ACTA ARITHMETICA
LXXIII.2 (1995)

Sur le graphe divisoriel

par

PAUL ERDŐS (Budapest) et ERIC SAIAS (Paris)

1. Introduction. On définit sur l'ensemble des entiers positifs $\le x$ les deux relations $\mathcal{R}_f$ et $\mathcal{R}_g$ suivantes :

$$a\,\mathcal{R}_f\,b \quad \text{si et seulement si} \quad a \text{ divise } b \text{ ou } b \text{ divise } a;$$
$$a\,\mathcal{R}_g\,b \quad \text{si et seulement si} \quad \mathrm{ppcm}(a,b) \le x.$$

On remarque que

$$\text{si} \quad a\,\mathcal{R}_f\,b \quad \text{alors} \quad a\,\mathcal{R}_g\,b. \tag{1}$$

On appelle *graphe divisoriel* le graphe de la relation $\mathcal{R}_f$. Enfin, on appelle *chaîne d'entiers* $\le x$ *de longueur* l, pour la relation $\mathcal{R}_f$ (respectivement $\mathcal{R}_g$), toute suite $(n_i)_{1\le i\le l}$ d'entiers $\le x$, deux à deux distincts, et vérifiant pour tout i $(1 \le i < l)$ $n_i\,\mathcal{R}_f\,n_{i+1}$ (resp. $n_i\,\mathcal{R}_g\,n_{i+1}$).

L'étude asymptotique (quand x tend vers $+\infty$) du graphe divisoriel (et du graphe de $\mathcal{R}_g$) se subdivise en plusieurs problèmes. L'un de ceux-ci consiste à estimer la longueur maximale $f(x)$ (resp. $g(x)$) d'une chaîne d'entiers $\le x$ pour la relation $\mathcal{R}_f$ (resp. $\mathcal{R}_g$). Les travaux [1], [3], [4], [5] et [7] traitent de cette question. On sait maintenant [5] qu'il existe deux constantes strictement positives c et c' telles que pour tout $x \ge 2$, on ait

$$c\,\frac{x}{\log x} \le f(x) \le g(x) \le c'\,\frac{x}{\log x}.$$

Un autre problème est d'estimer le nombre minimum de chaînes d'entiers $\le x$ nécessaires pour recouvrir tous les entiers $\le x$. C'est cette question qui fait l'objet du présent travail.

En fait, il y a deux questions suivant que l'on autorise ou non aux chaînes d'avoir des entiers en commun. On désigne par $\varphi(x)$ (resp. $\gamma(x)$) le nombre minimum de chaînes $\mathcal{C}_i$ $(1 \le i \le \varphi(x))$ (resp. $1 \le i \le \gamma(x)$) d'entiers $\le x$ pour la relation $\mathcal{R}_f$ (resp. $\mathcal{R}_g$) telles que tout entier $\le x$ apparaît au moins dans une de ces chaînes. Dans le cas où on oblige les chaînes $\mathcal{C}_i$ à être deux à deux disjointes, on désigne par $\varphi^*(x)$ et $\gamma^*(x)$ les quantités correspondant respectivement à $\varphi(x)$ et $\gamma(x)$. Nous pouvons maintenant énoncer nos résultats.

THÉORÈME 1. *Il existe deux constantes strictement positives c_1 et c_2 telles que pour tout $x \geq 2$, on ait*

$$c_1 \frac{x}{\log x} \leq \gamma(x) \leq \varphi(x) \leq c_2 \frac{x}{\log x}.$$

THÉORÈME 2. *Il existe une constante strictement positive c_3 telle que pour tout $x \geq 2$, on ait*

$$c_3 x \leq \gamma^*(x) \leq \varphi^*(x) \leq x/2.$$

2. Notations. On désigne par $\Omega(n)$ le nombre de facteurs premiers de l'entier n, comptés avec leur multiplicité.

On désigne par $P(n)$ (respectivement $P^-(n)$) le plus grand (resp. petit) facteur premier de l'entier $n > 1$. On pose de plus $P(1) = 1$ et $P^-(1) = \infty$.

