1.1) \text{ a des solutions impaires} \Leftrightarrow \varepsilon_{4D} = \varepsilon_D^3, \\ (1.1) \text{ n'a pas de solution impaire} \Leftrightarrow \varepsilon_{4D} = \varepsilon_D. \end{cases} \tag{5.5}$$

Les définitions (4.1), (5.1) et (5.2) de ψ et θ montrent que l'application ψ est compatible avec θ en ce sens que

$$C(\psi(I)) = \theta(C(I)). \tag{5.6}$$

Pour toute classe $C \in H(4D)$ nous désignerons par $L(C)$ le nombre des idéaux primitifs α-réduits de C, c'est-à-dire la longueur de la période de C, et par $L^*(C)$ la longueur de la période de $\theta(C)$.

Pour démontrer le Théorème 1(a) nous utiliserons le résultat suivant :

PROPOSITION 5. *Soit* $D \equiv 5 \pmod 8$.

(a) *Pour tout* $J \in E^*$ *tel que* $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J)) = 1$ *on a* $\mathrm{card}(\psi^{-1}(\varrho^{-1}(J))) \geq 3$.

(b) *Soit* $J \in E^*$ *tel que* $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J)) = 5$. *Il existe un entier* $n_0 \geq 1$ *tel que* $\mathrm{card}(\psi^{-1}(\varrho^{-n_0}(J))) \leq 3$ *et* $\mathrm{card}(\psi^{-1}(\varrho^{-n}(J))) = 4$ *pour* $0 < n < n_0$.

D é m o n s t r a t i o n. Nous désignerons par ω_1 le nombre associé à $\varrho^{-1}(J)$ de sorte que il existe q_1 entier ≥ 2 et $\varepsilon_1 = +1$ ou -1 tel que

$$\omega_1 = q_1 + \frac{\varepsilon_1}{\omega}, \quad \overline{\omega}_1 = q_1 + \frac{\varepsilon_1}{\overline{\omega}}, \quad \varepsilon_1 \overline{\omega} < 0. \tag{5.7}$$

(a) Si $J \in E^*$ est tel que $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J)) = 1$ alors, d'après le Corollaire 2, on a $\alpha < [\omega] - \overline{\omega} < \sqrt{5}$ et $\beta < \overline{\omega} < (3 - \sqrt{5})/4$, ce qui montre que $1 < [\omega] < \sqrt{5} + (3 - \sqrt{5})/4 < 3$, d'où $[\omega] = 2$ et donc

$$2 - \sqrt{5} < \overline{\omega} < \frac{3 - \sqrt{5}}{4}. \tag{5.8}$$

Tenant compte de (5.7) et (5.8), on obtient

$$[\omega_1] - \overline{\omega}_1 = \begin{cases} 0 - \dfrac{1}{\overline{\omega}} > \dfrac{1}{\sqrt{5} - 2} = 2 + \sqrt{5} & \text{si } \overline{\omega} < 0, \\ -1 + \dfrac{1}{\overline{\omega}} > -1 + \dfrac{4}{3 - \sqrt{5}} = 2 + \sqrt{5} & \text{si } \overline{\omega} > 0, \end{cases} \tag{5.9}$$

ce qui, d'après le Corollaire 2, prouve (a).

(b) Soit $J \in E^*$ tel que $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J)) = 5$. D'après le Corollaire 2 on a

$$\omega > 4, \qquad \frac{3 - \sqrt{5}}{4} < \overline{\omega} < \frac{3 - \sqrt{5}}{2}. \tag{5.10}$$

