ACTA ARITHMETICA
LXXIV.4 (1996)

Sur une conjecture de Pohst

par

M. J. Bertin (Paris)

Introduction. Soit n nombres réels $x_1, \ldots, x_n$ distincts, ordonnés par ordre croissant

$$|x_1| < \ldots < |x_n|.$$

Considérons la quantité

$$D_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2 = \Big(\prod_{j=2}^{n} |x_j|^{2(j-1)} \Big) \prod_{1 \le i < j \le n} (1 - x_i/x_j)^2$$
$$= \Big(\prod_{j=2}^{n} |x_j|^{2(j-1)} \Big) P_n.$$

Pohst [3] a montré, pour $n \le 11$, l'inégalité

$$P_n \le 4^{[n/2]}$$

et conjecturé que l'inégalité précédente était valable pour tout $n \ge 2$.

Une telle inégalité intervient à propos d'estimations de régulateurs de corps de nombres. Mais elle peut être utile également pour des majorations de discriminants de corps de nombres totalement réels, grâce à la détermination de nombres de Pisot [2] $\theta = \theta_1$ totalement réels, de degré n, de "mesure pondérée" $\mu(\theta)$ minimale, où $\mu(\theta) = \theta_1^{n-1} \theta_2^{n-2} \ldots \theta_{n-1}$ si $\theta_2, \ldots, \theta_{n-1}$ désignent les conjugués de θ vérifiant $|\theta_{n-1}| < |\theta_{n-2}| < \ldots < |\theta_2| < 1 < \theta_1 = \theta$.

La démonstration de l'inégalité repose sur le lemme suivant et utilise un argument de théorie des simplexes. Le lemme permet en outre de donner une nouvelle démonstration de l'inégalité due à Remak [1] : $|P_n| \le n^n$ lorsque les x_i ne sont plus réels mais complexes.

Lemme. *Avec les notations précédentes*, *on a l'égalité*

$$P_n = D_n \Big/ \Big(\prod_{j=2}^{n} |x_j|^{2(j-1)} \Big) = (\det(a_{ij}))^2$$

où

$$\begin{aligned} \varrho_i &= x_i/x_{i+1}, \quad 1 \le i \le n-1, \\ a_{ij} &= \varrho_i^{j-i}\varrho_{i+1}^{j-i-1}\ldots\varrho_{j-1}, \quad j > i, \\ a_{ij} &= \varrho_{j+1}\varrho_{j+2}^2\ldots\varrho_{i-1}^{i-j-1}, \quad j < i-1, \\ a_{ii} &= a_{i,i-1} = 1. \end{aligned}$$

Preuve. Posons $\delta_n = |\det(x_i^{j-1})| = \sqrt{D_n}$ et montrons que

$$|\delta_n/x_2x_3^2\ldots x_n^{n-1}| = |\det(a_{ij})|.$$

Soit $X = (x_i^{j-1})$. Soit B la matrice diagonale telle que $b_{11} = 1$ et $b_{ii} = 1/x_ix_{i-1}\ldots x_2$ pour $i \ge 2$. Soit C la matrice diagonale telle que $c_{11} = c_{22} = 1$ et $c_{ii} = \varrho_{i-1}^{i-2}\varrho_{i-2}^{i-3}\ldots\varrho_2$, $i \ge 3$. Comme $\det(B)\det(C) = 1/x_2x_3^2\ldots x_n^{n-1}$, il suffit de montrer que $CXB = A$. Posons $XB = (d_{ij})$. On a

$$d_{ij} = \sum_k x_{ik}b_{kj} = x_{ij}b_{jj} = x_i^{j-1}/x_jx_{j-1}\ldots x_2, \quad j \ge 2,$$
$$d_{i1} = 1.$$

Posons $C(XB) = (r_{ij})$. On vérifie que $r_{ij} = c_{ii}d_{ij} = a_{ij}$.

