ACTA ARITHMETICA
LXXIII.4 (1995)

Sommes d'exponentielles et principe de l'hyperbole

par

LOUIS GOUBIN (Orsay)

1. Introduction. Beaucoup de problèmes d'arithmétique sont liés à des questions d'indépendance entre les structures multiplicative et additive des entiers. L'étude du comportement asymptotique des sommes d'exponentielles de la forme

$$\sum_{n\le x} f(n)e(n\theta), \tag{1}$$

où f est une fonction multiplicative et $e(n\theta) := \exp(2i\pi n\theta)$ est additive, permet d'obtenir des renseignements intéressants sur cette «indépendance».

Il est alors naturel de se demander pour quel type de fonction multiplicative f on a, pour tout irrationnel θ,

$$\sum_{n\le x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\le x} f(n)\Big). \tag{2}$$

On notera $\mathcal{D}$ l'ensemble de ces fonctions et $\mathcal{M}$ l'ensemble des fonctions multiplicatives.

Dans le cas des fonctions multiplicatives à valeurs dans le disque unité, on dispose du résultat suivant, dû à H. Daboussi (cf. [3], [4] ou [10], p. 392) :

THÉORÈME A (Daboussi). *Pour tout θ irrationnel on a, uniformément pour f multiplicative à valeurs dans le disque unité*,

$$\sum_{n\le x} f(n)e(n\theta) = o(x). \tag{3}$$

Or on sait d'après un théorème de H. Delange ([5]) que si f est multiplicative à valeurs dans le disque unité, elle admet une valeur moyenne non nulle si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

$$\sum_p \frac{1-f(p)}{p} \text{ converge} \quad \text{et} \quad \exists k\ge 1, \quad f(2^k)\ne -1.$$

On obtient ainsi une première classe de fonctions qui vérifient (2) :

$$\Big\{f \in \mathcal{M} : |f| \le 1,\ \sum_p \frac{1-f(p)}{p} \text{ converge},\ \exists k \ge 1, f(2^k) \ne -1\Big\} \subset \mathcal{D}.$$

Plus généralement, K. H. Indlekofer ([8]) a obtenu (3) en supposant seulement que f est uniformément sommable.

Définition. Une fonction arithmétique f est dite *uniformément sommable* si on a

$$\lim_{y\to\infty}\Big(\sup_{x\ge 1}\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\le x\\ |f(n)|\ge y}}|f(n)|\Big) = 0.$$

On notera $\mathcal{L}^*$ l'ensemble des fonctions multiplicatives uniformément sommables.

Indlekofer a montré ([8]) que les fonctions de $\mathcal{L}^*$ qui ont une valeur moyenne non nulle sont caractérisées par les propriétés suivantes :

- $\sum_p (f(p)-1)/p$ converge,
- $\sum_{\substack{p\\ |f(p)|\le 3/2}} |f(p)-1|^2/p < \infty$,
- $\sum_{\substack{p\\ |f(p)-1|\ge 1/2}} |f(p)|/p < \infty$,
- $\sum_p \sum_{k\ge 2} |f(p^k)|/p^k < \infty$,
- $\forall p,\ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f(p^k)/p^k \ne 0$.

On obtient ainsi une nouvelle classe de fonctions contenue dans $\mathcal{D}$.

En utilisant le principe de l'hyperbole de Dirichlet, Chowla ([1]) a montré que la fonction d (nombre de diviseurs) est aussi dans $\mathcal{D}$:

Théorème B (Chowla). *Pour tout θ irrationnel, on a*

$$\sum_{n\le x} d(n)e(n\theta) = o(x\log x). \tag{4}$$

En fait, Erdős ([7]) a montré qu'en général, on peut obtenir une majoration bien meilleure :

Théorème C (Erdős). *Pour presque tout θ, on a*

$$\sum_{n\le x} d(n)e(n\theta) = \mathcal{O}(\sqrt{x}\log x).$$

Par ailleurs Y. Dupain, R. R. Hall et G. Tenenbaum ([6]) ont montré que les fonctions y^{Ω} sont dans la classe $\mathcal{D}$ lorsque $0 < y < 2$ (ici $\Omega(n)$ désigne le nombre de facteurs premiers de n comptés avec multiplicité) :

THÉORÈME D (Dupain, Hall, Tenenbaum). *Si* $0 < y < 2$, *pour tout* θ *irrationnel*, *on a*

$$\sum_{n\le x} y^{\Omega(n)} e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\le x} y^{\Omega(n)}\Big). \tag{5}$$

Leur démonstration — de nature analytique — s'appuie entre autres sur une estimation du type «Siegel–Walfisz» du comportement de y^{Ω} dans les progressions arithmétiques de raison «petite».

Dans ce qui précède, les fonctions multiplicatives considérées sont à valeurs réelles positives. Pour des fonctions f plus générales, seuls des résultats du type (3) semblent accessibles.

Dans cette direction, H. Daboussi (cf. [2]) a généralisé (5) de la façon suivante :

THÉORÈME E (Daboussi). *Soit f une fonction complètement multiplicative telle que pour tout nombre premier p on ait $|f(p)| = y$, avec $0 < y < 2$. Alors pour tout θ irrationnel on a*

$$\sum_{n\le x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\le x} |f(n)|\Big).$$

2. Résultats. Le premier objectif de cet article est d'obtenir un résultat de stabilité de la classe $\mathcal{D}$ par convolution. On montrera le résultat général suivant :

THÉORÈME 1. *Soient f et h deux fonctions multiplicatives telles que*

(H1) $\displaystyle\sum_p (h(p)-1)/p, \quad \sum_{\substack{p \\ |h(p)|\le 3/2}} |h(p)-1|^2/p,$

$$\sum_{\substack{p \\ |h(p)-1|\ge 1/2}} |h(p)|/p \ \textit{ et } \ \sum_p \sum_{k\ge 2} |h(p^k)|/p^k \ \textit{convergent},$$

(H2) $\forall p,\ 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} h(p^k)/p^k \ne 0,$

(F1) $f \ge 0,$

(F2) $\displaystyle\sum_{n\le x} f(n) = o\Big(x \sum_{n\le x} f(n)/n\Big),$

(F3) $f \in \mathcal{D}.$

Alors, si on pose $g := f * h$, on a $g \in \mathcal{D}$.

Dans la pratique, on utilisera souvent des hypothèses plus faibles :

Corollaire 1. *Soient f et h deux fonctions multiplicatives telles que*

(H′1) $|h| \le 1$ *et* $\sum_p (1-h(p))/p$ *converge*,

(H′2) $\exists k \ge 1,\ h(2^k) \ne -1$,

(F1) $f \ge 0$,

(F2) $\sum_{n\le x} f(n) = o\Big(x \sum_{n\le x} f(n)/n\Big)$,

(F3) $f \in \mathcal{D}$.