Comme $\overline{\omega} > 0$ on déduit de (5.9) que $[\omega_1] - \overline{\omega}_1 = -1 + 1/\overline{\omega}$, d'où, tenant compte de (5.10), $\alpha < [\omega_1] - \overline{\omega}_1 < 2 + \sqrt{5}$. Comme $\alpha + 2 < 2 + \sqrt{5} < \alpha + 3$, ou bien $[\omega_1] - \overline{\omega}_1 < \alpha + 2$ et alors $\mathrm{card}(\psi^{-1}(\varrho^{-1}(J))) \leq 3$, ou bien $\alpha + 2 < [\omega_1] - \overline{\omega}_1 < 2 + \sqrt{5}$ et alors, d'après le Lemme 2, on a $[\omega_1] = 4$, d'où $\overline{\omega}_1 > 2 - \sqrt{5}$, de sorte que $\mathrm{card}(\psi^{-1}(\varrho^{-1}(J))) = 4$ si, et seulement si, (5.10) est vrai pour ω_1, et sinon $\mathrm{card}(\psi^{-1}(\varrho^{-1}(J))) \leq 3$. Ceci permet de recommencer le raisonnement avec ω_1 à la place de ω et montre que, en parcourant la période de J en sens inverse on doit, avant de revenir à J, passer par un idéal $J' = \varrho^{-n_0}(J)$ tel que $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J')) \leq 3$, ce qui prouve (b).

La Proposition 5 nous permet de montrer les Théorèmes 1(a) et 2(a).

D é m o n s t r a t i o n d e s T h é o r è m e s 1(a) e t 2(a). Supposons $D \equiv 5 \pmod 8$ et soit $J \in \theta(C)$ tel que $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J)) = 5$. La Proposition 5(b) montre que $J' = \varrho^{-n_0}(J)$ vérifie $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J')) \leq 3$ et que à deux idéaux J_1 et J_2 distincts tels que $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J_1)) = \mathrm{card}(\psi^{-1}(J_2)) = 5$ correspondent deux idéaux J_1' et J_2' distincts. Donc, pour toute classe C, on a

$$L(C) \leq 4L^*(C). \tag{5.11}$$

Supposons maintenant que (1.1) a des solutions impaires. Alors d'après (5.4) l'application θ est bijective de sorte que, d'après (5.5), l'image par ψ de la période des idéaux α-réduits d'une classe C est l'ensemble des idéaux α-réduits de la classe $\theta(C)$. Comme à tout idéal $J \in \theta(C)$ tel que $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J)) = 1$ correspond l'idéal $J' = \varrho^{-1}(J)$ tel que $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J')) \geq 3$ on voit que l'on a, pour toute classe $C \in E$,

$$L(C) \geq 2L^*(C). \tag{5.12}$$

La classe principale contient l'idéal $O_D = J_0 = I((1+\sqrt{D})/2)$ et on a

$$\left[\frac{1+\sqrt{D}}{2}\right] - \frac{1-\sqrt{D}}{2} > \alpha + 3 \quad \text{pour } D \geq 29,$$

ce qui, d'après le Corollaire 2, montre que $\mathrm{card}(\psi^{-1}(J_0)) \geq 4$, et prouve que $L_0 > 2L_0^*$ pour $D \geq 29$, et on vérifie que $L_0 > 2L_0^*$ est vrai pour $D = 13$ et $D = 21$. Ceci achève la démonstration du Théorème 1(a).

Le même raisonnement appliqué aux ensembles E et E^* prouve le Théorème 2(a).

6. Monotonie de l'application ψ et démonstration du Théorème 1(b). Le point essentiel est le résultat suivant qui indique comment l'idéal $\psi(I)$ avance dans sa période quand l'idéal α-réduit I décrit la sienne.

PROPOSITION 6. *Soit I un idéal α-réduit de discriminant $4D$, et $\varrho(I)$ son successeur défini par* (3.1). *On a*

$$\psi(\varrho(I)) = \varrho^n(\psi(I)) \quad \textit{avec } n = 0, 1 \textit{ ou } 2, \tag{6.1}$$

$$\psi(\varrho^2(I)) = \varrho^m(\psi(I)) \quad \textit{avec } 1 \leq m \leq 4. \tag{6.2}$$

