ACTA ARITHMETICA
LXXVI.3 (1996)

Le plus grand facteur premier de n^2+1 où n est presque premier

par

Cécile Dartyge (Nancy)

0. Introduction. En 1895, Tchebychev a montré que si P_x désigne le plus grand facteur premier du produit $\prod_{n\le x}(n^2+1)$, alors le rapport P_x/x tend vers ∞ quand x tend vers ∞. Ce résultat a été amélioré et généralisé tout au long du siècle par de nombreux mathématiciens, notamment par Hooley [Ho], qui en 1967, en apportant plusieurs idées nouvelles à la méthode de Tchebychev, a obtenu la minoration $P_x > x^{11/10}$, pour x assez grand. En particulier, il introduisit du crible pour étudier la somme :

$$\sum_{x<p\le P_x} \log p|\{0\le n\le x : n^2+1\equiv 0 \pmod p\}|,$$

ce qui l'a conduit à estimer des sommes d'exponentielles du type

$$\sum_{m\sim M}\ \sum_{\substack{0\le v<m\\ v^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, m)}} e\left(\frac{-hv}{m}\right),$$

avec la notation usuelle $e(t)=\exp(2i\pi t)$.

Un point remarquable de sa preuve fut alors de transformer cette somme en une somme de Kloosterman portant sur un petit dénominateur, c'est-à-dire, une somme du type

$$S(h,k;s)=\sum_{\substack{0\le u<s\\ (u,s)=1}} e\left(\frac{h\overline{u}+ku}{s}\right)$$

(le symbole $\overline{u}$ désigne un inverse de u modulo s), où s est inférieur à $2M^{1/2}$, pour appliquer les majorations de Weil :

$$S(h,k;s)\ll (h,k,s)^{1/2}s^{1/2+\varepsilon}.$$

1991 *Mathematics Subject Classification*: 11L05, 11N32, 11N36.

Cette transformation repose sur la correspondance de Gauss entre les solutions $v^2+1\equiv 0 \pmod m$ et les écritures de m sous la forme $m=r^2+s^2$; plus précisement, on a le lemme :

LEMME 0 (Gauss). *Pour $m>1$, il existe une correspondance bijective entre les représentations de m sous la forme $m=r^2+s^2$, avec $(r,s)=1$, $|r|<s$ et les solutions de $v^2+1\equiv 0 \pmod m$. Cette bijection est donnée par*
$$\frac{v}{m}=\frac{\overline{r}}{s}-\frac{r}{s(r^2+s^2)} \pmod 1,$$
où $\overline{r}$ désigne l'inverse de r modulo s.

En 1982, Deshouillers et Iwaniec [D-I1] ont repris les idées de Hooley, pour y injecter les remarquables résultats sur les majorations de sommes de Kloosterman en moyenne sur h, k, s, qu'ils avaient établis dans [D-I2] et sont ainsi arrivés à la minoration : pour tout $\varepsilon>0$ et pour x assez grand, $P_x>x^{\theta-\varepsilon}$, avec $\theta=1.202468\ldots$

Le point de départ de notre travail fut d'étudier ce que devenaient ces résultats lorsque l'on remplaçait n par un nombre premier, c'est-à-dire, d'étudier le plus grand facteur premier P^+ du produit $\prod_{p\le x}(p^2+1)$.

Une utilisation directe du théorème de Brun–Titchmarsh par exemple sous la forme énoncée dans [I2] pour détecter les $p\equiv \pm v \pmod q$, avec $0\le v<q$, $v^2+1\equiv 0 \pmod q$ fournit la minoration $P^+>x^\gamma$, avec $\gamma=0.78\ldots$ inférieur à 1. Il est alors naturel d'étudier le plus grand facteur premier du produit $\prod_{\tilde n\sim x}(\widetilde{n}^2+1)$, où $\widetilde{n}$ est un entier ayant peu de facteurs premiers et la notation $n\sim x$ signifie $n\in[x,2x]$.

L'objet de cet article est ainsi de montrer le

THÉORÈME. *Soit $\alpha<1/12.2$. Il existe $\varepsilon>0$ tel que pour x assez grand, on ait l'inégalité*
$$|\{n\sim x : p\,|\,n\Rightarrow p>x^\alpha,\ P^+(n^2+1)>x^{1+\varepsilon}\}|\gg x/\log x,$$
où $P^+(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n, avec la convention $P^+(1)=0$.

La preuve de ce théorème reprend la méthode de Tchebychev–Hooley, mais le fait de travailler avec des nombres presque premiers modifie sensiblement toutes les étapes de la démonstration. En particulier, lorsque p est supérieur à x, l'estimation de la somme
$$\sum_{x<p<P_x}\log p|\{\widetilde{n}\sim x:\widetilde{n}^2+1\equiv 0 \pmod p\}|$$
est plus ardue.

On détecte les entiers presque premiers $\widetilde{n}$, et les nombres premiers p, avec un crible de dimension 2 appliqué aux produits mn, avec $n^2+1\equiv 0 \pmod m$. Il faut alors estimer les quantités

$$\sum_{\substack{m\sim M\\ m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d)}} \log m|\{n\sim x : n\equiv 0 \pmod a,\ n^2+1\equiv 0 \pmod m\}|.$$

On développe en série de Fourier les congruences sur n, mais la condition $n\equiv 0 \pmod a$ perturbe les transformations des sommes d'exponentielles que l'on rencontre alors. Après quelques transformations utilisant le lemme 0, la somme que l'on obtient est finalement de la forme

$$\sum_{\delta<\Delta}\sum_{\substack{h\sim H\\ k\sim K\\ d\sim D}} a_{d,h,k}\sum_{\substack{s\sim S\\ (s,d)=1}} g(d,\delta,h,k,s)\sideset{}{^*}\sum_{\alpha \bmod \delta} e\left(\frac{F(\alpha,h,k,d,s)}{\delta}\right)$$
$$\times \sum_{(u,s)=1} e\left(\frac{h\overline{d}\overline{u}+ku}{s}\right),$$

où g est une fonction "lisse", F est une fraction rationnelle et le symbole $*$ indique que les pôles de F sont exclus de la somme sur α. Cette somme dépend de $s \bmod \delta$ et casse ainsi la lissité sur s. Les résultats de Deshouillers et Iwaniec de [D-I2] ne sont plus applicables et on estime finalement les sommes sur α et sur u à l'aide des résultats de Weil de géométrie algébrique.

Les différents paragraphes de cet article correspondent aux étapes de la méthode de Tchebychev–Hooley. Le paragraphe 7 est le passage crucial de la démonstration, on y traite la somme critique présentée dans cette introduction.

Je tiens à remercier le Professeur Etienne Fouvry pour toute l'aide qu'il m'a apportée lors de la réalisation de ce travail.

1. La méthode de Tchebychev. Soient $x>2$ et f une fonction de classe C^∞, positive, à support dans $[x,2x]$ et telle que $f^{(l)}(t)\ll t^{-l}$, pour tout $l\in\mathbb{N}$ (la constante dans $\ll$ ne dépendant que de l). On pose $x_0=\int f(t)\,dt$; on a alors $x_0\approx x$. Pour $\alpha>0$, on définit la quantité

$$V_\alpha(x)=\sum_{p|n\Rightarrow p>x^\alpha} f(n)\log(n^2+1).$$

La méthode de Tchebychev consiste alors à évaluer la quantité $V_\alpha(x)$ de deux manières différentes, dont l'une dépend de P^+, le plus grand facteur premier du produit $V_\alpha(x)$.

On commence par estimer $V_\alpha(x)$ presque directement à partir du résultat classique concernant les entiers sans petit facteur premier. Nous en donnons une forme très forte due à Tenenbaum ([T], théorème 3, p. 406) :

Lemme 1.1. *Soit la fonction* $\Phi(x,y) = |\{n \le x : p \mid n \Rightarrow p > y\}|$. *On pose* $u = \log x/\log y$. *On a, alors, uniformément pour* $x \ge y \ge 2$, *l'égalité*

$$\Phi(x,y) = \frac{xw(u) - y}{\log y} + O\left(\frac{x}{(\log y)^2}\right),$$

où w *est la fonction de Buchstab et est solution, pour* $u > 1$, *de l'équation différentielle aux différences*

$$\begin{cases} (uw(u))' = w(u-1) & \text{si } u > 2, \\ uw(u) = 1 & \text{si } 1 \le u \le 2. \end{cases}$$

Nous n'avons pas besoin de toute la puissance de ce résultat, car dans la suite on prendra $y = x^\alpha$, avec α constant compris entre 0 et 1, mais ce lemme s'applique facilement pour montrer le

Lemme 1.2. *Pour* $0 < \alpha < 1$, *on a l'égalité*

$$V_\alpha(x) = \frac{2w(\alpha^{-1})}{\alpha} x_0 + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Preuve. Soit χ_α la fonction caractéristique des entiers n ayant tous leurs facteurs premiers $> x^\alpha$. Comme $n \sim x$, on a l'égalité

$$\begin{aligned} V_\alpha(x) &= \sum_n f(n)\chi_\alpha(n)\log(n^2+1) \\ &= 2\log x \sum_n f(n)\chi_\alpha(n) + O\Big(\sum_n f(n)\chi_\alpha(n)\Big). \end{aligned}$$

Il s'agit alors d'estimer

$$\sum_n f(n)\chi_\alpha(n) = \int f(t)\, d\Phi(t, x^\alpha).$$

On fait une intégration par parties :

$$\sum_n f(n)\chi_\alpha(n) = [f(t)\Phi(t,x^\alpha)]_x^{2x} - \int_x^{2x} f'(t)\Phi(t,x^\alpha)\, dt.$$

Le premier terme du membre de droite est nul, et on utilise le lemme 1.1 pour évaluer le second :

$$\begin{aligned} \sum_n f(n)\chi_\alpha(n) = &-\int_x^{2x} \frac{f'(t)t}{\alpha\log x}\, w\left(\alpha^{-1} + O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right) dt \\ &+ O\left(\int_x^{2x} \frac{t|f'(t)|}{\alpha^2(\log x)^2}\, dt\right) + O\left(\int_x^{2x} \frac{x^\alpha|f'(t)|}{\alpha\log x}\, dt\right). \end{aligned}$$

Pour x tendant vers ∞, on a

$$w\left(\alpha^{-1}+O\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)=w(\alpha^{-1})+O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

De plus, comme $f'(t)\ll t^{-1}$, les termes de reste sont $\ll x/(\log x)^2$.