Alors, *si on pose* $g := f * h$, *on a* $g \in \mathcal{D}$.

En particulier, $h = 1$ convient, ce qui donne :

Corollaire 2. *Soit f une fonction multiplicative telle que* :

(F1) $f \ge 0$,

(F2) $\sum_{n\le x} f(n) = o\Big(x \sum_{n\le x} f(n)/n\Big)$.

On suppose que $f \in \mathcal{D}$. Alors, *si on pose* $g := f * 1$, *on a* $g \in \mathcal{D}$.

On sait (voir par exemple [10], p. 340) que la condition (F2) est vérifiée dès qu'il existe des constantes $\lambda_1 > 0$ et $0 \le \lambda_2 < 2$ telles que

$$\forall p \text{ premier},\ \forall k \ge 1, \quad 0 \le f(p^k) \le \lambda_1 \lambda_2^{k-1}.$$

Considérons les fonctions diviseurs généralisées d_l ($l \in \mathbb{N}^*$), où $d_l(n)$ est le nombre de manières de décomposer n en produit de l entiers non nuls. En remarquant que

$$\sum_{n\le x} d_l(n) \sim x(\log x)^{l-1}$$

et

$$x \sum_{n\le x} \frac{d_l(n)}{n} \sim x(\log x)^l,$$

on constate que $f = d_l$ entre dans le champ d'application du corollaire 2. On voit donc que si d_l est dans $\mathcal{D}$, alors d_{l+1} aussi. Comme d_1 est évidemment dans $\mathcal{D}$, on en déduit :

Corollaire 3. *Pour tout $l \in \mathbb{N}^*$ et tout θ irrationnel*, *on a*

$$\sum_{n\le x} d_l(n) e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\le x} d_l(n)\Big) = o(x(\log x)^{l-1}).$$

Remarquons que cette assertion peut également se déduire des résultats de [6]. En effet, la méthode employée par Dupain, Hall et Tenenbaum dans cet article pour établir (5) fonctionne sans changement (cf. la remarque page 406) dans le cas de $\omega(n)$ et fournit

$$\sum_{n\leq x} y^{\omega(n)} e(n\theta) = o(x(\log x)^{y-1}) \qquad (\theta \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q},\ y>0).$$

Si on considère la fonction d_y, définie par

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_y(n)}{n^s} = \zeta(s)^y \qquad (\operatorname{Re} s > 1),$$

on peut écrire $d_y = y^{\omega} * h$, avec

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|h(m)|}{m} < \infty,$$

ce qui permet de conclure que d_y est dans $\mathcal{D}$ pour tout $y > 0$.

L'intérêt est ici d'avoir obtenu le corollaire 3 par des moyens élémentaires, sans faire appel à des estimations du type «Siegel–Walfisz».

En combinant le théorème E — dont la démonstration utilise (5) — et le principe mis en évidence de stabilité de la classe $\mathcal{D}$, on montrera ensuite le résultat suivant :

THÉORÈME 2. *Soit $y > 0$. On suppose que f, multiplicative, vérifie les conditions*

(i) $|f(p)| \leq y$ *pour tout nombre premier* p,
(ii) *la série* $\sum_p \sum_{\nu=2}^{\infty} (|f(p^{\nu})|/p^{\nu})(\log p^{\nu})^{\max(1-y,0)}$ *converge.*

Alors pour tout θ irrationnel, on a

$$\sum_{n\leq x} f(n)e(n\theta) = o(x(\log x)^{y-1}).$$

On voit facilement que ce résultat contient les théorèmes A, B, D, E et le corollaire 3, ainsi que le fait que y^{ω} et d_y sont dans $\mathcal{D}$ pour $y > 0$.

Dans le cas où $0 < y < 2$, le théorème 2 découle assez facilement du théorème E, par un argument de convolution. Un examen attentif de la démonstration dans [2] montre que la preuve du théorème E — en son état actuel — n'est transposable à la situation d'une fonction multiplicative générale satisfaisant les conditions (i) et (ii) que lorsque $0 < y < 2$. En effet, le résultat provient, en dernier ressort, du fait que la quantité

$$\prod_{p\leq T} \left(1-\frac{1}{p}\right)^{2y} \left(1+\frac{y^2}{p}\right)$$

tend vers 0 quand T tend vers ∞, ce qui n'est vrai que pour $y < 2$.

C'est pourquoi dans le cas général, on emploiera une méthode analogue à celle de la démonstration du théorème 1, reposant sur la stabilité par convolution du comportement des sommes d'exponentielles mises en jeu.

Le théorème 2 ne donne un renseignement non trivial que si

$$\sum_p \frac{y-|f(p)|}{p} < \infty.$$

Sous cette hypothèse supplémentaire, le résultat peut s'écrire de la façon suivante :

Corollaire 4. *Soit $y>0$. On suppose que f, multiplicative, vérifie les conditions*

(i) $|f(p)| \le y$ *pour tout nombre premier* p,
(ii) *la série* $\sum_p \sum_{\nu=2}^{\infty} (|f(p^\nu)|/p^\nu)(\log p^\nu)^{\max(1-y,0)}$ *converge*,
(iii) *la série* $\sum_p (y-|f(p)|)/p$ *converge.*

Alors pour tout θ irrationnel, on a

$$\sum_{n\le x} f(n)e(n\theta) = o\Big(\sum_{n\le x} |f(n)|\Big).$$

Par ailleurs, on ne peut pas supprimer la condition

$$\sum_p \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu} (\log p^\nu)^{\max(1-y,0)} < \infty$$

du corollaire 4. Ainsi, on montrera que la fonction multiplicative 2^{Ω} — qui vérifie les hypothèses (i) et (iii) pour $y=2$ — n'appartient pas à la classe $\mathcal{D}$:

Théorème 3. *Il existe un irrationnel θ tel que l'on ait, quand x tend vers ∞,*

$$\sum_{n\le x} 2^{\Omega(n)} e(n\theta) = \Omega\Big(\sum_{n\le x} 2^{\Omega(n)}\Big).$$

De même on peut montrer que pour $y \ge 2$, y^{Ω} n'est pas dans $\mathcal{D}$. On constate donc que la restriction $0<y<2$ dans le théorème D est inévitable.

Remerciements. Je tiens à remercier le referee anonyme pour des remarques qui ont permis de simplifier certains points — notamment la démonstration du théorème 2 dans le cas $0<y<2$ — et de clarifier la démonstration du théorème 1.