Démonstration. Soit $I \in E$ un idéal α-réduit de discriminant $4D$, φ le nombre α-réduit associé, φ' le nombre associé à $\varrho(I)$ de sorte que, tenant compte de la Proposition 3, on a

$$\varphi = q + \frac{\varepsilon}{\varphi'}, \quad \overline{\varphi} = q + \frac{\varepsilon}{\overline{\varphi'}}, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad \varepsilon\overline{\varphi'} < 0. \tag{6.3}$$

Posant $\varphi = (b + \sqrt{D})/a$ et $\varphi' = (b' + \sqrt{D})/a'$, on déduit de (6.3),

$$b' = -b + aq, \quad D = b'^2 + \varepsilon a a'. \tag{6.4}$$

Tenant compte de ce que $D \equiv 1 \pmod 4$ et des parités de a, b, q, b', a', on vérifie que

$$\begin{cases} I \in E_1 \text{ ou } E_1',\ q \text{ pair} & \Rightarrow \varrho(I) \in E_4, \\ I \in E_1 \text{ ou } E_1',\ q \text{ impair} & \Rightarrow \varrho(I) \in E_2 \text{ ou } E_2', \\ I \in E_2 \text{ ou } E_2',\ q \text{ pair} & \Rightarrow \varrho(I) \in E_2 \text{ ou } E_2', \\ I \in E_2 \text{ ou } E_2',\ q \text{ impair} & \Rightarrow \varrho(I) \in E_4, \\ I \in E_4 & \Rightarrow \varrho(I) \in E_1 \text{ ou } E_1'. \end{cases} \tag{6.5}$$

Soit ω et ω' les nombres définissant $\psi(I)$ et $\psi(\varrho(I))$ respectivement, donnés par les formules (4.1). Dans chacune des éventualités de (6.5) nous développons ω en fraction continue à l'entier le plus proche et trouvons au bout de n pas ($n = 0$, 1 ou 2) un nombre congru modulo 1 à ω', définissant $\psi(\varrho(I))$. Chaque pas du développement est indiqué par une flèche.

Nous commençons par montrer qu'il est impossible d'avoir $I \in E_2$ et $\varrho(I) \in E_2$.

Si $\varrho(I) \in E_2$ alors $\overline{\varphi'} < 2 - \sqrt{5} < 0$, donc $\varepsilon = 1$, d'où $q = \overline{\varphi} - 1/\overline{\varphi'} < 1 + \beta + 2 + \sqrt{5} < 5$, ce qui montre que $q \leq 4$.

Si $I \in E_2$ et $\varrho(I) \in E_2$ ou E_2' alors $q \equiv 0 \pmod 2$ et $\varphi > 3$, donc la relation $\varphi = q + \varepsilon/\varphi'$ avec $\varphi' > 2$ montre que $q \geq 4$.

Si $I \in E_2$ et $\varrho(I) \in E_2$ on aurait $q = 4$ et $\overline{\varphi} < 2 - \sqrt{5}$, d'où

$$q = 4 = \overline{\varphi} - 1/\overline{\varphi'} < 2 - \sqrt{5} + 2 + \sqrt{5} = 4,$$

ce qui est impossible. Il nous reste à examiner les autres possibilités que nous regroupons en neuf cas.

(1) Cas où $I \in E_2$, $\varrho(I) \in E_2'$; $q \equiv 0 \pmod 2$; $\omega = (\varphi - 1)/2$, $\omega' = 2/(\varphi' - 1)$. On a

$$\omega = \frac{\varphi - 1}{2} = \frac{q}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\varphi'} - 1\right) = \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{q}{2} - \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\varphi'}\right) & \text{si } \varepsilon = 1 \\ \dfrac{q}{2} - 1 + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\varphi'}\right) & \text{si } \varepsilon = -1 \end{array}\right\}$$

$$\to \frac{2\varphi'}{\varphi' - 1} = 2 + \frac{2}{\varphi' - 1} = 2 + \omega'; \quad n = 1.$$

(2) Cas où $I \in E_2'$, $\varrho(I) \in E_2$; $q = 2$ ou 4;

$$\omega = 2/(\varphi - 1) = 2\varphi'((q-1)\varphi' + 1), \quad \omega' = (\varphi' - 1)/2.$$