On désigne usuellement par $\Psi(x, y)$ et $\Phi(x, z)$ les fonctions

$$\Psi(x, y) = \operatorname{card}\{n \leq x : P(n) \leq y\}$$

et

$$\Phi(x, z) = \operatorname{card}\{n \leq x : P^-(n) > z\}.$$

Les lettres p et q désigneront des nombres premiers génériques.

On désignera par n_1—n_2—…—n_l la suite finie d'entiers $\mathcal{S} = (n_i)_{1 \leq i \leq l}$. Si $\mathcal{S}_1 = (n_i)_{1 \leq i \leq l}$ et $\mathcal{S}_2 = (m_j)_{1 \leq j \leq k}$ sont deux suites finies d'entiers, on désignera par $\mathcal{S}_1$—$\mathcal{S}_2$ la suite n_1—n_2—…—n_l—m_1—m_2—…—m_k. On sera aussi amenés à concaténer des suites d'entiers et des entiers. Par exemple, si a est un entier, on désignera par $\mathcal{S}$—a la suite d'entiers n_1—n_2—…—n_l—a.

3. Lemmes généraux

LEMME 1. *On a pour $x \geq 2z \geq 4$,*

$$\Phi(x, z) = x \prod_{p \leq z} \left(1 - \frac{1}{p}\right)(1 + O(x^{-1/(3 \log z)})).$$

LEMME 2. *On a pour $x \geq y \geq 2$,*

$$\Psi(x, y) \ll x^{1 - 1/(2 \log y)}.$$

LEMME 3. *Il existe une constante x_0 telle que pour $x \geq x_0$, il y ait toujours au moins un nombre premier dans l'intervalle $[x, x + x^{2/3}[$.*

Le Lemme 1 découle facilement des corollaires III.6.7.3 et III.6.3.1 de [6]. Le Lemme 2 apparaît au Théorème III.5.1 de [6]. Enfin, on peut consulter par exemple [2] (Chapitre 28) pour une démonstration du Lemme 3. En fait, seul l'existence d'un réel $\theta < 1$ tel que pour tout x suffisamment grand, l'intervalle $[x, x + x^\theta[$ contient au moins un nombre premier, nous est utile ici.

4. Démonstration du Théorème 2. Montrons que $\varphi^*(x) \le x/2$. A tout nombre impair n inférieur ou égal à x, on associe la chaîne notée $\mathcal{C}_n : n$—$2n$—$4n$—$\ldots$—$2^\alpha n$ où 2^α est la plus grande puissance de 2 telle que $2^\alpha n \le x$. Pour $2 \le x < 3$, la chaîne $\mathcal{C}_1$ convient. Pour $x \ge 3$, on considère la famille de chaînes constituée des $\mathcal{C}_n$ avec n impair ≥ 5 et de la chaîne $\mathcal{C}_3$—$\mathcal{C}_1$. On obtient ainsi une famille d'au plus $x/2$ chaînes deux à deux disjointes, qui recouvrent tous les entiers $\le x$.

L'inégalité $\gamma^*(x) \le \varphi^*(x)$ résulte de (1).

Montrons maintenant que $\gamma^*(x) \gg x$. Cette inégalité est triviale pour x borné. On peut donc supposer x suffisamment grand. Soit $(\mathcal{C}_j)_{1\le j\le k(x)}$ $k(x)$ chaînes d'entiers $\le x$, au sens de $\mathcal{R}_g$, deux à deux disjointes, et qui recouvrent tous les entiers $\le x$. Soit z un paramètre que l'on fixera ultérieurement. Soit $\mathcal{N}_{x,z}$ l'ensemble des entiers n qui vérifient les deux propriétés suivantes :

(2) $$x/2 < n \le x \quad \text{et} \quad P^-(n) > z,$$

(3) la chaîne $\mathcal{C}_j$ qui contient n n'est pas réduite au seul entier n.