3. Démonstration du théorème 1. Pour tout réel θ, et tout $x \ge 1$, on note

$$G(x,\theta) := \sum_{n\le x} g(n)e(n\theta).$$

On pose $G(x) := G(x,0)$, dont le comportement peut être relié à celui de f de la manière suivante :

LEMME 1. *Sous les hypothèses du théorème* 1, *on a*

$$G(x) \asymp x \sum_{m\le x} \frac{f(m)}{m}. \tag{6}$$

Preuve. D'après Indlekofer ([8]), les hypothèses (H1) et (H2) montrent que h est absolument sommable et vérifie, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^*$,

$$\sum_{n\le x} h(n) \sim \lambda x. \tag{7}$$

Ensuite, en écrivant

$$\lambda x \sum_{m\le x} \frac{f(m)}{m} - G(x) = \sum_{m\le x} f(m)\Big[\frac{\lambda x}{m} - \sum_{l\le x/m} h(l)\Big],$$

puis en séparant en deux la somme, selon la position de m par rapport à x/K, on obtient

$$\begin{aligned}(8)\qquad & \lambda x \sum_{m\le x} \frac{f(m)}{m} - G(x) \\ & \le \sum_{m\le x/K} f(m)\Big|\frac{\lambda x}{m} - \sum_{l\le x/m} h(l)\Big| + \Big(K|\lambda| + \sum_{l\le K} |h(l)|\Big)\sum_{m\le x} f(m).\end{aligned}$$

Un ε strictement positif étant donné, on peut d'après (7) choisir $K = K(\varepsilon)$ pour que la valeur absolue dans le premier terme soit majorée par $\varepsilon x/(2m)$. A cause de l'hypothèse (F2), le second terme de (8) est alors majoré par $(\varepsilon x/2)\sum_{m\le x} f(m)/m$ pour $x \ge x_0(\varepsilon)$, ce qui fournit le résultat attendu.

(a) Cas où $\sum_{m=1}^{\infty} f(m)/m < \infty$. En écrivant la somme d'exponentielles sous la forme

$$G(x,\theta) = \sum_{m\le x} f(m) \sum_{l\le x/m} h(l)$$

et en séparant en deux termes suivant la position de m par rapport à K, on obtient

$$|G(x,\theta)| \le \sum_{m\le K} f(m)\Big|\sum_{l\le x/m} h(l)e(lm\theta)\Big| + \sum_{K<m\le x} f(m)\Big[\sum_{l\le x/m} |h(l)|\Big]. \tag{9}$$

Du fait que h est uniformément sommable, on déduit facilement que le terme entre crochets et majoré — à une constante près — par x/m (cf. [8]).

Si on fixe $\varepsilon > 0$, l'hypothèse supplémentaire faite ici sur f permet de majorer le second terme de (9) par $\varepsilon x/2$, à condition de choisir $K = K(\varepsilon)$ assez grand.

Pour le premier terme, on a vu que h — étant uniformément sommable et de valeur moyenne non nulle — appartient à la classe $\mathcal{D}$. Tous les $m\theta$ étant irrationnels, on en déduit que l'on peut majorer le premier terme par $\varepsilon x/2$ pour $x \geq x_0(\varepsilon)$.

On obtient ainsi $G(x,\theta) = o(G(x))$ car le lemme 1, joint à l'hypothèse faite sur f, donne $G(x) \asymp x$.

(b) Cas où $\sum_{m=1}^{\infty} f(m)/m = \infty$. D'après Indlekofer ([8]), le fait que h soit uniformément sommable et de valeur moyenne non nulle permet d'en déduire une écriture plus pratique sous la forme d'une convolution :

Lemme 2. *Il existe des fonctions multiplicatives $\widetilde{h}$ et ψ et une constante $A > 0$ telles que $h = \widetilde{h} * \psi$, avec $\sum_n |\psi(n)|/n < \infty$ et*

$$\sum_{n\leq x} |\widetilde{h}(n)|^2 \leq A^2 x, \qquad \forall p,\ |\widetilde{h}(p)| \leq A.$$

On notera, de manière analogue à $G(x,\theta)$

$$\widetilde{H}(x,\theta) := \sum_{n\leq x} \widetilde{h}(n)e(n\theta).$$

Remarquons que l'inégalité de Cauchy–Schwarz donne immédiatement $\widetilde{H}(x,0) \ll x$.

Les propriétés de $\widetilde{h}$ permettent d'obtenir des renseignements intéressants sur son comportement dans les sommes d'exponentielles (cf. [9]) :

Théorème F (Montgomery, Vaughan). *Si $|\theta - a/q| \leq 1/q^2$, $(a,q) = 1$ et $2 \leq B \leq q \leq x/B$, alors*

$$\widetilde{H}(x,\theta) \ll \frac{x}{\log x} + xB^{-1/2}(\log B)^{3/2}. \tag{10}$$

En utilisant le lemme 2, on peut écrire

$$G(x,\theta) = \sum_{lm\leq x} \psi(l)f(m)\widetilde{H}\left(\frac{x}{lm}, lm\theta\right). \tag{11}$$

D'après le lemme 1, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour $x \geq x_0(\varepsilon)$, le membre de droite de (11) est

$$\ll \varepsilon x \sum_{m\leq x} \frac{f(m)}{m}.$$

La convergence de la série $\sum_l |\psi(l)|/l$ et la majoration $\widetilde{H}(x,0) \ll x$ permettent de supposer $l \leq L$, où $L = L(\varepsilon)$ est choisi assez grand. L'hypothèse

$$\sum_{m\leq x} f(m) = o\left(x \sum_{m\leq x} \frac{f(m)}{m}\right)$$

permet également de restreindre la sommation de (11) au domaine $lm \leq x/x_1(\varepsilon)$ pour toute constante fixée $x_1(\varepsilon)$. Il reste donc à montrer que pour $y > x_2(\varepsilon)$, on a

$$\sum_{m\leq y/x_1(\varepsilon)} f(m)\widetilde{H}\Big(\frac{y}{m}, m\theta\Big) \ll \varepsilon y \sum_{m\leq y} \frac{f(m)}{m}. \tag{12}$$

Or le résultat de Montgomery et Vaughan implique la propriété suivante : Pour chaque $\varepsilon > 0$, on a $\widetilde{H}(x,\theta) \ll \varepsilon x$ dès que $x > x_1(\varepsilon)$ et

$$\{\theta\} \notin E(\varepsilon) := \bigcup_{q\leq B} \bigcup_{\substack{1\leq a<q\\(a,q)=1}} \Big[\frac{a}{q} - \frac{1}{qQ}; \frac{a}{q} + \frac{1}{qQ}\Big],$$

avec $B = 1/\varepsilon^3$ et $Q = \lfloor 1/\varepsilon^4 \rfloor$. On peut prendre par exemple $x_1(\varepsilon) = \exp(1/\varepsilon)$.