Puis, en faisant une deuxième intégration par parties, on a

$$\begin{aligned}\int_x^{2x}\frac{f'(t)tw(\alpha^{-1})}{\alpha\log x}\,dt&=\left[\frac{f(t)tw(\alpha^{-1})}{\alpha\log x}\right]_x^{2x}-\frac{w(\alpha^{-1})}{\alpha}\int_x^{2x}\frac{f(t)}{\log x}\,dt\\&=-\frac{w(\alpha^{-1})}{\alpha}\cdot\frac{x_0}{\log x}.\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$V_\alpha(x)=\frac{2w(\alpha^{-1})}{\alpha}x_0+O\left(\frac{x}{\log x}\right),\tag{1}$$

ce qui termine la preuve du lemme 1.2.

Maintenant, tout le reste de la preuve est consacré à la deuxième estimation de $V_\alpha(x)$. On commence par écrire l'égalité

$$V_\alpha(x)=\sum_{\substack{r,s\\ r\ \text{premier}\\ r^s\le 4x^2+1}}\log r\sum_{\substack{n,p\mid n\Rightarrow p>x^\alpha\\ n^2+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ r^s)}}f(n).$$

Pour $d\in\mathbb{N}$, on définit la quantité

$$|\mathcal{A}_d|=\sum_{\substack{n,p\mid n\Rightarrow p>x^\alpha\\ n^2+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d)}}f(n).$$

Pour $h,t,\varepsilon,\theta>0$, avec $1>t>1/2-\varepsilon$, et $\theta>2/3$, on procède ensuite au découpage suivant (r désigne toujours un nombre premier) :

$$\begin{aligned}V_\alpha(x)=&\sum_{r^s\le x^{1/2-\epsilon}}\log r\cdot|\mathcal{A}_{r^s}|+\sum_{x^{1/2-\varepsilon}<r^s\le x^t}\log r\cdot|\mathcal{A}_{r^s}|\\&+\sum_{\substack{x^t<r^s\\ s\ge 2,\, r\le x^\theta}}\log r\cdot|\mathcal{A}_{r^s}|+\sum_{\substack{x^t<r^2\\ r>x^\theta}}\log r\cdot|\mathcal{A}_{r^2}|\\&+\sum_{x^t<r\le x^{1+h}}\log r\cdot|\mathcal{A}_r|+\sum_{r>x^{1+h}}\log r\cdot|\mathcal{A}_r|\\=&\ S_0+S_1+S_2+S_3+S_4+S_5,\end{aligned}\tag{2}$$

par définition.

La première somme, S_0, est évaluée avec un théorème du type "le théorème de Bombieri–Vinogradov" établi par Wolke [W]; S_1 est majorée avec un crible sur n, S_2 est majorée directement, S_3 est traitée avec le crible à carrés de Heath-Brown. La somme S_4 est la plus difficile à traiter, on la majorera en utilisant un crible de dimension 2 qui servira à détecter à la fois les entiers n presque premiers et les nombres premiers r. On choisira alors $\alpha > 0$ le plus grand possible tel qu'il existe ε et $h > 0$ assez petits tels que $S_5 = V_\alpha(x) - S_0 - S_1 - S_2 - S_3 - S_4$ soit strictement positive.

2. Estimation de S_0. La quantité S_0 s'évalue de la même manière que $V_\alpha(X)$, mais en utilisant le théorème que Wolke a montré dans [W], concernant la répartition en moyenne des progressions arithmétiques portant sur des entiers presque premiers.

C'est le

LEMME 2.1. *Soient*

$$\Phi_k(x,z) = \sum_{\substack{n\le x\\ (n,k)=1\\ p\mid n\Rightarrow p>z}} 1 \quad et \quad \Phi(x,z,k,l) = \sum_{\substack{n\le x\\ n\equiv l\ (\mathrm{mod}\ k)\\ p\mid n\Rightarrow p>z}} 1,$$

avec $2 \le x$, $1 \le z \le x$. *Alors, pour tout* $A > 0$, *il existe* $A_2 > 0$ *tel que uniformément pour* $z \le x^{1/2}$ *et* $Q = x^{1/2}(\log x)^{-A_2}$, *on ait*

$$\sum_{k\le Q} \max_{(l,k)=1} \max_{y\le x} \left| \Phi(x,z,k,l) - \frac{1}{\varphi(k)}\Phi_k(x,z)\right| \ll x(\log x)^{-A}.$$

Ce lemme est la clé de la preuve du résultat suivant :

LEMME 2.2. *On a l'égalité*

$$S_0 = \frac{w(\alpha^{-1})x}{2\alpha} + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

Preuve. On écrit S_0 sous la forme

$$S_0 = \sum_{r^s\le x^{1/2-\varepsilon}} \log r \sum_{\substack{0<v<r^s\\ v^2+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ r^s)}} \sum_{n\equiv v\ (\mathrm{mod}\ r^s)} f(n)\chi_\alpha(n).$$

Pour exprimer cette somme sous forme intégrale, on définit

$$\Psi(t) = \sum_{r^s\le x^{1/2-\varepsilon}} \log r \sum_{\substack{0\le v<r^s\\ v^2+1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ r^s)}} \sum_{\substack{n\le t\\ n\equiv v\ (\mathrm{mod}\ r^s)}} \chi_\alpha(n).$$

On a alors l'égalité

$$S_0 = \int f(t)\,d\Psi(t) = -\int_x^{2x} f'(t)\Psi(t)\,dt. \tag{3}$$

On applique alors le lemme 2.1 à $\Psi(t)$, pour $x<t<2x$:

$$\Psi(t) = \sum_{r^s<x^{1/2-\varepsilon}} \log r \sum_{\substack{v \bmod r^s \\ v^2+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, r^s)}} \frac{1}{\varphi(r^s)} \sum_{\substack{n\le t \\ (n,r^s)=1}} \chi_\alpha(n) + O\biggl(\frac{x}{(\log x)^{100}} \max \varrho(r^s)\biggr), \tag{4}$$

avec $\varrho(d) = |\{0<v<d : v^2+1\equiv 0 \pmod d\}|$.

Cette fonction ϱ interviendra dans toutes les étapes de la démonstration; elle prend les valeurs suivantes :

Lemme 2.3. *La fonction ϱ est multiplicative, et vérifie* :

(i) $\varrho(2)=1$, $\varrho(2^k)=0$ *pour* $k>1$,
(ii) *pour* $p>2$ *et* $k\ge 1$, $\varrho(p^k)=\varrho(p)$,
(iii) $\varrho(p)=2$ *si* $p\equiv 1 \pmod 4$, $\varrho(p)=0$ *si* $p\equiv -1 \pmod 4$.

Ainsi, pour r premier, on a $0\le\varrho(r^s)\le 2$; on reporte ceci dans (4), tout en profitant de l'inégalité $f'(t)\ll t^{-1}$:

$$S_0 = -\sum_{r^s<x^{1/2-\varepsilon}} \log r \sum_{\substack{v \,(\mathrm{mod}\, r^s) \\ v^2+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, r^s)}} \frac{1}{\varphi(r^s)} \int_x^{2x} f'(t)\Phi_{r^s}(t,x^\alpha)\,dt + O\biggl(\frac{x}{(\log x)^{10}}\biggr).$$

La fonction Φ_{r^s} vérifie l'équation

$$\Phi_{r^s}(t,x^\alpha) = \Phi(t,x^\alpha) - \sum_{\substack{n\le t \\ p\mid n\Rightarrow p>x^\alpha \\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, r^s)}} 1.$$

Le deuxième terme du membre de droite de cette dernière égalité est nul si $r\le x^\alpha$; sinon, si $r>x^\alpha$, alors tout entier n ayant une contribution positive dans cette somme peut se réécrire comme $n=mr^s$ avec $m<tr^{-s}$ et ayant tous ses facteurs premiers supérieurs à x^α.

On a donc l'égalité

$$\Phi_{r^s}(t,x^\alpha) = \begin{cases} \Phi(t,x^\alpha) & \text{si } r\le x^\alpha, \\ \Phi(t,x^\alpha)-\Phi(tr^{-s},x^\alpha) & \text{si } r>x^\alpha. \end{cases}$$

Cette écriture nous permet d'utiliser une nouvelle fois le lemme 1.1, et en faisant les mêmes opérations que celles effectuées pour calculer $V_\alpha(x)$, on a

$$S_0 = \frac{w(\alpha^{-1})}{\alpha} \cdot \frac{x_0}{\log x} \sum_{\substack{r^s < x^{1/2-\varepsilon} \\ r \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \frac{2\log r}{\varphi(r^s)}\bigg(1 + O\bigg(\frac{1}{\log x}\bigg)\bigg)$$
$$+ O\bigg(\frac{x_0}{\log x} \sum_{\substack{r^s < x^{1/2-\varepsilon} \\ r > x^\alpha}} \frac{\log r}{r^{2s}} + \frac{x^\alpha}{\log x} \sum_{\substack{r^s < x^{1/2-\varepsilon} \\ r > x^\alpha}} \frac{\log r}{r^s}\bigg).$$

Le terme d'erreur de cette dernière ligne est, pour tout $\eta > 0$, un $O(x^{1-\alpha/3} + x^{\alpha+\eta})$, ce qui est très petit.

Finalement, grâce à l'égalité asymptotique

$$\pi(x, 4, 1) = \frac{x}{2\log x} + O\bigg(\frac{x}{(\log x)^2}\bigg),$$

on obtient l'égalité

$$S_0 = \frac{w(\alpha^{-1})}{\alpha} \cdot \frac{x_0}{\log x}\bigg(1 + O\bigg(\frac{1}{\log x}\bigg)\bigg) \int_2^{x^{1/2-\varepsilon}} \frac{\log r}{r} \cdot \frac{dr}{\log r}$$
$$+ O\bigg(\frac{w(\alpha^{-1})}{\alpha \log x} x_0 \sum_{\substack{s \ge 2,\, r^s \le x^{1/2-\varepsilon} \\ r \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \frac{2\log r}{\varphi(r^s)}\bigg).$$

On a donc

$$S_0 = \frac{w(\alpha^{-1})}{2\alpha} x_0 - \varepsilon x_0 + O\bigg(\frac{x}{\log x}\bigg).$$

3. Majoration de S_1. On rappelle la définition de S_1 donnée à la ligne (2) :

$$S_1 = \sum_{\substack{x^{1/2-\varepsilon} \le r^s \le x^t \\ r \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \log r \sum_{n^2+1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, r^s)} f(n)\chi_\alpha(n) = \sum_{x^{1/2-\varepsilon} \le r^s \le x^t} \log r \cdot |\mathcal{A}_{r^s}|,$$

avec $1/2 - \varepsilon < t < 1$.