Si $q = 2$,

$$\frac{2\varphi'}{\varphi' + 1} = 2 - \frac{2}{\varphi' + 1} \to \frac{\varphi' + 1}{2} = \frac{\varphi' - 1}{2} + 1 = \omega' + 1; \qquad n = 1.$$

Si $q = 4$,

$$\frac{2\varphi'}{3\varphi' + 1} = 1 - \frac{\varphi' + 1}{3\varphi' + 1} \to \frac{3\varphi' + 1}{\varphi' + 1} = 3 - \frac{2}{\varphi' + 1} \to \frac{\varphi' + 1}{2} = \omega' + 1; \qquad n = 2.$$

(3) Cas où $I \in E_2$, $\varrho(I) \in E_4$; $q \equiv 1 \pmod 2$; $\omega = (\varphi - 1)/2$, $\omega' = 2\varphi'$. On a

$$\omega = \frac{\varphi - 1}{2} = \frac{q - 1}{2} + \frac{\varepsilon}{2\varphi'} \to 2\varphi' = \omega'; \qquad n = 1.$$

(4) Cas où $I \in E_1$ ou E_1', $\varrho(I) \in E_2$; $q \equiv 1 \pmod 2$; $\omega = \pm 2/\varphi$, $\omega' = (\varphi' - 1)/2$; $\varphi' > 3$. Comme $\overline{\varphi'} < 2 - \sqrt{5}$ on a $\varepsilon = 1$ et $q = \overline{\varphi} - 1/\overline{\varphi'} <$

$(3-\sqrt{5})/2+2+\sqrt{5}<5$, donc $q=3$. D'où

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\pm 2}{3+1/\varphi'} = \frac{\pm 2\varphi'}{3\varphi'+1} = \pm 1 \mp \frac{\varphi'+1}{3\varphi'+1} \to \frac{3\varphi'+1}{\varphi'+1}\\ &= 3-\frac{2}{\varphi'+1} \to \frac{\varphi'+1}{2} = \omega'+1; \quad n=2.\end{aligned}$$

(5) Cas où $I \in E_2'$, $\varrho(I) \in E_2'$; $q \equiv 0 \pmod 2$; $\omega = 2/(\varphi-1) = 2\varphi'/((q-1)\varphi'+1)$, $\omega' = 2/(\varphi'-1)$.

Si $q \geq 4$,

$$\omega \to \frac{(q-1)\varphi'+1}{2\varphi'} = \frac{q}{2} - \frac{\varphi'-1}{2\varphi'} \to \frac{2\varphi'}{\varphi'-1} = 2+\frac{2}{\varphi'-1}; \quad n=2.$$

Si $q=2$ alors $\varepsilon=1$. Comme $\varrho(I) \in E_2'$, si $\varphi'>3$ on a $\overline{\varphi'} > 2-\sqrt{5} = -1/(2+\sqrt{5})$, d'où

$$2 = \overline{\varphi} - \frac{1}{\overline{\varphi'}} > \frac{1-\sqrt{5}}{2} + 2+\sqrt{5} > 2 \quad \text{si } \ 2-\sqrt{5} < \overline{\varphi'} < 0,$$

$$2 = \overline{\varphi} - \frac{1}{\overline{\varphi'}} < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \quad \text{si } \overline{\varphi'} > 0,$$

ce qui est impossible et montre que, si $q=2$, alors $2<\varphi'<3$. Donc

$$\omega = \frac{2\varphi'}{\varphi'+1} = 1-\frac{1-\varphi'}{1+\varphi'} \to \frac{\varphi'+1}{\varphi'-1} = 1+\frac{2}{\varphi'-1} = 1+\omega'; \quad n=1.$$

(6) Cas où $I \in E_1$ ou E_1', $\varrho(I) \in E_2'$; $q \equiv 1 \pmod 2$; $\omega = \pm 2/\varphi$, $\omega' = 2/(\varphi'-1)$.