D'après (3), chaque entier n de $\mathcal{N}_{x,z}$ admet au moins un voisin v dans sa chaîne, tel que $\operatorname{ppcm}(n, v) \le x$. D'après (2), on en déduit que $v < x/z$. On construit ainsi une application

$$V : \mathcal{N}_{x,z} \to \mathcal{V}_{x,z} = \{v : v < x/z\}.$$

Comme les chaînes $(\mathcal{C}_j)_{1\le j\le k(x)}$ sont deux à deux disjointes, chaque entier de $\mathcal{V}_{x,z}$ est l'image d'au plus deux entiers de $\mathcal{N}_{x,z}$ par l'application V. Donc

$$\operatorname{card} \mathcal{N}_{x,z} < 2x/z.$$

Par ailleurs, d'après le Lemme 1 et la formule de Mertens, on a pour $2 \le z \le \log x$ et x suffisamment grand

$$\operatorname{card}\{x/2 < n \le x : P^-(n) > z\} \gg x/\log z.$$

On peut donc choisir z_0 tel que pour x suffisamment grand, on ait

$$\operatorname{card} \mathcal{N}_{x,z_0} \le \tfrac{1}{2} \operatorname{card}\{x/2 < n \le x : P^-(n) > z_0\}.$$

Donc au moins la moitié des entiers n vérifiant (2) avec $z = z_0$ appartiennent à des chaînes réduites à un entier. Comme $\operatorname{card}\{x/2 < n \le x : P^-(n) > z_0\} \asymp x$ pour x suffisamment grand, cela montre que le nombre $k(x)$ de chaînes vérifie $k(x) \gg x$. Cela achève la démonstration du Théorème 2.

5. Construction de chaînes à extrémités fixées et passant par un entier donné. Les lemmes de ce paragraphe sont élémentaires et faciles à démontrer. Dorénavant, quand on écrira "chaîne d'entiers", on entendra implicitement "chaîne d'entiers au sens de $\mathcal{R}_f$". Nous appellerons de plus *suite d'entiers en relation* toute suite $(n_i)_{1\le i\le l}$ d'entiers vérifiant pour tout i $(1\le i<l)$, $n_i\,\mathcal{R}_f\,n_{i+1}$. Les entiers n_1 et n_l seront appelés *extrémités* de la suite $(n_i)_{1\le i\le l}$.

LEMME 4. *De toute suite $\mathcal{S}$ d'entiers en relation, on peut extraire une chaîne qui a les mêmes extrémités que $\mathcal{S}$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{S}=(n_i)_{1\le i\le l}$ une suite d'entiers en relation. Si $n_i=n_j$ pour $1\le i<j\le l$ la suite extraite

$$n_1—n_2—\ldots—n_i—n_{j+1}—n_{j+2}—\ldots—n_l$$

est encore une suite d'entiers en relation qui a les mêmes extrémités que la suite initiale. En itérant, si besoin est, cette opération, on obtient en un nombre fini d'étapes une suite extraite de $\mathcal{S}$ qui est une chaîne et qui a les mêmes extrémités que $\mathcal{S}$.

LEMME 5. *Soit x un réel ≥ 2. Soit a et n deux entiers vérifiant $2\le a\le x$, a est pair, $2\le n\le x$, $P(n)\le x/2$ et $P(a)\le P(n)$. Alors il existe une chaîne $\mathcal{C}$ d'entiers $\le x$ vérifiant les propriétés suivantes* :

- *le premier élément de $\mathcal{C}$ est a,*
- *le dernier élément de $\mathcal{C}$ est 1,*
- *l'entier n est un élément de $\mathcal{C}$,*
- *tous les entiers m de $\mathcal{C}$ vérifient $P(m)\le P(n)$.*

Démonstration. La suite $a—2—2P(n)—P(n)—n—1$ est une suite d'entiers $\le x$ en relation, qui contient n et dont les extrémités sont a et 1. A partir de cette suite, on obtient une chaîne convenable en appliquant, si besoin est, le Lemme 4.