Première majoration de S_1. Cette première majoration consiste en quelque sorte à réécrire la preuve du théorème de Brun–Titchmarsh *facile*

$$\pi(x, q, a) \le \frac{x(2 + o(1))}{\varphi(q) \log(x/q)},$$

mais dans un autre contexte et avec des notations différentes.

Pour r^s fixé, $r \ge 3$, on va majorer les quantités $|\mathcal{A}_{r^s}|$ en utilisant un crible de Rosser sur n.

Pour $D(r^s) > 0$, que l'on précisera plus tard, on définit les poids de Rosser (λ_d) de la manière suivante : $\lambda_1 = 1, \lambda_d = 0$ si d a un facteur carré, ou si $(d,r)>1$, et pour d sans facteur carré et tel que $(d,r)=1$, $d=p_1\dots p_k$ avec $p_1>\dots>p_k$, on pose

$$\lambda_d=\begin{cases}(-1)^k & \text{si } p_1p_2\dots p_{2l}p_{2l+1}^3<D(r^s),\ \text{pour } 0\le l\le (k-1)/2,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ces coefficients de Rosser vérifient la propriété fondamentale $\lambda*\mathbf{1}\ge\mu*\mathbf{1}$, et on a donc l'inégalité

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_{r^s}|&\le\sum_{\substack{d\mid P(x^\alpha)\\ d<D(r^s)}}\lambda_d\sum_{\substack{n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d)\\ n^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,r^s)}}f(n)\\ &\le\sum_{\substack{d\mid P(x^\alpha)\\ d<D(r^s)}}\lambda_d\sum_{\substack{0<v<dr^s\\ d\mid v\\ v^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,r^s)}}\ \sum_{n\equiv v\,(\mathrm{mod}\,dr^s)}f(n).\end{aligned}$$

On utilise ensuite la formule sommatoire de Poisson :

Lemme 3.1. *Soit g une fonction de classe C^1, à support compact dans $\mathbb{R}$, et soit $\widehat{g}$ sa transformée de Fourier. Alors on a*

$$\sum_{n\equiv a\,(\mathrm{mod}\,q)}g(n)=\frac{1}{q}\sum_{h\in\mathbb{Z}}e\Big(\frac{-ah}{q}\Big)\widehat{g}\Big(\frac{h}{q}\Big).$$

On applique la formule de Poisson pour transformer les congruences sur n. Le coefficient en $h=0$ fournit le terme principal :

$$\begin{aligned}|\mathcal{A}_{r^s}|&\le\sum_{\substack{d\mid P(x^\alpha)\\ d<D(r^s)}}\lambda_d\sum_{h\in\mathbb{Z}}\frac{1}{dr^s}\widehat{f}\Big(\frac{h}{dr^s}\Big)\sum_{\substack{0<v<dr^s\\ d\mid v,\ v^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,r^s)}}e\Big(\frac{-hv}{dr^s}\Big)\\ &\le x_0\sum_{\substack{d\mid P(x^\alpha)\\ d<D(r^s)\\ (d,r)=1}}\lambda_d\sum_{\substack{0<v<dr^s\\ d\mid v\\ v^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,r^s)}}\frac{1}{dr^s}\\ &\quad+\sum_{\substack{d\mid P(x^\alpha)\\ d<D(r^s)\\ (d,r)=1}}\lambda_d\sum_{h\neq 0}\frac{1}{dr^s}\widehat{f}\Big(\frac{h}{dr^s}\Big)\sum_{\substack{0<v<dr^s\\ d\mid v\\ v^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,r^s)}}e\Big(\frac{-hv}{dr^s}\Big).\end{aligned}$$

Pour $h\neq 0$, en faisant l intégrations par parties, on trouve

$$\widehat{f}\Big(\frac{h}{dr^s}\Big)=\Big(\frac{-2i\pi h}{dr^s}\Big)^{-l}\int f^{(l)}(t)e\Big(\frac{-2i\pi ht}{dr^s}\Big)\,dt\ll\Big(\frac{dr^s}{|h|x}\Big)^l x.$$

Pour $\varepsilon>0$, en prenant $l=[4\varepsilon^{-1}]$, on montre que $\widehat{f}(h/(dr^s))\ll 1/h^2$ pour $|h|>H$ avec $H=dr^sx^{-1+\varepsilon}$.

Pour $d<x^{1-\varepsilon}r^{-s}$, on a $H\le 1$ et la somme sur $h\neq 0$ est $\ll x^\varepsilon/r^s$.

On choisit alors $D(r^s) = x^{1-\varepsilon}r^{-s}$. En profitant ensuite des travaux d'Iwaniec sur le crible linéaire, plus précisément, en appliquant le théorème 1 de [I1], on a l'inégalité

$$S_1 \le x_0 \sum_{\substack{x^{1/2-\varepsilon}\le r^s\le x^t\\ r\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)}} \frac{2\log r}{r^s} \times \prod_{\substack{p<x^\alpha\\ p\ne r}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)F\Big(\frac{\log(x^{1-\varepsilon}r^{-s})}{\log(x^\alpha)}\Big)+O\Big(\frac{x}{\log x}\Big)+\varepsilon' x,$$

avec $\varepsilon' > 0$ arbitrairement petit.

Comme

$$\sum_{\substack{s\ge 2\\ x^{1/2-\varepsilon}\le r^s\le x^t}} \frac{\log r}{r^s}\prod_{\substack{p<x^\alpha\\ p\ne r}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)x_0 \ll \frac{x}{\log x},$$

on a, en profitant de l'égalité

$$\pi(x,4,1)=\frac{x}{2\log x}+O\Big(\frac{x}{\log x}\Big),$$

l'inégalité

$$S_1 \le \frac{x_0e^{-\gamma}}{\alpha\log x}\int_{x^{1/2-\varepsilon}}^{x^t}\frac{\log r}{r}F\Big(\frac{\log(x/r)}{\log(x^\alpha)}\Big)\frac{dr}{\log r}+O\Big(\frac{x}{\log x}\Big)+\varepsilon' x,$$

c'est-à-dire,

$$S_1 \le \frac{x_0e^{-\gamma}}{\alpha}\int_{1/2-\varepsilon}^{t}F\Big(\frac{1-\lambda}{\alpha}\Big)d\lambda+O\Big(\frac{x}{\log x}\Big)+\varepsilon' x. \tag{5}$$

Deuxième majoration de S_1. On repart de l'égalité

$$S_1 = \sum_{\substack{x^{1/2}<r^s<x^t\\ r\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\ 4)}}\ \sum_{n\equiv \pm v \ (\mathrm{mod}\ r^s)} f(n)\chi_\alpha(n),$$

où v est une solution de $v^2+1\equiv 0 \pmod{r^s}$ (r est premier).

Il s'agit alors de détecter les entiers intervenant dans la somme

$$|\mathcal{A}^{(r^s)}| = \sum_{n\equiv v \ (\mathrm{mod}\ r^s)} f(n)\chi_\alpha(n).$$

A cette fin, on transpose les résultats d'Iwaniec [I2] concernant le théorème de Brun–Titchmarsh à notre situation.

Comme dans la première majoration, on commence par appliquer le crible linéaire d'Iwaniec, mais on profite ici pleinement de la présentation sous forme bilinéaire du terme d'erreur dans le théorème 1 de [I1].

Pour $\varepsilon > 0$, $A = \exp(8\varepsilon^{-3})$, $x > K(\varepsilon)$, $M \ge 1$, $N \ge 1$, $D = MN < x$, on a l'inégalité

$$|\mathcal{A}^{(r^s)}| \le \frac{x_0}{r^s} \prod_{\substack{p<x^\alpha \\ p\ne r}} \left(1-\frac{1}{p}\right)\left\{F\left(\frac{\log D}{\log(x^\alpha)}\right)+c\varepsilon\right\} + \sum_{a<A} R_a(\mathcal{A}^{(r^s)}, M, N),$$

où c est une constante absolue et

$$R_a(\mathcal{A}^{(r^s)}, M, N) = \sum_{\substack{m\le M \\ n\le N \\ (mn,r)=1}} a_m b_n r(\mathcal{A}^{(r^s)}, mn).$$

En profitant de cette flexibilité du terme d'erreur, Iwaniec a montré l'inégalité suivante :

Lemme 3.2 ([I2], théorème 5, p. 105). *Soit $\varepsilon' > 0$, $x^{2/5} < r^s \le x^{2/3-6\varepsilon'}$, $M = x^{1-3\varepsilon'}/r^s$ et $N = x^{1/2-4\varepsilon'}/r^{3s/4}$. On a*

$$\sum_{\substack{m\le M \\ n\le N \\ (mn,r)=1}} a_m b_n r(\mathcal{A}^{(r^s)}, mn) \ll x^{1-\varepsilon'}/r^s.$$

Grâce à ce lemme, on peut choisir $D = MN = x^{3/2-7\varepsilon}/r^{7s/4}$, pour obtenir alors

$$|\mathcal{A}^{(r^s)}| \le \frac{x_0}{r^s} \prod_{p<x^\alpha} \left(1-\frac{1}{p}\right) F\left(\frac{\log(x^{3/2-7\varepsilon}r^{-7s/4})}{\log(x^\alpha)}\right) + \frac{\varepsilon x}{\log x} + O\left(\frac{x}{(\log x)^2}\right).$$

Cette majoration est plus fine que celle qui a servi pour (5) lorsque $r^s < x^{2/3}$ et on termine les calculs comme précédemment.