Si $q \geq 5$, on a $\varphi > 4$, donc

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{\pm 2}{\varphi} \to \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\left(q+\frac{\varepsilon}{\varphi'}\right)\\ &= \frac{q+\varepsilon}{2} - \varepsilon\left(\frac{\varphi'-1}{2\varphi'}\right) \to 2+\frac{2}{\varphi'-1} = 2+\omega'; \quad n=2.\end{aligned}$$

Si $q=3$,

$$\frac{\pm 2}{\varphi} = \frac{\pm 2}{3+\frac{\varepsilon}{\varphi'}} = \pm 1 \mp \frac{\varphi'+\varepsilon}{3\varphi'+\varepsilon} \to \frac{3\varphi'+\varepsilon}{\varphi'+\varepsilon}.$$

Si $\varepsilon=-1$ on a

$$\frac{3\varphi'-1}{\varphi'-1} = 3+\frac{2}{\varphi'-1} = 3+\omega'; \quad n=1.$$

Si $\varepsilon=1$ on a $\varphi'<3$, sinon $\varphi'>3$ et $2-\sqrt{5}<\overline{\varphi'}<0$, d'où $(1-\sqrt{5})/2 < \overline{\varphi} = 3+1/\overline{\varphi'} < 3-2-\sqrt{5} = 1-\sqrt{5}$, ce qui est impossible. Donc $\varphi'+1 > 2(\varphi'-1)$ et

$$\frac{3\varphi'+1}{\varphi'+1} = 2 + \frac{\varphi'-1}{\varphi'+1} \to \frac{\varphi'+1}{\varphi'-1} = 1 + \frac{2}{\varphi'-1} = 1+\omega'; \qquad n = 2.$$

(7) Cas où $I \in E_1$ ou E_1', $\varrho(I) \in E_4$; $q \equiv 0 \pmod 2$; $\omega = \pm 2/\varphi$, $\omega' = 2\varphi'$. Si $q > 4$ ou $q = 4$ et $\varepsilon = 1$ on a

$$\omega = \frac{\pm 2}{\varphi} = \frac{\pm 2}{q + \frac{\varepsilon}{\varphi'}} = \frac{\pm 1}{\frac{q}{2} + \frac{\varepsilon}{2\varphi'}} \to \frac{\varepsilon}{2\varphi'} \to 2\varphi' = \omega'; \qquad n = 2.$$

Si $q = 4$ et $\varepsilon = -1$,

$$\pm\omega = \frac{2\varphi'}{4\varphi'-1} = 1 - \frac{2\varphi'-1}{4\varphi'-1} \to \frac{4\varphi'-1}{2\varphi'-1} = 2 + \frac{1}{2\varphi'-1} \to 2\varphi'-1; \qquad n = 2.$$

Si $q = 2$, alors $\varepsilon = 1$ et

$$\omega = \frac{\pm 2}{\varphi} = \frac{\pm 2\varphi'}{2\varphi'+1} = \pm 1 \mp \frac{1}{2\varphi'+1} \to 2\varphi'+1 = \omega'+1; \qquad n = 1.$$

(8) Cas où $I \in E_2'$, $\varrho(I) \in E_4$; $q \equiv 1 \pmod 2$; $\omega = \pm 2/(\varphi - 1)$, $\omega' = 2\varphi'$. Si $q > 3$,

$$\pm\omega = \frac{2}{\varphi - 1} = \frac{1}{\frac{q-1}{2} + \frac{\varepsilon}{2\varphi'}} \to \frac{\varepsilon}{2\varphi'} \to 2\varphi' = \omega'; \qquad n = 2.$$

Si $q = 3$,

$$\pm\omega = \frac{2\varphi'}{2\varphi'+\varepsilon} = 1 - \frac{\varepsilon}{2\varphi'+\varepsilon} \to 2\varphi'+\varepsilon; \qquad n = 1.$$