On voit bien que la sous-somme de (12) correspondant à $\{m\theta\} \notin E(\varepsilon)$ est majorée par le membre de droite. Il suffit donc d'évaluer, pour $y > x_2(\varepsilon)$,

$$\sum_{\substack{m\leq y\\ \{\theta m\}\in E(\varepsilon)}} \frac{f(m)}{m}. \tag{13}$$

Dans ce but, on majore la fonction indicatrice de $E(\varepsilon)$ par le polynôme trigonométrique

$$\begin{aligned} C\sum_{q\leq B} \sum_{\substack{1\leq a<q\\(a,q)=1}} &\Big(\frac{\sin \pi\theta qQ}{qQ\sin(\pi(\theta - a/q))}\Big)^2 \\ &= \frac{C}{Q}\sum_{q\leq B}\frac{1}{q} \sum_{\substack{1\leq a<q\\(a,q)=1}} \sum_{|k|\leq qQ} \Big(1 - \frac{|k|}{qQ}\Big)\cos\Big(2\pi k\Big(\theta - \frac{a}{q}\Big)\Big), \end{aligned}$$

où C est une constante absolue. On reporte dans (13), et on intervertit les sommations. Comme f est dans $\mathcal{D}$, on voit — par sommation d'Abel — que la contribution de chaque $k \neq 0$ est $o(\sum_{m\leq y} f(m)/m)$. On obtient donc que (13) est $\ll (\varepsilon + o(1))\sum_{m\leq y} f(m)/m$, ce qui fournit bien le résultat attendu.

4. Démonstration du corollaire 1. Il suffit de montrer que les hypothèses (H1) et (H2) de la proposition 2 sont vérifiées.

D'après (H′2), $\exists k \geq 1$, $\mathrm{Re}(h(2^k)) > -1$. Donc

$$\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(2^k)}{2^k} > \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2^k} = -1.$$

De plus,

$$\forall p \geq 3, \quad \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h(p^k)}{p^k} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{p^k} = \frac{-1}{p-1} > -1,$$

ce qui donne (H2).

Pour prouver (H1), on utilise l'inégalité classique :

$$\forall u \in \mathbb{C}, \quad |u| \leq 1 \Rightarrow |u-1|^2 \leq 2 \operatorname{Re}(1-u).$$

En particulier,

$$\forall p, \quad |h(p)-1|^2 \leq 2(1-\operatorname{Re} h(p)).$$

Or par hypothèse $\sum_p (1-\operatorname{Re} h(p))/p < \infty$. Donc

$$\sum_p \frac{|h(p)-1|^2}{p} < \infty.$$

Soit χ la fonction caractéristique des p tels que $|h(p)-1| \geq 1/2$. On a

$$\chi(p) = 1 \Rightarrow \tfrac{1}{4} \leq |h(p)-1|^2 \leq 2 \operatorname{Re}(1-h(p)),$$

ce qui donne

$$\forall p, \quad \chi(p)|h(p)| \leq 8(1-\operatorname{Re} h(p)).$$

Or $\sum_p (1-\operatorname{Re} h(p))/p < \infty$, donc

$$\sum_{\substack{p \\ |h(p)-1| \geq 1/2}} \frac{|h(p)|}{p} = \sum_p \frac{\chi(p)|h(p)|}{p} < \infty.$$

Enfin

$$\sum_{k \geq 2} \frac{|h(p^k)|}{p^k} \leq \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^k} = \frac{1}{p(p-1)},$$

d'où

$$\sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{|h(p^k)|}{p^k} < \infty.$$

(H1) est donc vraie, ce qui termine la preuve du corollaire.

5. Démonstration du théorème 2

(a) Le cas $1 \leq y < 2$. Le résultat se déduit du théorème E par convolution. Soit g une fonction vérifiant les hypothèses du théorème 2. On peut supposer

$$\sum_p \frac{y-|g(p)|}{p} < \infty,$$

car sinon on a directement, pour tout θ,

$$|G(x,\theta)| \leq \sum_{n\leq x} |g(n)| = o(x(\log x)^{y-1}).$$

Définissons une fonction f complètement multiplicative de la manière suivante :

- Si $g(p) = r_p e^{i\theta_p}$, avec $0 < r_p \leq y$, on pose $f(p) = ye^{i\theta_p}$.
- Si $g(p) = 0$, on pose $f(p) = ye^{i\theta_p}$, avec θ_p quelconque.

On peut écrire $g = f * h$, les séries entières correspondantes vérifiant

$$\forall z,\ |z| < 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} g(p^\nu)z^\nu = \Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^\nu)z^\nu\Big)\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} h(p^\nu)z^\nu\Big),$$

d'où, puisque f est complètement multiplicative,

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} h(p^\nu)z^\nu = (1 - f(p)z)\sum_{\nu=0}^{\infty} g(p^\nu)z^\nu.$$

Donc on a $h(p^\nu) = g(p^\nu) - f(p)g(p^{\nu-1})$ pour tout $\nu \geq 1$. En particulier, d'après la définition de f, on a

$$|h(p)| = |g(p) - f(p)| = y - |g(p)|.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{|h(p^\nu)|}{p^\nu} &= \frac{y - |g(p)|}{p} + \sum_{\nu\geq 2} \frac{|g(p^\nu) - f(p)g(p^{\nu-1})|}{p^\nu} \\ &\ll \frac{y - |g(p)|}{p} + \sum_{\nu\geq 2} \frac{|g(p^\nu)|}{p^\nu} + \frac{1}{p^2}.\end{aligned}$$

Par conséquent, comme on a supposé $\sum_p (y - |g(p)|)/p < \infty$, on obtient, en utilisant également l'hypothèse (ii),

$$\sum_p \sum_{\nu\geq 1} \frac{|h(p^\nu)|}{p^\nu} < \infty,$$

puis

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|h(p^m)|}{p^m} < \infty.$$

On peut donc écrire, pour tout K,

$$G(x,\theta) = \sum_{m\leq K} h(m) \sum_{l\leq x/m} f(l)e(lm\theta) + \sum_{m>K} h(m) \sum_{l\leq x/m} f(l)e(lm\theta).$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Dans le second terme, la somme intérieure est majorée par $\frac{x}{m}(\log x)^{y-1}$, car $|f| = y^{\Omega}$ avec $0 < y < 2$, si bien que le second terme est majoré par $\frac{\varepsilon}{2}x(\log x)^{y-1}$, à condition de choisir $K = K(\varepsilon)$ assez grand.

Dans le premier terme, pour chaque $m \le K$, on peut appliquer le théorème E à la somme intérieure, ce qui donne à nouveau — en choisissant $x \ge x_0(\varepsilon)$ — un terme majoré par $\frac{\varepsilon}{2}x(\log x)^{y-1}$.

Le théorème 2 est ainsi démontré dans le cas où $1 \le y < 2$.