A partir de ceci on a

Lemme 3.3. *Pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'inégalité*

$$S_1 \le \frac{x_0 e^{-\gamma}}{\alpha} \int_{1/2-\varepsilon}^{2/3} F\left(\frac{3/2-7\varepsilon-7\lambda/4}{\alpha}\right) d\lambda + \frac{x_0 e^{-\gamma}}{\alpha} \int_{2/3}^{t} F\left(\frac{1-\lambda}{\alpha}\right) d\lambda + \varepsilon x + O\left(\frac{x}{\log x}\right).$$

4. Majoration de S_2. Cette quantité se majore presque directement. On écrit la suite d'inégalités

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{\substack{x^t<r^s\\ s\ge 2,\, r<x^\theta}} \log r \sum_{\substack{n^2+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, r^s)\\ p\mid n\Rightarrow p>x^\alpha}} f(n)\\
&\ll \sum_{\substack{x^t<r^s\\ s\ge 2,\, r<x^\theta}} \log r\cdot |\{n\in[x,2x] : n^2+1\equiv 0 \pmod{r^s}\}|\\
&\ll x\sum_{\substack{x^t<r^s\le x\\ s\ge 2,\, r<x^\theta}} \frac{\log r}{r^s} + \sum_{\substack{x<r^s<4x^2+1\\ s\ge 2,\, r<x^\theta}} \log r\\
&\ll x^{1-t/2+\varepsilon}\sum_{x^t<r^s\le x} \frac{1}{r^{s/2}} + \sum_{r<x^\theta}\log r \sum_{s\le 2(\log x)/\log r} 1.
\end{aligned}$$

On a ainsi l'inégalité

$$S_2 \ll x^{1-t/2+\varepsilon'} + x^{\theta+\eta} \ll x^{1-\varepsilon''},$$

pour ε'' assez petit. Donc pour $0<\theta<1$, θ aussi proche de 1 que l'on veut, il existe $\varepsilon>0$ tel que $S_2\ll x^{1-\varepsilon}$.

5. Majoration de S_3 avec un crible à carrés. On rappelle la définition de S_3 :

$$S_3 = \sum_{\substack{x^\theta<r\\ r \text{ premier}}} \log r \sum_{\substack{n^2+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, r^2)\\ p\mid n\Rightarrow p>x^\alpha}} f(n).$$

On va montrer que pour $\theta>3/4$, $S_3\ll x^{1-\varepsilon}$ pour $\varepsilon>0$ assez petit.

On part de l'inégalité

$$S_3 \ll \log x \sum_{x^\theta<d\le 2x} |\{n\in[x,2x] : n^2+1\equiv 0 \pmod{d^2}\}|,$$

cette somme portant sur les entiers d non nécesairement premiers. Pour évaluer ceci on utilise le crible à carrés de Heath-Brown ([HB], théorème 1) :

Lemme 5.1. *Soit $\mathbf{A}=(\omega(n))_n$ une suite de réels, avec $\omega(n)\ge 0$ pour tout n et $\sum\omega(n)<\infty$. On définit $S(\mathbf{A})=\sum_{n\in\mathbb{N}}\omega(n^2)$. Soit $\mathbf{P}$ un ensemble de P nombres premiers. On suppose que $\omega(n)=0$ pour $n=0$ ou $n\ge e^P$. Alors on a la majoration*

$$S(\mathbf{A}) \ll P^{-1}\sum_n \omega(n) + P^{-2}\sum_{p\ne q\in\mathbf{P}}\Bigl|\sum_n \omega(n)\Bigl(\frac{n}{pq}\Bigr)\Bigr|,$$

où $\left(\frac{n}{pq}\right)$ est le symbole de Jacobi.

Il faut détecter les $n^2+1 = md^2$, avec $m < 4x^{2-2\theta}$ et $md^2 \le 4x^2+1$; ainsi, on prend les poids

$$\omega(n) = |\{(m,d) : x^\theta < d \le 2x,\ m \le 4x^{2-2\theta},\\ md^2-1 \in [x^2, 4x^2],\ n = md^2-1\}|,$$

et $\mathbf{P} = \{2 < p < P\}$, où $P > 0$ sera précisé plus tard. On applique alors le lemme 5.1 :

$$S_3 \ll P^{-1+\varepsilon} \sum_{\substack{m\le 4x^{2-2\theta}\\ x^\theta<d\le 2x}} 1 + P^{-2+\varepsilon} \times \sum_{2<p<q<P} \sum_{m\le 4x^{2-2\theta}} \Big| \sum_{x^\theta<d\le 2xm^{-1/2}} \left(\frac{md^2-1}{pq}\right)\Big|. \tag{6}$$

On impose $P < x^{\theta/2}$; alors pour $p \ne q$ impairs, en développant les congruences vérifiées par d, on a

$$\sum_{x^\theta<d\le 2xm^{-1/2}} \left(\frac{md^2-1}{pq}\right) \ll \frac{xm^{-1/2}}{pq} \Big| \sum_{1\le u\le pq} \left(\frac{mu^2-1}{pq}\right)\Big| + pq.$$

Pour $p \ne q$, on a encore

$$\sum_{1\le u\le pq} \left(\frac{mu^2-1}{pq}\right) = \sum_{1\le u\le pq} \left(\frac{mu^2-1}{p}\right)\left(\frac{mu^2-1}{q}\right) = \sum_{1\le \alpha\le p} \left(\frac{m\alpha^2-1}{p}\right) \sum_{1\le \beta\le q} \left(\frac{m\beta^2-1}{q}\right).$$

Pour calculer ceci, on établit d'abord le lemme :

Lemme 5.2. *Si $p \ne 2$ et ne divise pas m,*

$$\sum_{1\le \alpha\le p} \left(\frac{m\alpha^2-1}{p}\right) = -\left(\frac{m}{p}\right).$$

Ce résultat s'obtient directement à partir du théorème 8.2 du livre de Hua [Hu], p. 174.

En appliquant ce lemme à la majoration de S_3 écrite dans (6), on a

$$S_3 \ll P^{-1+\varepsilon}x^{3-2\theta} + P^{-2+\varepsilon_1} \sum_{2<p<q<P} \sum_{m<x^{2-2\theta}} \left(\frac{x}{pq}\cdot\frac{(m,pq)}{\sqrt{m}} + pq\right) \ll P^{-1+\varepsilon_1}x^{3-2\theta} + P^{-2}x^{2-\theta+\varepsilon} + P^2x^{2-2\theta+\varepsilon_1}.$$

En prenant $P = x^{\theta/3}$, on obtient $S_3 \ll x^{3-7\theta/3} + x^{2-4\theta/3+\varepsilon_1}$. Pour $\theta > 3/4$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $S_3 \ll x^{1-\varepsilon}$.

Il reste maintenant à majorer la somme S_4 définie dans (2).

6. Découpage de S_4. On découpe l'intervalle $]x^t, x]$ en intervalles de la forme $]P_k, P_{k+1}]$, avec $P_k = 2^k x^t$, puis on partage la somme S_4 en

$$S_4 = \sum_{0\le k\le K} W_k, \tag{7}$$

avec

$$W_k = \sum_r C_k(r) \log r \cdot |\mathcal{A}_r|,$$

où les C_k sont des fonctions positives de classe C^∞, à support dans $[P_k, 4P_k]$, telles que $C_k^{(l)}(t) \ll P_k^{-l}$ uniformément sur t et vérifiant

$$\sum_{0\le k\le K} C_k(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } x^t < z < x^{1+h}, \\ O(1) & \text{si } x^t/2 < z < x^t \text{ ou si } x^{1+h} < z < 2x^{1+h}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il apparaîtra à la fin de la majoration de S_4 que la perte de précision de l'inégalité (7), correspondant à la somme sur les r avec $x^t/2 < r < x^t$ ou $x^{1+h} < r < 2x^{1+h}$, est négligeable de l'ordre de $x/\log x$.

Ainsi, on est amené à estimer des sommes de la forme

$$W_P = \sum_{P<r<4P} \log r \cdot C(r) \sum_{\substack{n^2+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, r)\\ p\mid n \Rightarrow p > x^\alpha}} f(n), \tag{8}$$

ce qui se fera avec un crible de dimension 2 pour détecter les premiers r et les nombres presque premiers n.

7. Préparation au crible. Pour $P \in [x^t/2, 2x^{1+h}]$ fixé, on pose

$$S_P(d_1, d_2) = \sum_{\substack{m\in[P,4P]\\ m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d_2)}} C(m) \log m \sum_{\substack{n\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d_1)\\ n^2+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m)}} f(m).$$

En reprenant les idées de Hooley [Ho], nous allons établir la proposition suivante :

Proposition 7. *Pour d_1 et d_2 sans facteur carré on a*

$$S_P(d_1, d_2) = x_0 \frac{L(1,\chi_4)}{\zeta(2)} \cdot \frac{\omega(d_1, d_2)}{d_1 d_2} \int \frac{C(t)\log t}{t}\, dt + O\bigg(\frac{x\tau^2(d_2)P^{-1/2}\log P}{d_1 d_2^2}\bigg) + R(P, d_1, d_2),$$

$\omega(d_1, d_2)$ étant la fonction multiplicative définie par

$$\omega(d_1,d_2)=\begin{cases}\varrho(d_2)\displaystyle\prod_{\substack{p\equiv 1\,(4)\\ p\mid d_1d_2}}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}\prod_{\substack{p\mid d_1\\ p\equiv 1\,(4)}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\prod_{2\mid d_1d_2}\Big(1+\frac{1}{2}\Big)^{-1} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \textit{si } (d_1,d_2)=1, & \\ 0 \qquad \textit{si } (d_1,d_2)>1, & \end{cases}$$

avec $\varrho(d)=|\{0<v<d : v^2+1\equiv 0 \pmod d\}|$. *Le terme d'erreur* $R(P,d_1,d_2)$ *vérifie : si* $P<xD^{-1}$ *on a*

$$\sum_{d<D}\mu^2(d)\sum_{d_1d_2=d}|R(P,d_1,d_2)|\ll x^{\varepsilon}\qquad\forall\varepsilon>0,$$

si $P>xD^{-1}$ *on a*

$$\sum_{d<D}\mu^2(d)\sum_{d_1d_2=d}|R(P,d_1,d_2)|\ll P^{3/4}D^{3/2}x^{\varepsilon}\qquad\forall\varepsilon>0.$$

Preuve. Comme on l'avait fait lors de la majoration de S_1, on commence par appliquer la formule sommatoire de Poisson du lemme 3.1 :

$$\begin{aligned}(9)\quad & S_P(d_1,d_2)\\ &=\sum_{m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d_2)}C(m)\log m\sum_{\substack{0\le v<d_1m\\ d_1\mid v\\ v^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,m)}}\ \sum_{n\equiv v\,(\mathrm{mod}\,d_1m)}f(n)\\ &=\sum_{m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d_2)}C(m)\log m\sum_{h\in\mathbb{Z}}\widehat{f}\Big(\frac{h}{d_1m}\Big)\frac{1}{d_1m}\sum_{\substack{0\le v<d_1m\\ d_1\mid v\\ v^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,m)}}e\Big(\frac{-hv}{d_1m}\Big).\end{aligned}$$

Le terme principal est donné par $h=0$, $\widehat{f}(0)=x_0$ et dans le paragraphe suivant, on montrera que

$$\begin{aligned}(10)\quad & \sum_{m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d_2)}C(m)\frac{x_0}{d_1m}\log m\sum_{\substack{0\le v<d_1m\\ d_1\mid v\\ v^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,m)}}1\\ &\qquad\qquad=\frac{\omega(d_1,d_2)}{d_1d_2}x_0\frac{L(1,\chi_4)}{\zeta(2)}\int\frac{C(t)\log t}{t}\,dt+E_0,\end{aligned}$$

où E_0 est une erreur assez petite.