(9) Cas où $I \in E_4$, $\varrho(I) \in E_1$ ou E_1' ; $\omega = 2\varphi$, $\omega' = \pm 2/\varphi'$. On a

$$\omega = 2\varphi = 2q + \frac{2\varepsilon}{\varphi'} = 2q \pm \varepsilon\omega', \quad \text{donc } n = 0.$$

Comme dans tous les cas on a $0 \le n \le 2$ on voit que (6.1) et l'inégalité $m \le 4$ de (6.2) sont vrais. D'autre part $n = 0$ seulement dans le cas où $I \in E_4$ et alors $\varrho(I) \in E_1$ ou E_1', ce qui fait que $m \ge 1$ et achève la démonstration de la Proposition 6.

Démonstration des Théorèmes 1(b) et 2(b). Soit C une classe d'idéaux de O_{4D}, et I un idéal α-réduit primitif de C. D'après (6.4), $a = N(I)$ ou $a' = N(\varrho(I))$ est impair, donc la période des idéaux α-réduits de C contient au moins un idéal I_0 tel que $I_0 \notin E_4$. Alors (4.1) et (5.1) montrent que

$$\psi(I_0) = \begin{cases} \varrho^{-1}(\theta(I_0)) & \text{si } I_0 \notin E_2, \\ \theta(I_0) & \text{si } I_0 \in E_2. \end{cases} \tag{6.6}$$

On a $I_0 = \varepsilon_{4D} I_0$, donc d'après (5.3) et le Lemme 3, $\psi(I_0) = \varepsilon_{4D}\psi(I_0)$.

Supposons que (1.1) n'a pas de solution impaire. D'après (5.5) on a $\varepsilon_D = \varepsilon_{4D}$, donc

$$\psi(I_0) = \varepsilon_D \psi(I_0), \tag{6.7}$$

ce qui signifie, tenant compte du Théorème 3(b), que, quand l'idéal I parcourt la période de C de I_0 à I_0, l'idéal $\psi(I)$ avance de $\psi(I_0)$ à $\psi(I_0)$. D'après la Proposition 6 quand l'idéal I avance d'un pas l'idéal $\psi(I)$ avance d'au plus deux pas, mais quand I avance de deux pas alors $\psi(I)$ avance d'au moins un pas, ce qui montre que

$$\tfrac{1}{2}L^*(C) \le L(C) \le 2L^*(C). \tag{6.8}$$

De plus, la seule possibilité pour que $L(C) = 2L^*(C)$ est que la période de C soit formée d'idéaux successivement de types E_1 ou E_1' avec $q = 2$, E_4, E_1 ou E_1' avec $q = 2$, $E_4, \ldots$ Mais si l'on considère la classe principale, l'idéal $(1) = I(\sqrt{D})$ est α-réduit de type E_1 ou E_1' avec $q > 2$ ou de type E_2 ou E_2', ce qui montre que, pour la classe principale, on a $L_0 < 2L_0^*$ et achève la démonstration du Théorème 1(b).

Si $D \equiv 1 \pmod 8$ l'application θ est bijective, ce qui montre que le Théorème 2(b) est une conséquence du Théorème 1(b).

Les inégalités (5.11), (5.12) et (6.8) prouvent le résultat suivant :

THÉORÈME 4. *Soit $D > 5$ un entier non carré congru à* 1 *modulo* 4. *Pour toute classe C d'idéaux de O_{4D},*

- *si l'équation $X^2 - DY^2 = 4$ a des solutions impaires*, $2L^* \le L \le 4L^*$,
- *si l'équation $X^2 - DY^2 = 4$ n'a pas de solution impaire*, $L^*/2 \le L \le 2L^*$.

7. Comparaison des périodes réduites et α-réduites de même discriminant. Soit I un idéal primitif de O_Δ, et φ un nombre associé à I. Les successeurs de φ et de I dans la réduction usuelle sont définis par

$$\varphi = [\varphi] + \frac{1}{\sigma(\varphi)}, \quad \sigma(\varphi) > 1, \quad \sigma(I) = I(\sigma(\varphi)). \tag{7.1}$$

La relation entre ϱ définie par (3.1) et σ est donnée par le lemme suivant.