(b) Le cas $0 < y < 1$. La démonstration précédente se transpose à ce cas presque sans changement. Dans le second terme de $G(x,\theta)$, la somme intérieure est majorée par $\frac{x}{m}(\log \frac{2x}{m})^{y-1}$ et la condition (ii) du théorème assure que pour $K = K(\varepsilon)$ assez grand et $x \ge x_1(\varepsilon)$,

$$\sum_{K<m\le x} \frac{|h(m)|}{m}\left(\log \frac{2x}{m}\right)^{y-1} \le \frac{\varepsilon}{2}x(\log x)^{y-1}.$$

(c) Le cas général. En utilisant la même méthode que dans la démonstration du théorème 1, on va montrer que si le théorème 2 est vrai pour $y-1$, alors il est également vrai pour y. Ceci, joint à ce qui précède, montrera que le théorème 2 est vrai pour tout $y > 0$.

Soit donc g une fonction multiplicative vérifiant les hypothèses du théorème 2 pour un certain $y > 1$. Définissons alors les fonctions multiplicatives f et h de la façon suivante :

Si $g(p) = yu_p$, avec $|u_p| \le 1$, on pose

$$\forall k \ge 0, \quad f(p^k) = d_{y-1}(p^k)u_p^k, \quad h(p^k) = u_p^k.$$

On peut alors écrire $g = f * h * \psi$, avec, en ce qui concerne les séries entières,

$$\forall z,\ |z| < 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} g(p^\nu)z^\nu = \frac{1}{(1-u_pz)^{y-1}} \cdot \frac{1}{1-u_pz}\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi(p^\nu)z^\nu.$$

Donc

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\psi(p^\nu)z^\nu = (1-u_pz)^y\sum_{\nu=0}^{\infty} g(p^\nu)z^\nu.$$

On obtient ainsi

$$\forall k \ge 0, \quad \psi(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k}(-u_p)^\nu\binom{y}{\nu}g(p^{k-\nu}),$$

avec, comme $y > 0$,

$$\left|\binom{y}{\nu}\right| = \left|\frac{y(y-1)\dots(y-\nu+1)}{\nu!}\right| \le \frac{y(y+1)\dots(y+\nu-1)}{\nu!} = d_y(p^\nu).$$

En tenant compte du fait que $\psi(p) = 0$, on trouve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(p^k)|}{p^k} \le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{p^k} \sum_{\nu=0}^{k} d_y(p^\nu)|g(p^{k-\nu})|$$
$$\le \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_y(p^{k-1})y + d_y(p^k)}{p^k} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{|g(p^\nu)|}{p^\nu} \sum_{k\ge 0} \frac{d_y(p^k)}{p^k}$$

après avoir changé ν en $k-\nu$ dans le second terme.

Comme

$$\sum_{k\ge 0} d_y(p^k)/p^k = (1-1/p)^{-y}$$

est borné, on obtient finalement, grâce à l'hypothèse (ii),

$$\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(p^k)|}{p^k} < \infty,$$

puis

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\psi(m)|}{m} < \infty.$$

Il en résulte qu'il suffit de montrer le résultat du théorème pour $f * h$.

Posons donc

$$S(x,\theta) := \sum_{n\le x} (f*h)(n)e(n\theta).$$

On veut montrer que pour θ irrationnel, on a

$$S(x,\theta) = o(x(\log x)^{y-1}).$$

Procédons comme dans la démonstration du théorème 1. Comme h est de module au plus 1, on peut prendre $\widetilde{h} = h$ dans le lemme 2. On écrit ainsi

$$S(x,\theta) = \sum_{m\le x} f(m)H\Big(\frac{x}{m}, m\theta\Big), \tag{14}$$

où H est défini comme $\widetilde{H}$. Comme on a

$$\sum_{m\le x} |f(m)| \le \sum_{m\le x} d_{y-1}(m) = o(x(\log x)^{y-1}),$$

on peut restreindre la sommation de (14) au domaine $m \le x/x_1(\varepsilon)$ pour toute constante fixée $x_1(\varepsilon)$.

Il reste donc à montrer que, pour $z \ge x_2(\varepsilon)$,

$$\sum_{m\le z/x_1(\varepsilon)} f(m)H\left(\frac{z}{m}, m\theta\right) \ll \varepsilon z\big(\log z\big)^{y-1}. \tag{15}$$

En définissant $E(\varepsilon)$ de la même façon que dans la preuve du théorème 1, on obtient de manière analogue que la sous-somme de (15) correspondant à $\{m\theta\} \notin E(\varepsilon)$ est majorée par le membre de droite.

Pour évaluer, pour $z \geq x_2(\varepsilon)$, la somme

$$\sum_{\substack{m \leq z \\ \{\theta m\} \in E(\varepsilon)}} \frac{|f(m)|}{m}, \tag{16}$$

on majore à nouveau la fonction indicatrice de $E(\varepsilon)$ par le polynôme trigonométrique

$$\frac{C}{Q} \sum_{q \leq B} \frac{1}{q} \sum_{\substack{1 \leq a < q \\ (a,q)=1}} \sum_{|k| \leq qQ} \left(1 - \frac{|k|}{qQ}\right) \cos\left(2\pi k\left(\theta - \frac{a}{q}\right)\right),$$

puis on reporte dans (16) et on intervertit les sommations.

Comme $|f|$ vérifie les hypothèses du théorème 2, que l'on a supposé vrai pour $y-1$, la contribution de chaque $k \neq 0$ est, par sommation d'Abel, $O(x(\log x)^{y-1})$. On obtient donc que (16) est $\ll (\varepsilon + o(1))(\log x)^{y-1}$, ce qui termine la démonstration.

6. Démonstration du corollaire 4. Ecrivons $|f| = d_y * \psi$. Les séries entières correspondant à ces fonctions multiplicatives vérifient

$$\forall z,\ |z| < 1, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |f(p^\nu)| z^\nu = (1-z)^{-y} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \psi(p^\nu) z^\nu.$$

On en déduit facilement, pour tout k entier,

$$\psi(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{y}{\nu} |f(p^{k-\nu})|,$$

d'où

$$|\psi(p^k)| \leq \sum_{\nu=0}^{k} d_y(p^\nu) |f(p^{k-\nu})|.$$

En tenant compte de la relation $\psi(p) = |f(p)| - y$, on trouve ainsi

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(p^k)|}{p^k} &\leq \frac{y - |f(p)|}{p} + \sum_{k \geq 2} \frac{1}{p^k} \sum_{\nu=0}^{k} d_y(p^\nu) |f(p^{k-\nu})| \\ &\ll \frac{y - |f(p)|}{p} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{d_y(p^k)}{p^k} + \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{|f(p^\nu)|}{p^\nu},\end{aligned}$$

d'où, grâce aux hypothèses (ii) et (iii),

$$\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\psi(p^k)|}{p^k} < \infty,$$

et enfin

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\psi(m)|}{m} < \infty.$$

On en déduit facilement que

$$\sum_{n \le x} |f(n)| \sim x(\log x)^{y-1},$$

d'où le corollaire annoncé.

7. Démonstration du théorème 3. Dans ce qui suit, on aura besoin de l'ordre moyen de la fonction 2^{Ω}. Pour la commodité du lecteur, nous rappellerons comment on peut l'obtenir, en procédant par convolution à partir de l'ordre moyen de la fonction d.