Pour $h\neq 0$, comme pour S_1, on montre que $\widehat{f}(h/(d_1m))\ll 1/h^2$, pour $|h|>H$, avec $H=Pd_1x^{-1+\varepsilon}$. Ainsi, pour $d_1\le D<x^{1-\varepsilon}P^{-1}$, on a $H\le 1$ et

$$\sum_{d<D}\mu^2(d)\sum_{d_1d_2=d}|R(P,d_1,d_2)|\ll x^{\varepsilon},$$

ce qui prouve le premier résultat annoncé (cas $P<xD^{-1}$).

Pour P grand, $P > xD^{-1}$, on va améliorer ce résultat en faisant intervenir des sommes d'exponentielles. On compte profiter d'éventuelles compensations sur la somme $\sum_m \sum_v e((-hv)/(d_1 m))$ que l'on transforme avec le lemme 0 énoncé dans l'introduction.

Le problème est que lorsqu'on écrit $m = r^2+s^2$, on a souvent $(s, d_1) > 1$, ce qui nous empêche d'inverser d_1 mod s. Il faut donc tenir compte de ce pgcd, ce qui rend les opérations plus difficiles.

Pour $H = PDx^{-1+\varepsilon}$, on doit estimer

$$R'_P(d_1,d_2) = \sum_{0<|h|<H} \sum_{m\equiv 0 \pmod{d_2}} C(m)(\log m)\widehat{f}\left(\frac{h}{d_1 m}\right)\frac{1}{d_1 m} \sum_{\substack{0<v<d_1 m\\ d_1|v\\ v^2+1\equiv 0 \pmod m}} e\left(\frac{-hv}{d_1 m}\right).$$

Le lemme de Gauss (le lemme 0) nous permet d'écrire que

$$R'_P \ll \sum_{\sigma|d_1} \sum_{0<|h|<H} \sum_{\substack{r^2+s^2\equiv 0 \pmod{d_2}\\ (r,s)=1,\ |r|<s\\ \sigma=(s,d_1)\\ (r^2+s^2,d_1)=1}} C(r^2+s^2)\log(r^2+s^2) \times \widehat{f}\left(\frac{h}{d_1(r^2+s^2)}\right)\frac{1}{d_1(r^2+s^2)} e\left(\frac{-hv\{r,s\}}{d_1(r^2+s^2)}\right), \tag{11}$$

avec

$$v\{r,s\} = d_1 w\{r,s\} \quad \text{et} \quad w\{r,s\} = \overline{d}_1\left(\frac{\overline{r}}{s}(r^2+s^2) - \frac{r}{s}\right),$$

où $\overline{r}$ est un inverse de r mod s et $\overline{d}_1$ un inverse de d_1 mod (r^2+s^2).

Bien que m ait parfois plusieurs écritures sous la forme $m = r^2+s^2$, on n'a rien rajouté dans la ligne (11), car d'après le lemme 0, ces écritures sont en bijection avec les solutions v de la congruence $v^2+1 \equiv 0 \pmod m$.

Transformation de $e\left(\frac{-hv\{r,s\}}{d_1(r^2+s^2)}\right) = e\left(\frac{-h\overline{d}_1}{(r^2+s^2)}\left(\frac{\overline{r}}{s}(r^2+s^2) - \frac{r}{s}\right)\right)$. On voudrait développer directement l'intérieur de l'exponentielle, mais ce n'est pas possible car d_1 n'est *a priori* pas inversible mod s, et on doit utiliser le lemme d'inversion suivant :

LEMME 7.1 (réécriture de Bezout). *Pour* $(n_1,n_2) = 1$, *on a*

$$\frac{\overline{n}_1}{n_2} + \frac{\overline{n}_2}{n_1} = \frac{1}{n_1 n_2} \pmod 1.$$

On écrit $d_1 = \delta\sigma$, avec $\sigma = (s,d_1)$; on a alors $(\delta,\sigma) = 1$, car d_1 est sans facteur carré. Dans le lemme 0, le choix de $\overline{r}$ mod s est libre, plus précisément, si a et a' sont deux inverses de r mod s, alors,

$$\frac{a'}{s}(r^2+s^2)-\frac{r}{s}\equiv\frac{a}{s}(r^2+s^2)-\frac{r}{s}\pmod{r^2+s^2}.$$

Ceci nous permet d'écrire l'égalité

$$e\biggl(\frac{-hv\{r,s\}}{d_1(r^2+s^2)}\biggr)=e\biggl(\frac{-\overline{d}_1\Omega}{r^2+s^2}\biggr),$$

où on a posé

$$\Omega=\frac{\overline{r}^{(\sigma s)}}{s}(r^2+s^2)-\frac{r}{s},$$

$\overline{r}^{(\sigma s)}$ étant un inverse de r modulo σs.

Soit $\overline{\delta}$ un inverse de δ modulo $\sigma s(r^2+s^2)$; ceci est cohérent car d_1 est sans facteur carré. En appliquant le lemme 7.1 à $n_1=\sigma$, $n_2=r^2+s^2$ on a

$$\begin{aligned}(12)\qquad e\biggl(\frac{-h\overline{d}_1\Omega}{r^2+s^2}\biggr)&=e\biggl(\frac{-h\overline{\delta}\Omega\overline{\sigma}}{r^2+s^2}\biggr)\\&=e\biggl(\frac{-h\overline{\delta}\Omega}{\sigma(r^2+s^2)}+\frac{h\overline{\delta}\Omega\overline{(r^2+s^2)}^{(\sigma s)}}{\sigma}\biggr),\end{aligned}$$

où $\overline{r^2+s^2}^{(\sigma s)}$ est un inverse de r^2+s^2 modulo σs.

En développant la formule définissant Ω, en utilisant le fait que $\sigma\mid s$, on a

$$e\biggl(\frac{\Omega}{\sigma}\biggr)=e\biggl(\frac{\overline{r}^{(\sigma s)}r^2}{\sigma s}-\frac{r}{\sigma s}\biggr)=1.$$

L'égalité (12) se simplifie donc pour devenir

$$e\biggl(\frac{-h\overline{d}_1\Omega}{r^2+s^2}\biggr)=e\biggl(\frac{-h\overline{\delta}\Omega}{\sigma(r^2+s^2)}\biggr)=e\biggl(\frac{-h\overline{\delta}\overline{r}}{\sigma s}+\frac{h\overline{\delta}r}{\sigma s(r^2+s^2)}\biggr).$$

L'exponentielle $e\bigl(\frac{-h\overline{\delta}\overline{r}}{\sigma s}\bigr)$ créera une somme de Kloosterman. Par contre on ne peut pas traiter directement $e\bigl(\frac{h\overline{\delta}r}{\sigma s(r^2+s^2)}\bigr)$.

Pour se débarrasser du $\overline{\delta}$, dans cette dernière exponentielle on réapplique le lemme d'inversion à $n_1=\delta$, $n_2=\sigma s(r^2+s^2)$:

$$e\biggl(\frac{h\overline{\delta}r}{\sigma s(r^2+s^2)}\biggr)=e\biggl(\frac{hr}{\delta\sigma s(r^2+s^2)}-\frac{hr\overline{\sigma s(r^2+s^2)}}{\delta}\biggr).$$

On obtient finalement

$$e\biggl(\frac{-hv\{r,s\}}{d_1(r^2+s^2)}\biggr)=e\Biggl(\underbrace{\frac{-h\overline{\delta}\overline{r}}{\sigma s}}_{\substack{\text{terme de somme}\\ \text{de Kloosterman}}}+\underbrace{\frac{hr}{d_1 s(r^2+s^2)}}_{\substack{\text{terme}\\ \text{lisse}}}-\underbrace{\frac{hr\overline{\sigma s(r^2+s^2)}}{\delta}}_{\substack{\text{terme constant}\\ \text{lorsque les congruences}\\ \text{de } r \text{ et } s \text{ mod } \delta\\ \text{sont fixées}}}\Biggr).$$

Les variables de sommation importantes sont r et s.

Dans ces deux dernières lignes, et dans toute la suite, les barres $\bar{}$ d'inverses ont maintenant le sens habituel relatif au dénominateur. Le terme lisse ne pose aucun problème, on s'en débarasse en faisant une intégration par partie. Par contre, l'exponentielle de dénominateur δ est un terme fortement oscillant, et même lorsque δ est petit, ce terme nous empêche d'utiliser les majorations de Deshouillers et Iwaniec [D-I2] de sommes de sommes de Kloosterman.

Estimation de la somme sur r de (11). Pour alléger l'écriture, on pose

$$F(r,s)=e\biggl(\frac{hr}{d_1s(r^2+s^2)}\biggr)\frac{C(r^2+s^2)\log(r^2+s^2)}{d_1(r^2+s^2)}\widehat{f}\biggl(\frac{h}{d_1(r^2+s^2)}\biggr).$$

Pour $0<|h|<H$ et $P^{1/2}<s<2P^{1/2}$, $(\sigma,s)=1$, fixés, on étudie

$$\varSigma_s=\sum_{\substack{r^2+s^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d_2)\\ |r|<s,\ (r,s)=1}} e\biggl(\frac{-hr\overline{\sigma}\,\overline{s}\overline{(s^2+r^2)}}{\delta}\biggr)e\biggl(\frac{-h\overline{\delta}\overline{r}}{\sigma s}\biggr)F(r,s). \tag{13}$$