LEMME 6.

$$\varrho(I) = \begin{cases} \sigma(I) & \textit{si } \sigma(\varphi) > 2, \\ \sigma^2(I) & \textit{si } 1 < \sigma(\varphi) < 2. \end{cases} \tag{7.2}$$

Démonstration. La définition (7.1) de σ montre que $\varrho(\varphi) = \sigma(\varphi)$ si $\sigma(\varphi) > 2$. Si $1 < \sigma(\varphi) < 2$ on a $[\sigma(\varphi)] = 1$ et donc $\sigma(\varphi) = 1 + 1/\sigma^2(\varphi)$, d'où

$$\varphi = [\varphi] + \frac{1}{1 + 1/\sigma^2(\varphi)} = [\varphi] + 1 - \frac{1}{\sigma^2(\varphi) + 1}$$

ce qui montre que $\varrho(I) = I(\sigma^2(\varphi) + 1) = I(\sigma^2(\varphi)) = \sigma^2(I)$, et prouve le Lemme 6.

Corollaire 4. *Si l'idéal I est réduit alors*

$$\varrho(I) = \begin{cases} \sigma(I) & \text{si } \sigma(I) \text{ est 2-réduit,} \\ \sigma^2(I) & \text{si } \sigma(I) \text{ n'est pas 2-réduit.} \end{cases} \tag{7.3}$$

Démonstration. Si l'idéal $I = I(\varphi)$ est réduit le nombre $\sigma(\varphi)$ est réduit si bien que, d'après (7.2), l'idéal $\varrho(I)$ est donné par (7.3).

Lemme 7. (a) *Si l'idéal I est réduit et non α-réduit alors $\sigma(I)$ est α-réduit.*

(b) *Si l'idéal I est α-réduit alors $\sigma(I)$ ou $\sigma^2(I)$ est α-réduit.*

Démonstration. Posant $I = I(\varphi)$ on a $\sigma(I) = I(1/(\varphi - [\varphi]))$.

(a) Si l'idéal I est réduit non α-réduit alors $1 < [\varphi] - \overline{\varphi} < \alpha$, donc

$$\left[\frac{1}{\varphi - [\varphi]}\right] + \frac{1}{[\varphi] - \overline{\varphi}} > 1 + \frac{1}{\alpha} = \alpha,$$

ce qui prouve que $\sigma(I)$ est α-réduit.

(b) Si l'idéal I est α-réduit et $\sigma(I)$ non α-réduit on a

$$[\varphi] - \overline{\varphi} > \alpha \quad \text{et} \quad 1 < \left[\frac{1}{\varphi - [\varphi]}\right] + \frac{1}{[\varphi] - \overline{\varphi}} < \alpha.$$

Comme $\alpha = 1+1/\alpha$ on voit que $[1/(\varphi - [\varphi])] = 1$ d'où, comme $1/(\varphi - [\varphi]) = 1 + 1/\sigma^2(\varphi)$, on a

$$\sigma^2(\varphi) = \frac{\varphi - [\varphi]}{1 + [\varphi] - \varphi}.$$

Comme $\sigma^2(\varphi) > 1$ et

$$-\overline{\sigma^2(\varphi)} = \frac{[\varphi] - \overline{\varphi}}{[\varphi] - \overline{\varphi} + 1} > \frac{\alpha}{\alpha + 1}$$

(puisque $[\varphi] - \overline{\varphi} > \alpha$) on a

$$[\sigma^2(\varphi)] - \overline{\sigma^2(\varphi)} > 1 + \frac{\alpha}{\alpha + 1} = \alpha,$$

ce qui prouve que $\sigma^2(\varphi)$ est α-réduit et achève la démonstration du Lemme 7.

Les Lemmes 6 et 7 permettent de donner une deuxième démonstration du Théorème 3(a), à partir du résultat analogue pour les idéaux réduits.