LEMME 6. *Soit x un réel ≥ 2. Soit n un entier positif vérifiant $2\le n\le x$ si $\Omega(n)\ne 2$, ou $n\le x/2$ si $\Omega(n)=2$. Soient a et b deux entiers distincts vérifiant $\Omega(a)\ge 3$, $aP(n)\le x/2$, $P(a)<P(n)$ et de manière symétrique $\Omega(b)\ge 3$, $bP(n)\le x/2$, $P(b)<P(n)$. Alors il existe une chaîne $\mathcal{C}$ d'entiers $\le x$ vérifiant les propriétés suivantes* :

- *les extrémités de $\mathcal{C}$ sont les entiers a et b,*
- *l'entier n est un élément de $\mathcal{C}$,*
- *à l'exception de a et b, tous les entiers de $\mathcal{C}$ sont divisibles par $P(n)$.*

Démonstration. Posons $p=P(n)$. Si $n=p$, la suite $a—ap—p—bp—b$ est une chaîne convenable.

On suppose dorénavant $\Omega(n)\ge 2$ et on désigne par q un nombre premier tel que pq divise n. Comme a et b jouent des rôles indifférenciés, on peut supposer également $a < b$. En utilisant les hypothèses faites sur x, n, a et b, on vérifie aisément que la suite

$$a—ap—p—n—qp—2qp—2p—2bp—b$$

est une suite d'entiers $\le x$ en relation avec

$$\{a, ap, p\} \cap \{qp, 2qp, 2p, 2bp, b\} = \emptyset.$$

En utilisant, si besoin est, la procédure décrite dans la démonstration du Lemme 4, on obtient, à partir de cette suite, une chaîne $\mathcal{C}$ ayant les propriétés requises.

6. Démonstration du Théorème 1. L'inégalité $\gamma(x) \le \varphi(x)$ résulte de (1) et la minoration $\gamma(x) \gg x/\log x$ est facile. En effet, pour une famille de chaînes $\le x$, au sens de $\mathcal{R}_g$, qui recouvre tous les entiers $\le x$, les nombres premiers p tels que $x/2 < p \le x$ ont pour seul voisin éventuel l'entier 1. Donc dans une chaîne donnée, il y a au plus deux tels nombres premiers. L'estimation asymptotique

$$\pi(x) - \pi(x/2) \asymp x/\log x$$

permet alors de conclure.

Pour démontrer la majoration $\varphi(x) \ll x/\log x$, on partitionne les entiers $n \le x$ en quatre ensembles. Pour chacun de ces ensembles E, on montre dans l'un des lemmes suivants que l'on peut recouvrir les entiers de E avec $O(x/\log x)$ chaînes d'entiers $\le x$. Pour simplifier les notations, on représentera toujours dans les lemmes suivants par $(\mathcal{C}_r)$ la famille de chaînes qui recouvre l'ensemble E, bien que cette famille de chaînes varie avec E. On fera de même avec la quantité $R(x)$.

Lemme 7. *Soit $x \ge 2$. Il existe une famille $(\mathcal{C}_r)_{0\le r\le R(x)}$ de $R(x)+1$ chaînes d'entiers $\le x$ avec*

$$R(x) \ll x\exp\{-\sqrt{2\log x}\}$$

telle que

(4) *tout entier positif $n \le x$ avec $P(n) \le \sqrt{x/2}$ est élément d'au moins l'une des $R(x)+1$ chaînes $\mathcal{C}_r$.*

Lemme 8. *Il existe un entier α_0 tel que pour $x \ge 2$, il existe une famille $(\mathcal{C}_r)_{1\le r\le R(x)}$ de $R(x)$ chaînes d'entiers $\le x$ avec*

$$R(x) \ll x/\log x$$

telle que tout entier n vérifiant

$$\sqrt{x/2} < P(n) \le x/2^{\alpha_0}$$

et

$$(5) \qquad \begin{array}{ll} 2 \le n \le x & \textit{si } \Omega(n) \ne 2, \\ n \le x/2 & \textit{si } \Omega(n) = 2 \end{array}$$

est élément d'au moins l'une des $R(x)$ chaînes $\mathcal{C}_r$.