(a) *Identités de convolution.* Comme on a affaire à des fonctions multiplicatives, il suffit de vérifier ces identités sur les puissances de nombres premiers.

Lemme 3. *On a* $2^{\Omega} = h * f$, *où* h *et* f, *multiplicatives*, *sont définies respectivement par*

$$\begin{cases} \forall k \ge 1, h(2^k) = 0, \\ \forall p \ne 2, \forall k \ge 0, h(p^k) = 2^k \end{cases} \quad \textit{et} \quad f(n) = \begin{cases} n & \textit{si } \exists k \ge 0, n = 2^k, \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Soit $p \ne 2$ et $k \ge 0$. Alors

$$(h * f)(p^k) = \sum_{\nu=0}^{k} \underbrace{f(p^\nu)}_{=0 \text{ si } \nu \ne 0} h(p^{k-\nu}) = h(p^k) = 2^k = 2^{\Omega(p^k)}.$$

Prenons $k \ge 0$. On a

$$(h * f)(2^k) = \sum_{\nu=0}^{k} \underbrace{h(2^\nu)}_{=0 \text{ si } \nu > 0} f(2^{k-\nu}) = f(2^k) = 2^k = 2^{\Omega(2^k)}.$$

Lemme 4. *On a* $h = d * g$, *où* g, *multiplicative*, *est définie par*

$$\forall p \ne 2, \quad g(p^k) = \begin{cases} 2^{k-2} & \textit{si } k \ge 2, \\ 0 & \textit{si } k = 1 \end{cases} \quad \textit{et} \quad g(2^k) = \begin{cases} 0 & \textit{si } k \ge 3, \\ 1 & \textit{si } k = 2, \\ -2 & \textit{si } k = 1. \end{cases}$$

P r e u v e. Soit $p \neq 2$ et $k \geq 2$. Alors

$$\begin{aligned}(d*g)(p^k) &= \sum_{\nu=0}^{k} g(p^\nu)d(p^{k-\nu}) = (k+1) + \sum_{\nu=2}^{k} 2^{\nu-2}(k-\nu+1)\\ &= (k+1) + \sum_{\nu=2}^{k} 2^{\nu-2}\sum_{i=0}^{k-\nu} 1 = (k+1) + \sum_{i=0}^{k-2}\sum_{\nu=2}^{k-i} 2^{\nu-2}\\ &= (k+1) + \sum_{i=0}^{k-2}(2^{k-i-1}-1) = 1 + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i = 2^k = h(p^k).\end{aligned}$$

Pour $p \neq 2$ et $k = 1$, on a $(d*g)(p) = 2 = h(p)$.
Pour $p = 2$ et $k \geq 2$, on a

$$(d*g)(2^k) = \sum_{\nu=0}^{k} g(2^\nu)d(2^{k-\nu}) = (k+1) - 2k + (k-1) = 0 = h(2^k).$$

Pour $p = 2$ et $k = 1$, on a $(d*g)(2) = 0 = h(2)$.

(b) *Ordres moyens*

LEMME 5. *Si on pose*

$$C = \prod_{p>2}\left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right),$$

on a

$$\sum_{n\leq x} h(n) = \tfrac{1}{4}Cx\log x + \mathcal{O}(x).$$

P r e u v e. D'après le lemme 4, on a

$$\sum_{n\leq x} h(n) = \sum_{k\leq x} g(k)\sum_{l\leq x/k} d(l) = \sum_{k\leq x} g(k)\left(\frac{x}{k}\log\frac{x}{k} + \mathcal{O}\left(\frac{x}{k}\right)\right),$$

soit

$$\sum_{n\leq x} h(n) = x\log x\sum_{k\leq x}\frac{g(k)}{k} - x\sum_{k\leq x}\frac{g(k)\log k}{k} + \mathcal{O}\left(x\sum_{k\leq x}\frac{|g(k)|}{k}\right). \tag{17}$$

Pour tout α réel, on a

$$\sum_{k\leq x}\frac{|g(k)|}{k^\alpha} \leq \prod_{p\leq x}\left(\sum_{\nu\geq 0}\frac{|g(p^\nu)|}{p^{\alpha\nu}}\right).$$

La série $\sum_\nu |g(p^\nu)|/p^{\alpha\nu}$ converge dès que α est tel que $3^\alpha > 2$ (pour $p = 2$, il n'y a qu'un nombre fini de termes non nuls dans la série). Pour

$\alpha > (\log 2)/\log 3$, on obtient ainsi

$$\sum_{k\le x} \frac{|g(k)|}{k^\alpha} \ll \prod_{2<p\le x} \Big(1+\sum_{\nu\ge 2} \frac{2^{\nu-2}}{p^{\alpha\nu}}\Big) = \prod_{2<p\le x}\Big(1+\frac{1}{p^\alpha(p^\alpha-2)}\Big),$$

ce qui montre que la série $\sum g(k)/k^\alpha$ converge absolument ($\alpha > (\log 2)/\log 3 \Rightarrow 2\alpha > 1$).

On peut donc écrire

$$\sum_{k\le x}\frac{g(k)}{k} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{g(k)}{k} - \sum_{k>x}\frac{g(k)}{k}$$

avec

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{g(k)}{k} = \prod_p\Big(\sum_{\nu\ge 0}\frac{g(p^\nu)}{p^\nu}\Big) = \Big(1-\frac{2}{2}+\frac{1}{4}\Big)\prod_{p>2}\Big(1+\frac{1}{p(p-2)}\Big) = \frac{C}{4} \tag{18}$$

et, en s'inspirant de la méthode de Rankin, et en prenant $\alpha > (\log 2)/\log 3$,

$$\sum_{k>x}\frac{g(k)}{k} \ll \frac{1}{x^{1-\alpha}}\sum_{k>x}\frac{|g(k)|}{k^\alpha} \ll_\alpha \frac{1}{x^{1-\alpha}}. \tag{19}$$

Par ailleurs, si $(\log 2)/\log 3 < \alpha < 1$, on a

$$\sum_{k\le x}\frac{g(k)\log k}{k} \ll_\alpha \sum_{k\le x}\frac{|g(k)|}{k^\alpha} \ll_\alpha 1. \tag{20}$$

En choisissant α quelconque dans $](\log 2)/\log 3, 1[$ et en reportant (18)–(20) dans (17), on obtient le résultat annoncé.