En effet, on sait qu'il existe n_1 tel que $\sigma^n(I)$ soit réduit pour $n \geq n_1$. Le Corollaire 4 montre que $\varrho^n(I) = \sigma^{n'}(I)$ avec $n' \geq n$, donc l'idéal $\varrho^n(I)$ est réduit pour $n \geq n_1$. Si $\varrho^n(I)$ n'était jamais α-réduit le Corollaire 4 montre que, pour tout $n \geq n_1$, on a $\varrho(\varrho^n(I)) = \sigma^2(\varrho^n(I))$, donc, désignant par φ_n le nombre réduit associé à $\varrho^n(I)$, on voit, d'après (7.2), que $[\sigma(\varphi_n)] = 1$ et, comme φ_{n+1} n'est pas α-réduit, $[\varphi_{n+1}] = 1$, ce qui montre que $\varphi_{n+1} = 1 + 1/\varphi_{n+1}$, d'où $\varphi_{n+1} = \alpha$, ce qui est impossible. Donc il existe n_2 tel que $\varrho^n(I)$ est α-réduit pour $n \geq n_2$, ce qui est le Théorème 3(a).

Du Lemme 7 et du Théorème 3(b) on déduit

Proposition 7. *Soit C une classe d'idéaux primitifs de l'ordre O_Δ. La période P_α des idéaux α-réduits de C s'obtient en enlevant à la période P des idéaux réduits de C les idéaux non α-réduits. La période P ne contient pas deux idéaux consécutifs non α-réduits.*

Démonstration. Le Lemme 7(a) montre que $P \cap P_\alpha \neq \emptyset$, ce qui d'après le Théorème 1(b) montre que $P_\alpha \subset P$. La proposition résulte alors du Lemme 7(a) et (b).

Références

[1] G. Eisenstein, *Aufgaben*, J. Reine Angew. Math. 27 (1844), 86–87 (Werke I, Chelsea, New York, 1975, 111–112).

[2] C. F. Gauss, *Arithmetische Untersuchungen* (*Disquisitiones Arithmeticae*), Chelsea, New York, 1965.

[3] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5ème éd., Oxford University Press, 1989.

[4] A. Hurwitz, *Über eine besondere Art der Kettenbrüchen-Entwicklung reelle Grössen*, Acta Math. 12 (1889), 367–405.

[5] N. Ishii, P. Kaplan and K. S. Williams, *On Eisenstein's problem*, Acta Arith. 54 (1990), 323–345.

[6] P. Kaplan, *Idéaux k-réduits des ordres des corps quadratiques réels*, J. Math. Soc. Japan 47 (1995), 171–181.

[7] P. Kaplan et P. A. Leonard, *Idéaux négativement réduits d'un corps quadratique réel et un problème d'Eisenstein*, Enseign. Math. 39 (1993), 196–210.

[8] P. Kaplan and K. S. Williams, *Pell's equations $X^2 - mY^2 = -1, -4$ and continued fractions*, J. Number Theory 23 (1986), 169–182.

[9] —, —, *The distance between ideals in the orders of a real quadratic field*, Enseign. Math. 36 (1990), 321–358.

[10] P. G. Lejeune Dirichlet und R. Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Chelsea, New York, 1968.

[11] Y. Mimura, *On odd solutions of the equation $X^2 - DY^2 = 4$*, dans : Proc. Sympos. Analytic Number Theory and Related Topics, Gakushuin University, Tokyo, 1992, 110–118.

[12] H. C. Williams, *Eisenstein problem and continued fractions*, Utilitas Math. 37 (1990), 145–158.

Département de Mathématiques
Université de Nancy I
B.P. 239
54506 Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France
E-mail: kaplan@iecn.u-nancy.fr

Department of Mathematics
Osaka Electro-Communication University
Neyagawa, Osaka, Japon
E-mail: mimura@isc.osakac.ac.jp

Received on 14.7.1995
and in revised form on 2.11.1995 (2834)