LEMME 9. *Soit α_0 un entier fixé. Soit $x \ge 2$. Il existe une famille $(\mathcal{C}_r)_{1\le r\le R(x)}$ de $R(x)$ chaînes d'entiers $\le x$ avec*

$$R(x) \ll x/\log x$$

telle que tout entier positif $n \le x$ vérifiant $P(n) > x/2^{\alpha_0}$ est élément d'au moins l'une des $R(x)$ chaînes $\mathcal{C}_r$.

LEMME 10. *Soit $x \ge 2$. Il existe une famille $(\mathcal{C}_r)_{1\le r\le R(x)}$ de $R(x)$ chaînes d'entiers $\le x$ avec*

$$R(x) \ll x/\log x$$

telle que tout entier positif n vérifiant $x/2 < n \le x$ et $\Omega(n) = 2$ est élément d'au moins l'une des $R(x)$ chaînes $\mathcal{C}_r$.

On adopte les notations suivantes : $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ désigne la suite croissante des nombres premiers. De plus, $\mathcal{D}(X, Y)$ désigne une chaîne générique d'entiers n vérifiant $n \le X$ et $P(n) \le Y$. Enfin, $p\mathcal{D}(X, Y)$ désigne la chaîne obtenue en multipliant chaque entier de la chaîne $\mathcal{D}(X, Y)$ par le nombre premier p.

Les résultats étant triviaux pour x borné, on pourra toujours supposer x suffisamment grand.

Démonstration du Lemme 7. On désigne par $\mathcal{C}_0$ une chaîne formée de toutes les puissances de 2 (y compris l'entier 1), inférieures ou égales à x, prises dans un ordre quelconque.

On suppose construites les chaînes $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_{r-1}$ de telle sorte qu'il y ait au moins un entier $n \le x$ avec $P(n) \le \sqrt{x/2}$ qui ne soit pas élément de l'une de ces chaînes. On construit alors une chaîne $\mathcal{C}_r$ de la forme suivante :

$$\mathcal{C}_r : p_2\mathcal{D}_r(x/p_2, p_2) \text{—} p_3\mathcal{D}_r(x/p_3, p_3) \text{—} \ldots \text{—} p_{J(x)}\mathcal{D}_r(x/p_{J(x)}, p_{J(x)})$$

où $p_{J(x)}$ désigne le plus grand nombre premier $\le \sqrt{x/2}$ et où $\mathcal{D}_r(x/p_j, p_j)$ commence à $2p_{j-1}$ et finit à 1.

Pour les j, $2 \le j \le J(x)$, tels que

(6) tous les entiers n vérifiant $n \le x$ et $P(n) = p_j$ sont éléments d'au moins l'une des chaînes $\mathcal{C}_s$ $(1 \le s \le r-1)$,

on laisse $\mathcal{D}_r(x/p_j, p_j)$ réduite à ces deux extrémités $2p_{j-1}$ et 1. Pour les j ne vérifiant pas (6), on complète $\mathcal{D}_r(x/p_j, p_j)$ de telle sorte que la sous-chaîne

$p_j \mathcal{D}_r(x/p_j, p_j)$ contienne au moins un entier n vérifiant $n \le x$ et $P(n) = p_j$, et qui n'apparaît pas dans les chaînes $\mathcal{C}_s$ pour $s \le r-1$. Cela est possible d'après le Lemme 5, en choisissant 2 comme voisin de $2p_{j-1}$. On vérifie aisément que la suite $\mathcal{C}_r$ ainsi construite est une chaîne d'entiers $\le x$.

Soit $r = R(x)+1$ le plus petit entier vérifiant pour tout j, $2 \le j \le J(x)$, l'assertion (6). On a alors

$$R(x) \le \max_{2\le j\le J(x)} \Psi(x/p_j, p_j) \ll x \exp\{-\sqrt{2\log x}\}$$

d'après le Lemme 2. Cela achève la démonstration du Lemme 7.