Lemme 6. *Avec la même constante C que dans le lemme* 5, *on a*

$$\sum_{n\le x} 2^{\Omega(n)} = \frac{C}{8\log 2}x(\log x)^2 + \mathcal{O}(x\log x).$$

Preuve. En utilisant le lemme 3, on peut écrire

$$\sum_{n\le x} 2^{\Omega(n)} = \sum_{k\le x} f(k)\sum_{l\le x/k} h(l),$$

ce qui donne, d'après le lemme 5,

$$\sum_{n\le x} 2^{\Omega(n)} = \sum_{k\le x} f(k)\Big(\frac{1}{4}C\frac{x}{k}\log\frac{x}{k} + \mathcal{O}\Big(\frac{x}{k}\Big)\Big)$$

soit

$$\sum_{n\le x} 2^{\Omega(n)} = \frac{C}{4}x\log x\sum_{k\le x}\frac{f(k)}{k} - \frac{C}{4}x\sum_{k\le x}\frac{f(k)\log k}{k} + \mathcal{O}\Big(x\sum_{k\le x}\frac{f(k)}{k}\Big).$$

Or on a

$$\sum_{k\le x}\frac{f(k)}{k}=\sum_{0\le r\le\log_2 x}1=\frac{\log x}{\log 2}+\mathcal{O}(1)$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{k\le x}\frac{f(k)\log k}{k}&=\sum_{0\le r\le\log_2 x}\log 2^r=\log 2\frac{\lfloor\log_2 x\rfloor(\lfloor\log_2 x\rfloor+1)}{2}\\&=\frac{\log 2}{2}\left(\frac{\log x}{\log 2}+\mathcal{O}(1)\right)^2=\frac{(\log x)^2}{2\log 2}+\mathcal{O}(\log x).\end{aligned}$$

On trouve donc finalement

$$\sum_{n\le x}2^{\Omega(n)}=\frac{C}{8\log 2}x(\log x)^2+\mathcal{O}(x\log x).$$

(c) *Minoration de la somme d'exponentielles*. On notera $S(x,\theta)=\sum_{n\le x}2^{\Omega(n)}e(n\theta)$. Le principe de l'hyperbole, avec le lemme 3, donne

$$S(x,\theta)=\sum_{l\le x}f(l)\sum_{k\le x/l}h(k)e(kl\theta)=S_1(\theta)+S_2(\theta)$$

avec

$$S_1(\theta)=\sum_{l\le y}f(l)\sum_{k\le x/l}h(k)e(kl\theta)$$

et

$$S_2(\theta)=\sum_{k\le x/y}h(k)\sum_{y<l\le x/k}f(l)e(lk\theta).$$

On a tout d'abord

$$|S_1(\theta)|\le\sum_{l\le y}f(l)\sum_{k\le x/l}h(k),$$

ce qui donne, d'après le lemme 5,

$$S_1(\theta)\ll\sum_{l\le y}f(l)\frac{x}{l}\log x=x\log x\sum_{2^r\le y}1,$$

d'où finalement

$$S_1(\theta)\ll x\log x\log y. \tag{21}$$

La deuxième somme peut s'écrire sous la forme $S_2(\theta)=T_1(\theta)+T_2(\theta)$ avec

$$T_1(\theta)=\sum_{x/(4y)<k\le x/y}h(k)\sum_{y<l\le x/k}f(l)e(lk\theta),$$

$$T_2(\theta)=\sum_{k\le x/(4y)}h(k)\sum_{2^r\le x/k}2^re(2^rk\theta).$$

Dans la somme $T_1(\theta)$, comme $x/k < 4y$, il y a au plus deux puissances de 2 dans $]y, x/k]$, d'où

$$|T_1(\theta)| \le \sum_{x/(4y)<k\le x/y} h(k)\left(\frac{x}{k}+\frac{x}{2k}\right) \le 6y \sum_{k\le x/y} h(k),$$

ce qui, grâce au lemme 5, donne

$$T_1(\theta) \ll x\log x. \tag{22}$$

Dans $T_2(\theta)$, pour chaque k, ce sont les deux plus grandes valeurs de r qui jouent un rôle prépondérant. On écrit donc $T_2(\theta) = U_1(\theta) + U_2(\theta)$, avec

$$U_1(\theta) = \sum_{k\le x/(4y)} h(k) \sum_{\log_2 y<r<\lfloor\log_2(x/k)\rfloor-1} 2^r e(2^r k\theta),$$

$$U_2(\theta) = \sum_{k\le x/(4y)} h(k)2^{\lfloor\log_2(x/k)\rfloor-1} e(2^{\lfloor\log_2(x/k)\rfloor-1}k\theta)(1+2e(2^{\lfloor\log_2(x/k)\rfloor-1}k\theta)).$$

La condition $k \le x/(4y)$ assure que l'on a $\lfloor\log_2(x/k)\rfloor - 1 > \log_2 y$.

Une majoration grossière donne

$$|U_1(\theta)| \le \sum_{k\le x/(4y)} h(k) \sum_{\log_2 y<r<\lfloor\log_2(x/k)\rfloor-1} 2^r$$
$$\le \sum_{k\le x/(4y)} h(k)(2^{\lfloor\log_2(x/k)\rfloor-1}-1) \le \frac{x}{2}\sum_{k\le x}\frac{h(k)}{k}.$$

Or, en effectuant une sommation par parties, on obtient, avec le lemme 5,

$$\sum_{k\le x}\frac{h(k)}{k} = \frac{1}{x}\sum_{k\le x} h(k) + \int_1^x \frac{du}{u^2}\sum_{k\le u} h(k) = \frac{C}{4}\int_1^x \frac{\log u\,du}{u} + \mathcal{O}(\log x),$$

soit

$$\sum_{k\le x}\frac{h(k)}{k} = \frac{C}{8}(\log x)^2 + \mathcal{O}(\log x).$$

D'où finalement,

$$|U_1(\theta)| \le \frac{C}{16}x(\log x)^2 + \mathcal{O}(x\log x). \tag{23}$$

C'est la somme $U_2(\theta)$ que l'on va chercher à minorer:

$$|U_2(\theta)| \ge \operatorname{Re} U_2(\theta)$$
$$= \sum_{k\le x/(4y)} h(k)2^{\lfloor\log_2(x/k)\rfloor-1}(\cos(2^{\lfloor\log_2(x/k)\rfloor}k\pi\theta) + 2\cos(2^{\lfloor\log_2(x/k)\rfloor+1}k\pi\theta)).$$

Or pour tout α, on a l'inégalité $\cos(2\pi\alpha) \geq 1 - 2\pi\|\alpha\|$, donc

$$|U_2(\theta)| \geq \sum_{k\leq x/(4y)} h(k)2^{\lfloor \log_2(x/k)\rfloor -1}(3 - 2\pi\|2^{\lfloor \log_2(x/k)\rfloor -1}k\theta\| - 4\pi\|2^{\lfloor \log_2(x/k)\rfloor}k\theta\|).$$

On a l'encadrement suivant :

$$x/2 \leq 2^{\lfloor \log_2(x/k)\rfloor}k \leq x,$$

ce qui donne

$$|U_2(\theta)| \geq (1 - 2\pi M(x,y,\theta))U_2(0) \tag{24}$$

si on pose

$$M(x,y,\theta) = \max_{\substack{x/4\leq n\leq x\\ 2^{\lfloor \log_2 y\rfloor}\mid n}} \|n\theta\|.$$