On développe les congruences sur r en somme d'exponentielles :

$$\begin{aligned}\varSigma_s&=\frac{1}{d_2\sigma s\delta}\sum_{l=1}^{d_2\sigma s\delta}\sum_{\substack{\varrho\ \mathrm{mod}\ d_2\sigma s\delta\\ \varrho^2+s^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d_2)\\ (\varrho,s)=1}}\sum_{|r|<s} e\biggl(\frac{l(r-\varrho)}{d_2\delta\sigma s}\biggr)F(r,s)\\ &\qquad\times e\biggl(\frac{-h\overline{\delta}\overline{\varrho}}{\sigma s}\biggr)e\biggl(\frac{-h\varrho\overline{\sigma}\,\overline{s}\overline{(s^2+\varrho^2)}}{\delta}\biggr)\\ &=\frac{1}{d_1d_2s}\sum_{l=1}^{d_1d_2s}\sum_{|r|<s}F(r,s)e\biggl(\frac{lr}{d_1d_2s}\biggr)\\ &\qquad\times\sum_{\substack{\varrho\ \mathrm{mod}\ d_2\sigma s\delta\\ \varrho^2+s^2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ d_2)\\ (\varrho,s)=1}} e\biggl(\frac{-h\overline{\delta}\overline{\varrho}}{\sigma s}\biggr)e\biggl(\frac{-h\varrho\overline{\sigma}\,\overline{s}\overline{(s^2+\varrho^2)}}{\delta}\biggr)e\biggl(\frac{-l\varrho}{d_1d_2s}\biggr).\end{aligned}$$

Avec une notation évidente, on posera

$$\varSigma_s=\frac{1}{d_1d_2s}\sum_{l=1}^{d_1d_2s}\varSigma_r^{(2)}\varSigma_\varrho. \tag{14}$$

• Pour la somme sur r on fait une transformation d'Abel :

$$\varSigma_r^{(2)}\ll\biggl(\sum_{|r|<s}e\biggl(\frac{lr}{d_1d_2s}\biggr)\biggr)F(s,s)-\int_{-s}^{s}\biggl(\sum_{-s<r<t}e\biggl(\frac{lr}{d_1d_2s}\biggr)\biggr)\frac{\partial F}{\partial t}(t,s)\,dt$$

$$\ll \min\Big(s, \Big\|\frac{l}{d_1d_2s}\Big\|^{-1}\Big)\frac{x^{1+\varepsilon}}{d_1P}$$
$$+\min\Big(s, \Big\|\frac{l}{d_1d_2s}\Big\|^{-1}\Big)\int_{-s}^{s}\Big(\frac{x^{1+\varepsilon}t}{d_1(t^2+s^2)^2}+\frac{x^{2+\varepsilon}th}{d_1^2(t^2+s^2)^3}\Big)\,dt.$$

Pour écrire ceci on a fait les calculs suivants : comme $\widehat{f}\big(\frac{h}{d_1(r^2+s^2)}\big) \ll x$, on a $F(r,s) \ll x^{1+\varepsilon}/(d_1P)$. On étudie ensuite la dérivée de F à partir de l'écriture

$$F(r,s) = e\Big(\frac{hr}{d_1s(r^2+s^2)}\Big)\frac{C(r^2+s^2)\log(r^2+s^2)}{d_1(r^2+s^2)}\widehat{f}\Big(\frac{h}{d_1(r^2+s^2)}\Big).$$

Pour s fixé, lorsqu'on dérive par rapport à r, les dérivées de C et du log donnent un terme du type $(x^{1+\varepsilon}r)/(d_1(r^2+s^2)^2)$ celle de l'exponentielle donne un terme de l'ordre de

$$\frac{x^{1+\varepsilon}}{d_1(r^2+s^2)}\Big|\frac{\partial}{\partial r}e\Big(\frac{hr}{d_1s(r^2+s^2)}\Big)\Big| \ll \frac{x^{1+\varepsilon}}{d_1(r^2+s^2)}\cdot\frac{hs}{d_1(r^2+s^2)^2}.$$

Enfin, pour le terme $\widehat{f}$, on a

$$\frac{\partial}{\partial r}\widehat{f}\Big(\frac{h}{d_1(r^2+s^2)}\Big) \ll \frac{x^{2+\varepsilon}hr}{d_1(r^2+s^2)^2},$$

ce qui donne

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,s) \ll \frac{x^{1+\varepsilon}s}{d_1(t^2+s^2)^2}+\frac{x^{2+\varepsilon}hs}{d_1^2(t^2+s^2)^3}.$$

On a donc

$$\sum_{|r|<s} F(r,s)e\Big(\frac{lr}{d_1d_2s}\Big) \ll \Big(\frac{x^{1+\varepsilon}}{d_1P}+\frac{x^{2+\varepsilon}h}{d_1^2P^2}\Big)\min\Big(s, \Big\|\frac{l}{d_1d_2s}\Big\|^{-1}\Big).$$

Pour $0<|h|<H$, le premier terme du membre de droite l'emporte sur le deuxième. On en déduit que

$$\Sigma_r^{(2)} = \sum_{|r|<s} F(r,s)e\Big(\frac{lr}{d_1d_2s}\Big) \ll \frac{x^{1+\varepsilon}}{d_1P}\min\Big(s, \Big\|\frac{l}{d_1d_2s}\Big\|^{-1}\Big). \tag{15}$$

• *Estimation de la somme sur ϱ.* D'après (14), on a

$$\Sigma_\varrho = \sum_{\substack{\varrho \bmod d_2\sigma s\delta \\ \varrho^2+s^2\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d_2) \\ (\varrho,s)=1}} e\Big(\frac{-h\overline{\delta}\overline{\varrho}}{\sigma s}\Big)e\Big(\frac{-h\varrho\overline{\sigma}\,\overline{s(s^2+\varrho^2)}}{\delta}\Big)e\Big(\frac{-l\varrho}{d_1d_2s}\Big).$$

Comme $(d_2, d_1s)=1$, grâce au théorème de Bezout, on peut écrire $\varrho = ud_2+vd_1s$, ce qui donne

$$(16)\quad \Sigma_\varrho = \sum_{\substack{v \bmod d_2 \\ d_1^2v^2+s^2\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d_2)}} e\Big(\frac{-lv}{d_2}\Big) \times \sum_{\substack{u \bmod d_1 s \\ (u,s)=1 \\ (u^2+s^2,\delta)=1}} e\Big(\frac{-h\overline{\delta}\,\overline{d_2}\overline{u}}{\sigma s}\Big) e\Big(\frac{-hd_2u\overline{\sigma}\,\overline{s}\overline{(s^2+d_2^2u^2)}}{\delta}\Big) e\Big(\frac{-lu}{d_1 s}\Big).$$

• La somme sur v est un $O(2^{\nu(d_2)})$. En utilisant à nouveau Bezout et en profitant du fait que $(\delta,\sigma s)=1$, on écrit $u=\alpha\sigma s+\beta\delta$; on obtient alors pour la somme sur u,

$$(17)\qquad \Sigma_u = \sum_{\substack{(\beta,s)=1 \\ \beta \bmod \sigma s}} e\Big(\frac{-h\overline{d}_2\overline{\delta}^2\overline{\beta}-l\beta}{\sigma s}\Big) \times \sideset{}{^*}\sum_{\alpha \bmod \delta} e\Big(\frac{-hd_2\alpha\overline{(\alpha^2d_2^2\sigma^2s^2+s^2)}-l\alpha}{\delta}\Big),$$

où $*$ indique que la somme porte sur les α tels que l'exponentielle soit définie (ici sur les α tels que $(\alpha^2d_2^2\sigma^2s^2+1,\delta)=1$).

• La somme sur β est une somme de Kloosterman et d'après la majoration classique de Weil cette somme est un $O((\sigma s)^{1/2+\varepsilon}(\sigma s,h,l)^{1/2})$.

• Il reste à estimer

$$\Sigma_\alpha = \sideset{}{^*}\sum_{\alpha \bmod \delta} e\Big(\frac{-hd_2\alpha\overline{(\alpha^2d_2^2\sigma^2s^2+s^2)}-l\alpha}{\delta}\Big).$$

Comme δ est sans facteur carré on peut établir le résultat suivant :

Lemme 7.2. *La somme Σ_α se décompose en*

$$\Sigma_\alpha = \prod_{p\mid\delta} \sideset{}{^*}\sum_{\alpha \bmod p} e\Big(\frac{-hd_2\overline{(\delta/p)}\overline{s}^2\alpha\overline{(d_2^2\sigma^2\alpha^2+1)}-l\overline{(\delta/p)}\alpha}{p}\Big).$$

Il suffit de prouver ceci pour $\delta=p_1p_2$, où p_1 et p_2 sont 2 nombres premiers distincts, ce qui se fait en écrivant $\alpha=\alpha_1p_2+\alpha_2p_1$ puis en séparant les deux nouvelles sommes ainsi obtenues.

Grâce au lemme 7.2, il nous suffit d'évaluer

$$\sideset{}{^*}\sum_{\alpha \bmod p} e\Big(\frac{-hd_2\overline{(\delta/p)}\overline{s}^2\alpha\overline{(d_2^2\sigma^2\alpha^2+1)}-l\overline{(\delta/p)}\alpha}{p}\Big).$$

Si $p\mid(h,l)$, cette somme vaut à peu près p, elle est quasiment nulle si $p\mid h$ mais $p\nmid l$, ces deux résultats étant exacts à 0, 1 ou 2 près selon le nombre de pôles α exclus par la condition $*$.

Lorsque $(p,h)=1$, on estime cette somme avec le lemme suivant qui est un cas particulier d'un résultat énoncé par Deligne dans [D], et qui traite de la majoration d'une somme d'exponentielle d'une fraction rationnelle, dans l'esprit du théorème de Weil :

LEMME 7.3. *Soit $\mathbb{P}^1$ la droite projective sur $\mathbb{F}_p$, et soit un morphisme $f:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$, non identiquement égal à ∞. Soit*

$$S_f=\sum_{\substack{x\in\mathbb{P}^1\\ f(x)\neq\infty}} e(f(x)).$$

Pour tout point x de $\mathbb{P}^1$, on pose $v_x(f)=$ ordre du pôle de f en x si $f(x)=\infty$, $v_x(f)=0$ sinon. Alors on a

$$|S_f|\le\sum_{v_x(f)\neq 0}(1+v_x(f))p^{1/2}.$$

Dans notre situation, on a $f(x)=ax+bx/(c^2x^2+1)$ avec $a=-l\overline{(\delta/p)}$, $b=-hd_2\overline{(\delta/p)}\overline{s}^2$ et $c=d_2\sigma$.

Si $p\equiv 1 \pmod 4$, f a 3 pôles : ∞, $\overline{c}\sqrt{-1}$, $-\overline{c}\sqrt{-1}$, et $v_x(f)=1$ en ces pôles.

Si $p\equiv -1 \pmod 4$, f a un seul pôle ∞ et $v_\infty(f)=1$.