D é m o n s t r a t i o n d u L e m m e 8. Bien qu'étant de même nature que celle du Lemme 7, la construction des chaînes prend ici une forme légérement plus complexe. C'est dû à deux phénomènes nouveaux. D'une part, on est ici amené à introduire des connecteurs (notés a) entre deux sous-chaînes de la forme $p\mathcal{D}(x/p, p)$. D'autre part, on ne peut pas comme précédemment "recouvrir" à l'aide d'une seule chaîne tous les nombres premiers p_j vérifiant $\sqrt{x/2} < p_j \le x/2^{\alpha_0}$. Voyons cela plus en détail.

Pour tout α suffisamment grand, nous allons construire une famille de chaînes $(\mathcal{C}_{\alpha,i,j})_{i,j}$ de telle sorte que

(7) tout entier n vérifiant (5) et $\max(\sqrt{x/2}, x/2^{\alpha+1}) < P(n) \le x/2^{\alpha}$ soit élément d'au moins l'une des chaînes $\mathcal{C}_{\alpha,i,j}$.

On désigne par $a_1 < a_2 < \ldots$ la suite croissante des entiers positifs a vérifiant $\Omega(a) \ge 3$ et on pose

$$\mathcal{A}_\alpha = \{8 \le a \le 2^{\alpha-2} : \Omega(a) \ge 3\}. \tag{8}$$

Il résulte facilement du théorème des nombres premiers que

$$\operatorname{card}\{n \le x : \Omega(n) \le 2\} \ll \frac{x}{\log x} \log\log x$$

(voir Théorème II.6.5 de [6] pour un résultat plus général). On peut donc choisir un entier α_0 suffisamment grand tel que

$$\operatorname{card} \mathcal{A}_\alpha \ge 2^{\alpha-3} - 1 \quad \text{pour } \alpha \ge \alpha_0.$$

On désigne par $M(\alpha)$ le plus petit entier tel que

$$p_{M(\alpha)} > \frac{x}{2^{\alpha+1}}. \tag{9}$$

Pour α fixé tel que $\alpha \ge \alpha_0$ et

$$2^\alpha \le \sqrt{2x}, \tag{10}$$

et pour i fixé tel que

$$i \ge 0 \quad \text{et} \quad M(\alpha) + i2^{\alpha-3} < M(\alpha-1), \tag{11}$$

les chaînes $\mathcal{C}_{\alpha,i,j}$ vont être de la forme suivante :

(12) $$\begin{aligned}&p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}}\mathcal{D}_j(x/p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}},p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}})\text{—}a_1\text{—}\\&p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}+1}\mathcal{D}_j(x/p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}+1},p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}+1})\text{—}a_2\text{—}\\&p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}+2}\mathcal{D}_j(x/p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}+2},p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}+2})\text{—}a_3\text{—}\\&\ldots\text{—}p_{K(\alpha,i)}\mathcal{D}_j(x/p_{K(\alpha,i)},p_{K(\alpha,i)})\end{aligned}$$

avec

(13) $$K(\alpha,i)=\min(M(\alpha)+(i+1)2^{\alpha-3},M(\alpha-1))-1.$$

Soit a_l un élément de $\mathcal{A}_\alpha$ et k un entier vérifiant

(14) $$M(\alpha)+i2^{\alpha-3}\le k\le K(\alpha,i).$$

D'après (8), (9) et (10), on a $a_l\le\frac12\sqrt{x/2}<p_{M(\alpha)}\le p_k$. Cela entraîne que les connecteurs a_l ne sont pas éléments des sous-chaînes $p_k\mathcal{D}_j(x/p_k,p_k)$ de (12).