Or d'après les majorations (21) et (22), on a

$$U_2(\theta) = S(x,\theta) - U_1(\theta) + \mathcal{O}(x\log x\log y).$$

Par conséquent, en reportant dans (24), on obtient

$$|S(x,\theta)| + |U_1(\theta)| \geq (1 - 2\pi M(x,y,\theta))(S(x,0) - U_1(0)) + \mathcal{O}(x\log x\log y),$$

soit, d'après le lemme 6 et la majoration (23),

$$|S(x,\theta)| \geq \frac{C}{16}\left(\left(\frac{2}{\log 2}-1\right)(1-2\pi M(x,y,\theta))-1\right)x(\log x)^2+\mathcal{O}(x\log x\log y).$$

On obtient finalement, uniformément en x, y et θ,

$$|S(x,\theta)| \geq ((1-\log 2)-\pi(2-\log 2)M(x,y,\theta))S(x,0)+\mathcal{O}(x\log x\log y). \tag{25}$$

(d) *Étude de $M(x,y,\theta)$*. On va montrer le résultat suivant :

LEMME 7. *Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to\infty}\phi(x) = \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe un irrationnel $\theta_{\phi,\varepsilon}$ et une suite strictement croissante (x_q) d'entiers naturels telle que*

$$\forall q\in\mathbb{N},\quad M(x_q,\phi(x_q),\theta_{\phi,\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

Preuve. On cherche $\theta_{\phi,\varepsilon}$ sous la forme

$$\theta_{\phi,\varepsilon} = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-\alpha_\nu},$$

où (α_ν) est une suite strictement croissante d'entiers naturels. Pour tout $n \in [x/4, x]$ tel que $n = 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor} k$ ($k \in \mathbb{N}$), on a

$$\begin{aligned}\|n\theta_{\phi,\varepsilon}\| = \Big\| k \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor - \alpha_\nu} \Big\| &= \Big\| k \sum_{\substack{\nu \\ \alpha_\nu > \lfloor \log_2 y \rfloor}} 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor - \alpha_\nu} \Big\| \\ &\le k 2^{\lfloor \log_2 y \rfloor + 1 - \min\{\alpha_\nu > \lfloor \log_2 y \rfloor\}},\end{aligned}$$

soit

$$M(x, y, \theta_{\phi,\varepsilon}) \le \frac{2x}{2^{\min\{\alpha_\nu > \lfloor \log_2 y \rfloor\}}}. \tag{26}$$

On définit alors la suite $(x_q)_{q \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante. On pose

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbb{N}^* \text{ quelconque}, \\ \alpha_0 = \max\{1 + \lfloor \log_2 \phi(x_0) \rfloor, 2 + \lfloor \log_2 x_0 - \log_2 \varepsilon \rfloor\} \end{cases}$$

puis, par récurrence

$$\begin{cases} x_{q+1} > x_q \text{ tel que } \lfloor \log_2 \phi(x_{q+1}) \rfloor \ge \alpha_q, \\ \alpha_{q+1} = \max\{1 + \lfloor \log_2 \phi(x_{q+1}) \rfloor, 2 + \lfloor \log_2 x_{q+1} - \log_2 \varepsilon \rfloor, \alpha_q + (q+1)\}. \end{cases}$$

Comme on a

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{q+1} \ge \alpha_q + (q+1),$$

la suite (α_q) est strictement croissante. De plus $\theta_{\phi,\varepsilon}$ est irrationnel (sinon (α_q) serait périodique et $\alpha_{q+1} - \alpha_q$ serait borné).

Soit $q \in \mathbb{N}$. Par construction, on a

$$\alpha_q = \min\{\alpha_\nu > \lfloor \log_2 \phi(x_q) \rfloor\}.$$

En effet, $\alpha_q > \lfloor \log_2 \phi(x_q) \rfloor$ et $\forall \nu < q$, $\alpha_\nu \le \alpha_{q-1} \le \lfloor \log_2 \phi(x_q) \rfloor$. Donc, d'après (26), on a bien défini une suite strictement croissante (x_q) telle que

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad M(x_q, \phi(x_q), \theta_{\phi,\varepsilon}) \le 2x_q / 2^{\alpha_q} \le \varepsilon.$$

(e) *Conclusion*. On peut maintenant regrouper tous les résultats obtenus précédemment. On choisit $\varepsilon > 0$ tel que

$$(1 - \log 2) - \pi(2 - \log 2)\varepsilon = A > 0.$$

On prend la fonction $\phi = \log$. Elle vérifie bien les hypothèses du lemme 7, ce qui fournit un irrationnel $\theta_{\log,\varepsilon}$ et une suite (x_q). On a alors, d'après (25),

$$\forall q \in \mathbb{N}, \quad |S(x_q, \theta_{\log,\varepsilon})| \ge A\, S(x_q, 0) + \mathcal{O}(x_q \log x_q \log\log x_q),$$

où (x_q) est une suite strictement croissante d'entiers naturels. Donc

$$|S(x, \theta_{\log,\varepsilon})| = \Omega(S(x, 0)),$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3.

Références

[1] S. Chowla, *Some problems of diophantine approximation* (*I*), Math. Z. 33 (1931), 544–563.
[2] H. Daboussi, *On some exponential sums*, in: Analytic Number Theory, Proceedings of a Conference in honour of Paul T. Bateman, Birkhäuser, Boston, 1990, 111–118.
[3] H. Daboussi et H. Delange, *Quelques propriétés des fonctions multiplicatives de module au plus égal à* 1, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 278 (1974), 657–660.
[4] —, —, *On multiplicative arithmetical functions whose modulus does not exceed one*, J. London Math. Soc. (2) 26 (1982), 245–264.
[5] H. Delange, *Sur les fonctions arithmétiques multiplicatives*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 78 (1961), 273–304.
[6] Y. Dupain, R. R. Hall et G. Tenenbaum, *Sur l'équirépartition modulo* 1 *de certaines fonctions de diviseurs*, J. London Math. Soc. (2) 26 (1982), 397–411.
[7] P. Erdős, *Some remarks on diophantine approximations*, J. Indian Math. Soc. 12 (1948), 67–74.
[8] K. H. Indlekofer, *Properties of uniformly summable multiplicative functions*, Period. Math. Hungar. 17 (1986), 143–161.
[9] H. L. Montgomery and R. C. Vaughan, *On exponential sums with multiplicative coefficients*, Invent. Math. 43 (1977), 69–82.
[11] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publ. Inst. Élie Cartan, Nancy, 1990.

URA D0752
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
BÂTIMENT 425
UNIVERSITÉ DE PARIS XI, ORSAY
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

Reçu le 17.3.1993
et révisé le 5.10.1994 (2398)