Corollaire. *Soit n nombres complexes $x_1, \ldots, x_n$ vérifiant $|x_1| \le |x_2| \le \ldots \le |x_n|$. Alors*

$$|P_n| = \prod_{1\le i<j\le n} |1 - x_i/x_j|^2 \le n^n.$$

Preuve. On garde les notations du lemme. Comme $|a_{ij}| \le 1$, il suffit d'appliquer l'inégalité de Hadamard.

Théorème. *Avec les notations précédentes, si les x_i sont réels, $1 \le i \le n$, on a l'inégalité*

$$P_n \le 4^{[n/2]},$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Preuve. Selon les notations du lemme, $\delta_n = |\det(\varrho_1, \ldots, \varrho_n)|$.

Comme le déterminant est une combinaison linéaire des éléments d'une ligne, on considère d'abord le simplexe des éléments positifs de la i-ième ligne $\{a_{ij} : 0 \le a_{ij} \le 1,\ j \in J(i)\}$. Comme le déterminant ne peut prendre son maximum qu'en un sommet du simplexe, on en déduit que pour la valeur maximum du déterminant, les éléments positifs de la i-ième ligne valent 0 ou 1. Un raisonnement analogue entraîne que pour le maximum de δ_n, les éléments négatifs de la i-ième ligne valent 0 ou -1.

D'après l'expression précédente de δ_n trouvée dans le lemme, on en déduit que δ_n est maximum pour $\varrho_i \in \{-1, 0, 1\}$, $1 \le i \le n$.

Notons alors γ_n le maximum de δ_n.

Si $\varrho_{n-1} = 0$, alors $\delta_n = |\det(\varrho_1, \ldots, \varrho_{n-1})|$; d'où $\delta_n \le \gamma_{n-1}$.

Si $\varrho_{n-1} = 1$, alors l'avant-dernière et la dernière ligne de δ_n sont identiques; par suite $\delta_n = 0$.

Supposons donc $\varrho_{n-1} = -1$.

(a) Si $\varrho_{n-2} = 1$, les $(n-2)$-ième et $(n-1)$-ième lignes de δ_n sont égales; d'où $\delta_n = 0$.

(b) Si $\varrho_{n-2} = -1$, la $(n-2)$-ième ligne est l'opposée de la dernière ligne; d'où $\delta_n = 0$.

(c) Si $\varrho_{n-2} = 0$, δ_n s'écrit

$$\delta_n = \begin{vmatrix} & 0 & 0 & 0 \\ \delta_{n-2} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & 0 & 0 \\ 0\ldots 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0\ldots 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

d'où après avoir ajouté l'avant-dernière ligne à la dernière ligne, on obtient $\delta_n = 2\delta_{n-2} \le 2\gamma_{n-2}$.

Par suite $\gamma_n = \sup(\gamma_{n-1}, 2\gamma_{n-2})$.

Raisonnons alors par récurrence. On a $\gamma_2 = \gamma_3 = 2$; supposons $\gamma_i = 2^{[i/2]}$ pour $2 \le i \le n-1$.

Si $n = 2k$, on en déduit $\gamma_{2k} = 2\gamma_{2k-2} = 2^{[n/2]}$.

Si $n = 2k+1$, on a alors $\gamma_{2k+1} = 2\gamma_{2k-1} = \gamma_{2k} = 2^{[n/2]}$.

En résumé, si n est pair, le maximum est atteint pour les ϱ d'indice pair nuls et les ϱ d'indice impair égaux à -1.

Références

[1] A.-M. Bergé et J. Martinet, *Sur les minorations géomètriques des régulateurs*, dans : Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987–88, Progr. Math. 81, Birkhäuser, 1990, 23–50.

[2] M. J. Bertin, A. Decomps-Guilloux, M. Grandet-Hugot, M. Pathiaux-Delafosse, J. P. Schreiber, *Pisot and Salem Numbers*, Birkhäuser, 1992.

[3] M. Pohst, *Regulatorabschätzungen für total reelle algebraische Zahlkörper*, J. Number Theory 9 (1977), 459–492.

Equipe d'Arithmétique
U.M.R. 9994
Université Paris 6
4 Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05, France
E-mail: majb@ccr.jussieu.fr

Reçu le 4.4.1995 (2768)