On a donc

$$|S_f|\le 6p^{1/2}.$$

Ceci donne

$$\Sigma_\alpha \ll 6^{\nu(\delta)}\delta^{1/2}(\delta,h,l)^{1/2},$$

et en reportant dans (17), on a $\Sigma_u\ll (d_1s)^{1/2+\varepsilon}(d_1s,h)^{1/2}$, puis dans (16), on obtient

$$\Sigma_\varrho\ll (sd_1)^{1/2+\varepsilon}(\sigma d_1 s,h)^{1/2}.$$

En injectant ceci dans (14), avec (15), on trouve

$$\Sigma_s\ll\frac{x^{1+\varepsilon}}{d_1P}d_1^{1/2}s^{1/2}(d_1s,h)^{1/2}.$$

On reporte ceci dans (11), et en faisant le changement de variables $s\leftrightarrow\sigma s$, on a

$$R'(P,d_1,d_2)\ll\sum_{\sigma\delta=d_1}\sum_{P^{1/2}<s\sigma<2P^{1/2}}\frac{x^{1+\varepsilon}d_1^{1/2}s^{1/2}\sigma^{1/2}}{d_1P}\sum_{0<|h|<H}(\sigma s,h)^{1/2}.$$

La somme sur h dans le terme de droite est un $O(H^{1+\varepsilon})$. Comme $H = d_1 P x^{-1+\varepsilon}$, on a

$$\begin{aligned} R'(P,d_1,d_2) &\ll \sum_{\sigma\delta=d_1} x^{\varepsilon} \sum_{P^{1/2}<\sigma s<2P^{1/2}} (\sigma s)^{1/2} d_1^{1/2} \\ &\ll P^{3/4} x^{\varepsilon} \sum_{\sigma\delta=d_1} d_1^{1/2}\sigma^{-1/2} \ll P^{3/4} x^{\varepsilon} d_1^{1/2} \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\sum_{d<D} \mu^2(d) \sum_{d_1 d_2=d} |R(P,d_1,d_2)| \ll \sum_{d<D} P^{3/4} x^{\varepsilon} d^{1/2} \ll P^{3/4} x^{\varepsilon} D^{3/2},$$

ce qui correspond au résultat annoncé dans la proposition 7.

• *Évaluation du terme principal.* Il s'agit d'évaluer

$$T_P(d_1,d_2) = x \sum_{m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, d_2)} \frac{\log m \cdot C(m)}{d_1 m} \sum_{\substack{0<v<d_1 m \\ d_1|v \\ v^2+1\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, m)}} 1.$$

On va montrer le lemme suivant :

Lemme 7.4. *On a l'égalité*

$$T_P(d_1,d_2) = \frac{xL(1,\chi_4)}{\zeta(2)} \cdot \frac{\omega(d_1,d_2)}{d_1 d_2} \int \frac{C(t)\log t}{t}\, dt + O\bigg(x \frac{\tau^2(d_2) P^{-1/2}\log P}{d_1 d_2^2}\bigg),$$

avec

$$\omega(d_1,d_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } (d_1,d_2)>1, \\ \displaystyle \varrho(d_2) \prod_{\substack{p|d_1 d_2 \\ p\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1} & \\ \displaystyle \quad\times \prod_{\substack{p|d_1 \\ p\equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 4)}} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) \prod_{2|d_1 d_2} \Big(1+\frac{1}{2}\Big)^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

La démonstration de ce lemme est calquée sur celles de Hooley [Ho], Deshouillers et Iwaniec [D-I1]. On commence par utiliser des séries génératrices. Soit

$$h_{a,l}(s) = \sum_{d\ge 1} \frac{\varrho(a,ld)}{d^s},$$

avec $\varrho(a,d) = |\{n \in \{0,\ldots,d-1\} : a^2 n^2 + 1 \equiv 0 \pmod d\}|$. Pour $a=1$ on a $\varrho(1,ld) = \varrho(ld)$; si $(a,d)=1$, $\varrho(a,d)=\varrho(d)$; et si $(a,l)>1$, $h_{a,l}(s)=1$ pour tout s.

Dans la suite, on suppose que $(a,l)=1$ et que l et a sont sans facteur carré, et on va établir que

$$h_{a,l}(s)=\varrho(l)\frac{\zeta(s)L(s,\chi_4)}{\zeta(2s)} \times \prod_{\substack{p\mid al\\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Big(1+\frac{1}{p^s}\Big)^{-1}\prod_{\substack{p\mid a\\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)\prod_{2\mid al}\Big(1+\frac{1}{2^s}\Big)^{-1}. \tag{18}$$

En effet, on a l'égalité

$$\begin{aligned} h_{a,l}(s)&=\prod_{(p,al)=1}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varrho(p^k)}{p^{ks}}\Big)\prod_{\substack{p\mid l\\ p\neq 2}}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varrho(p^{k+1})}{p^{ks}}\Big)\\ &=\varrho(l)\prod_{(p,al)=1}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varrho(p^k)}{p^{ks}}\Big)\prod_{\substack{p\mid l\\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-1},\end{aligned}$$

car d'après le lemme 2.3,

$$\frac{\varrho(p^{k+1})}{p^{ks}}=\frac{\varrho(p)}{p^{ks}}\qquad\text{pour } p\neq 2,$$

$\varrho(p)=0$ si $p\equiv -1 \pmod 4$, $\varrho(2)=1$, et $\varrho(2^k)=0$ pour $k>1$. Donc

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varrho(2^{k+1})}{2^{ks}}=1.$$

Soit $h(s)=\sum_{d\in\mathbb{N}}\varrho(d)/d^s=h_{1,1}(s)$; on a encore

$$h(s)=\frac{\zeta(s)L(s,\chi_4)}{\zeta(2s)}.$$

On évalue alors le rapport $h_{a,l}(s)/h(s)$:

$$\begin{aligned}\frac{h_{a,l}(s)}{h(s)}&=\varrho(l)\frac{\prod_{(p,al)=1}(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varrho(p^k)}{p^{ks}})}{\prod_p(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varrho(p^k)}{p^{ks}})}\prod_{\substack{p\mid l\\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-1}\\ &=\varrho(l)\prod_{p\mid al}\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\varrho(p^k)}{p^{ks}}\Big)^{-1}\prod_{\substack{p\mid l\\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Big(1-\frac{1}{p^s}\Big)^{-1}.\end{aligned}$$

Lorsque $\varrho(l)\neq 0$, cela donne

$$\frac{h_{a,l}(s)}{h(s)} = \varrho(l) \prod_{\substack{p\mid al \\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}} \left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{\substack{p\mid al \\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)$$
$$\times \prod_{\substack{p\mid l \\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right)^{-1} \prod_{2\mid al} \left(1+\frac{1}{2^s}\right)^{-1}.$$

Après quelques simplifications, et en profitant du fait que $(a,l)=1$, on trouve

$$h_{a,l}(s) = \varrho(l)h(s) \prod_{\substack{p\mid al \\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}} \left(1+\frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$
$$\times \prod_{\substack{p\mid a \\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}} \left(1-\frac{1}{p^s}\right) \prod_{2\mid al} \left(1+\frac{1}{2^s}\right)^{-1}.$$

Pour finir, on recopie Deshouillers et Iwaniec [D-I1]. On écrit

$$\frac{C(m)\log m}{m} = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \frac{R(s)}{m^s}\, ds$$

avec $\sigma > 0$, et $R(s)$ est la transformée de Mellin de la fonction $u \mapsto C(u)\log u/u$. D'après la formule d'inversion de Mellin, et en faisant 2 intégrations par parties, on montre que

$$R(s) = \int C(y)\frac{\log y}{y} y^{s-1}\, dy \ll (|s|+1)^{-2} P^{\sigma-1} \log P.$$

Soit $\sigma > 1$. On a l'égalité :

$$\sum_{m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d_2)} \frac{C(m)\log m}{m} \varrho(d_1, m) = \frac{1}{2i\pi} \int_{(\sigma)} \frac{R(s) h_{d_1,d_2}(s)}{d_2^s}\, ds.$$

Ensuite, suivant Deshouillers et Iwaniec [D-I1], p. 9, on décale cette intégrale à $\Re = 1/2$ et en reprenant leurs résultats, on trouve

$$\sum_{m\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,d_2)} \frac{C(m)\log m}{m} \varrho(d_1, m)$$
$$= \frac{R(1)\varrho(d_2)}{d_2} \cdot \frac{L(1,\chi_4)}{\zeta(2)}$$
$$\times \prod_{\substack{p\mid d_1 d_2 \\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}} \left(1+\frac{1}{p}\right)^{-1} \prod_{\substack{p\mid d_1 \\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}} \left(1-\frac{1}{p}\right) \prod_{2\mid d_1 d_2} \left(1+\frac{1}{2}\right)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{2i\pi}\int\limits_{(1/2)}\frac{R(s)h_{d_1,d_2}(s)}{d_2^s}\,ds\\
&=\frac{\varrho(d_2)}{d_2}\cdot\frac{L(1,\chi_4)}{\zeta(2)}\int\frac{C(y)\log y}{y}\,dy\\
&\quad\times\prod_{\substack{p\mid d_1d_2\\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Big(1+\frac{1}{p}\Big)^{-1}\prod_{\substack{p\mid d_1\\ p\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,4)}}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\prod_{2\mid d_1d_2}\Big(\frac{2}{3}\Big)\\
&\quad+\underbrace{O\bigg(\frac{P^{-1/2}\log P}{d_2^{1/2}}\int(|s|+1)^{-2}2^{\nu(d_2)}\bigg|\frac{\zeta(s)L(s,\chi_4)}{\zeta(2s)}\bigg|\,ds\bigg)}_{O(\tau^2(d_2)P^{-1/2}(\log P)/d_2^{1/2})},
\end{aligned}
$$

ce qui termine la preuve du lemme 7.4 et ainsi celle de la proposition 7.

8. Majoration de S_4. On part de l'inégalité (les quantités W_P étant celles définies à la ligne (8))

$$
W_P\le\sum_{\substack{n^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,m)\\ p\mid mn\Rightarrow p>x^\alpha}}\log m\cdot C(m)f(n).
$$

Soient λ_d les poids de Selberg correspondant à ce problème de crible. (Pour une définition précise, on peut consulter le livre d'Halberstam et Richert [H-R], chapitre 3, p. 97.) On a alors la majoration

$$
W_P\le\sum_{\substack{m,n\\ n^2+1\equiv 0\,(\mathrm{mod}\,m)}}\log m\cdot C(m)f(n)\Big(\sum_{\substack{d\mid P(x^\alpha)\\ d\mid mn}}\lambda_d\Big)^2.
$$

On développe ensuite ce carré, et en reprenant les notations du tout début du paragraphe 7, on a l'inégalité

$$
W_P\le\sum_{d_1,d_2\mid P(x^\alpha)}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{ab=[d_1,d_2]}S_P(a,b),
$$

car $S_P(d_1,d_2)=0$ dès que $(a,b)=1$. On applique alors la proposition 7 :

$$
\begin{aligned}
W_P\le&\sum_{d_1,d_2\mid P(x^\alpha)}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}x_0\frac{L(1,\chi_4)}{\zeta(2)}\int\frac{C(t)\log t}{t}\,dt\cdot\frac{\Omega([d_1,d_2])}{[d_1,d_2]}\\
&+\sum_{d_1,d_2\mid P(x^\alpha)}\lambda_{d_1}\lambda_{d_2}\sum_{ab=[d_1,d_2]}R(P,a,b),
\end{aligned}
$$

avec $\Omega([d_1,d_2])=\sum_{ab=[d_1,d_2]}\omega(a,b)$, car $\omega(a,b)=0$ si $(a,b)>1$.

D'après les valeurs de ω données dans la proposition 7, on a :

$$\Omega(p)=\begin{cases}4/3 & \text{si } p=2,\\ (3p+1)/(p+1) & \text{si } p\equiv 1 \pmod 4,\\ 1 & \text{si } p\equiv -1 \pmod 4.\end{cases}$$

Les conditions du crible de Selberg de dimension 2 sont remplies; en appliquant ce crible, puis en sommant sur P, on obtient pour S_4 la majoration

$$S_4\le \prod_{p<x^\alpha}\biggl(1-\frac{\Omega(p)}{p}\biggr)\frac{L(1,\chi_4)}{\zeta(2)}\int\frac{du}{u\sigma_2\bigl(\frac{\log D(u)}{\log(x^\alpha)}\bigr)}+O\biggl(\varepsilon x+\frac{x}{\log x}\biggr),$$

avec, d'après la formule du terme d'erreur de la proposition 7, $D(u)=x^{2/3-\varepsilon}t^{-1/2}$. A partir des valeurs de Ω données ci-dessus, on a l'égalité

$$\prod_{p<x^\alpha}\biggl(1-\frac{\Omega(p)}{p}\biggr)=\frac{\zeta(2)}{L(1,\chi_4)}\prod_{p<x^\alpha}\biggl(1-\frac{1}{p}\biggr)^2\biggl(1+O\biggl(\frac{1}{\log x}\biggr)\biggr).$$

Grâce à tout ceci, on a le

Lemme 8.1. *On a la majoration*

$$S_4\le\frac{x_0e^{-2\gamma}}{\alpha^2}\int_t^{1+h}\frac{\lambda\,d\lambda}{\sigma_2\bigl(\frac{2/3-\lambda/2}{\alpha}\bigr)}+O\biggl(\varepsilon x+\frac{x}{\log x}\biggr).$$

9. Conclusion. En revenant a l'égalité (2), puis en y reportant (1), les lemmes 2.2, 3.3, 8.1 et les résultats des paragraphes 4 et 5, on a

$$\begin{aligned}S_5&=V_\alpha(x)-S_0-S_1-S_2-S_3-S_4\\ &\ge x_0\biggl(\frac{3w(\alpha^{-1})}{2\alpha}-\frac{e^{-\gamma}}{\alpha}\int_{1/2-\varepsilon}^{2/3}F\biggl(\frac{3/2-7\varepsilon-7\lambda/4}{\alpha}\biggr)d\lambda\\ &\quad-\frac{e^{-\gamma}}{\alpha}\int_{2/3}^{t}F\biggl(\frac{1-\lambda}{\alpha}\biggr)d\lambda\biggr)\\ &\quad-x_0\frac{e^{-2\gamma}}{\alpha^2}\int_t^{1+h}\frac{\lambda\,d\lambda}{\sigma_2\bigl(\frac{2/3-\lambda/2}{\alpha}\bigr)}+O(\varepsilon x_0)+O\biggl(\frac{x}{\log x}\biggr)\\ &\ge x_0\biggl(\frac{3w(\alpha^{-1})}{2\alpha}-I_1-I_2-I_3\biggr)+O(\varepsilon x_0)+O\biggl(\frac{x}{\log x}\biggr),\end{aligned}$$

par définition. On cherche alors α le plus grand possible tel que la minoration ci-dessus soit strictement positive.

Pour $\alpha^{-1}>5.5$, on a $w(\alpha^{-1})=e^{-\gamma}\pm 10^{-5}$, on approximera donc la fonction w par $e^{-\gamma}$.

Le réel t correspond au raccord des deux intégrales I_2 et I_3, c'est-à-dire que t est solution de

$$\frac{2}{1-\lambda} = \frac{e^{-2\gamma}\lambda}{\alpha^2\sigma_2(u(\lambda))},$$

avec $u(\lambda) = (2/3 - \lambda/2)/\alpha$. Mais pour $1/12 > \alpha > 1/24$, et $t > 14/15$, on a $u(\lambda) \in [2,4]$, et

$$\sigma_2(u(\lambda)) = e^{-2\gamma}\left[\left(1/2 + \frac{\log 2}{4} - \frac{\log(u(\lambda))}{4}\right)u^2(\lambda) - u(\lambda) + 1/2\right],$$

et le réel t ne peut pas être déterminé directement.

Calcul de I_1. Comme $\varepsilon > 0$ et $h > 0$ sont arbitrairement petits, on n'en tient pas compte dans tous les calculs qui vont suivre. Pour $u \geq 2$, on a l'égalité $(uf(u))' = F(u-1)$. Cette égalité s'applique ici pour $(3/2 - 7\lambda/4)/\alpha \geq 1$, ce qui est vérifié pour tout $1/2 < \lambda < 2/3$, lorsque $\alpha \leq 1/3$, ce qui sera le cas. On fait alors le changement de variable adéquat $u = (3/2 - 7\lambda/4)/\alpha + 1$ pour obtenir

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{4e^{-\gamma}}{7}\int_{1+5/(8\alpha)}^{1+1/(3\alpha)} F(u-1)\,du \\ &= \frac{4e^{-\gamma}}{7}\left(\left(1+\frac{5}{8\alpha}\right)f\left(1+\frac{5}{8\alpha}\right) - \left(1+\frac{1}{3\alpha}\right)f\left(1+\frac{1}{3\alpha}\right)\right). \end{aligned}$$

Calcul de I_2. On a $(1-\lambda)/\alpha \leq 2$ pour $\lambda \geq 1-2\alpha$, et $1-2\alpha \geq 2/3$ pour $\alpha \leq 1/6$. Dans ce cas on a le découpage

$$I_2 = \int_{2/3}^{1-2\alpha} \frac{e^{-\gamma}}{\alpha}F\left(\frac{1-\lambda}{\alpha}\right)d\lambda + \int_{1-2\alpha}^{t} \frac{e^{-\gamma}}{\alpha}F\left(\frac{1-\lambda}{\alpha}\right)d\lambda = J_1 + J_2,$$

par définition. L'intégrale J_1 se calcule de la même manière que I_1, on pose $w = (1-\lambda)/\alpha + 1$:

$$J_1 = -\int_{1+1/(3\alpha)}^{3} e^{-\gamma}F(w-1)\,dw = e^{-\gamma}\left(\left(1+\frac{1}{3\alpha}\right)f\left(1+\frac{1}{3\alpha}\right) - 3f(3)\right).$$

Pour J_2, on a

$$\frac{e^{-\gamma}}{\alpha}F\left(\frac{1-\lambda}{\alpha}\right) = \frac{2}{1-\lambda} \qquad \text{pour } 1-2\alpha < \lambda < t.$$

Ainsi $J_2 = 2\log(2\alpha) - 2\log(1-t)$. On a donc

$$I_2 = e^{-\gamma}\left(\left(1+\frac{1}{3\alpha}\right)f\left(1+\frac{1}{3\alpha}\right) - 3f(3)\right) + 2\log(2\alpha) - 2\log(1-t).$$

Calcul de I_3. On a

$$I_3 = \int_t^1 \frac{e^{-2\gamma}}{\alpha^2} F_2\left(\frac{2/3 - \lambda/2}{\alpha}\right) d\lambda.$$

Lorsque $\alpha < 1/12$, l'argument de F_2 est supérieur à 2, on a donc, en reprenant la notation $u(\lambda) = 2/(3\alpha) - \lambda/(2\alpha)$

$$I_3 = \int_t^1 \frac{\lambda}{\alpha^2\big[\big(1/2 + \frac{\log 2 - \log(u(\lambda))}{4}\big)u(\lambda)^2 - u(\lambda) + 1/2\big]} d\lambda.$$

Conclusion. Pour $\alpha = 1/12.2$, et $t = 0.9926$, on a

$$\frac{3w(\alpha^{-1})}{2\alpha} - I_1 - I_2 - I_3 > 0.$$

Cela termine la preuve du théorème.

Bibiographie

[D] P. Deligne, *Application de la formule des traces aux sommes trigonométriques*, in: Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie-SGA 4 1/2, Lecture Notes in Math. 569, Springer, 1977, 168–232.

[D-I1] J.-M. Deshouillers and H. Iwaniec, *On the greatest prime factor of* $n^2 + 1$, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 32 (4) (1982), 1–11.

[D-I2] —, —, *Kloosterman sums and Fourier coefficients of cusp forms*, Invent. Math. 70 (1982), 219–288.

[H-R] H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, London, 1974.

[HB] D. R. Heath-Brown, *The square sieve and consecutive square-free numbers*, Math. Ann. 266 (1984), 251–259.

[Ho] C. Hooley, *Applications of Sieve Methods to the Theory of Numbers*, Cambridge University Press, London, 1976.

[Hu] L. K. Hua, *Introduction to Number Theory*, Springer, 1982.

[I1] H. Iwaniec, *A new form of the error term in the linear sieve*, Acta Arith. 37 (1980), 307–320.

[I2] —, *On the Brun–Titchmarsh theorem*, J. Math. Soc. Japan 34 (1982), 95–123.

[T] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Cours spécialisés, collection SMF, No. 1, 1995.

[W] D. Wolke, *Über die mittlere Verteilung der Werte zahlentheoretischer Funktionen auf Restklassen. 2*, Math. Ann. 204 (1973), 145–153.

Département de Mathématiques
Université de Nancy I
B.P. 239
Vandœuvre-lès-Nancy Cedex, France
E-mail: dartyge@iecn.u-nancy.fr

Reçu le 18.10.1994 (2682)