On suppose construites les chaînes $(\mathcal{C}_{\alpha,i,l})$ pour $1\le l\le j-1$. Soit k un entier vérifiant (14) et

$$\mathcal{E}_{\alpha,i,j,k}=\{n:n\text{ vérifie (5)},P(n)=p_k\text{ et }n\text{ n'apparaît dans aucune des chaînes }p_k\mathcal{D}_l(x/p_k,p_k)\text{ avec }1\le l\le j-1\}.$$

On utilise alors le Lemme 6 pour montrer que l'on peut effectivement construire des sous-chaînes $p_k\mathcal{D}_j(x/p_k,p_k)$ de telle sorte que $\mathcal{C}_{\alpha,i,j}$ soit une chaîne d'entiers $\le x$ qui ait la forme (12) et satisfasse la propriété suivante :

(15) pour tout k tel que $\mathcal{E}_{\alpha,i,j,k}\ne\emptyset$, la sous-chaîne $p_k\mathcal{D}_j(x/p_k,p_k)$ contient au moins un élément de $\mathcal{E}_{\alpha,i,j,k}$.

C'est avec (8), (9), (13) et (14) que l'on montre que les hypothèses du Lemme 6 sont ici bien vérifiées. On arrête cette construction par récurrence sur j des chaînes $\mathcal{C}_{\alpha,i,j}$, dès que la propriété (7) est vérifiée. On a ainsi construit une famille de chaînes qui recouvre tous les entiers n vérifiant $\sqrt{x/2}<P(n)\le x/2^{\alpha_0}$ et (5). Il reste à vérifier que le nombre de ces chaînes est $O(x/\log x)$.

Au regard de la propriété (15), on observe que pour α et i fixés, le nombre de chaînes $(\mathcal{C}_{\alpha,i,j})_j$ que l'on construit ainsi est

$$\le\frac{x}{p_{M(\alpha)+i2^{\alpha-3}}}\le\frac{x}{p_{M(\alpha)}}<2^{\alpha+1}$$

d'après (9). Pour α fixé, le nombre de chaînes $(\mathcal{C}_{\alpha,i,j})_{i,j}$ ainsi construites est donc, en utilisant (9) et (11),

$$<2^{\alpha+1}\operatorname{card}\{i\}\le2^{\alpha+1}\biggl(1+\frac{\pi(x/2^\alpha)-\pi(x/2^{\alpha+1})}{2^{\alpha-3}}\biggr)\ll\sqrt{x}+\frac{x}{2^\alpha\log x}$$

d'après (10) et le théorème des nombres premiers. Cela entraîne que le nombre total des chaînes $(\mathcal{C}_{\alpha,i,j})_{\alpha,i,j}$ ainsi construites est $\ll x/\log x$, ce qui achève la démonstration du Lemme 8.

D é m o n s t r a t i o n d u L e m m e 9. On a pour α_0 fixé,

$$\begin{aligned}\operatorname{card}\{n \le x : P(n) > x/2^{\alpha_0}\} &\le \sum_{x/2^{\alpha_0} < p \le x} [x/p] \\ &\le x \sum_{x/2^{\alpha_0} < p \le x} 1/p \ll x/\log x\end{aligned}$$

d'après le théorème des nombres premiers. Pour établir le Lemme 9, il suffit donc de considérer la famille des chaînes réduites à un entier n vérifiant $n \le x$ et $P(n) > x/2^{\alpha_0}$.

D é m o n s t r a t i o n d u L e m m e 10. On désigne par

- p_{α_0} le plus petit nombre premier tel que $p_{\alpha_0} > x^{4/5}$,
- p_{α_1} le plus grand nombre premier tel que $p_{\alpha_1} \le x/2$,
- p_{β_0} le plus petit nombre premier tel que $p_{\alpha_0}p_{\beta_0} > x/2$,
- p_{β_1} le plus grand nombre premier tel que $p_{\alpha_0}p_{\beta_1} \le x$.

Pour un α donné, on désigne par $\beta(\alpha)$ le plus grand entier tel que $p_\alpha p_{\beta(\alpha)} \le x$. On désigne par $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ la chaîne suivante :

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{\alpha,\beta} : p_\alpha p_\beta — p_\alpha — p_\alpha p_{\beta-1} — p_{\beta-1} — p_{\alpha+1}p_{\beta-1} — p_{\alpha+1} \\ — p_{\alpha+1}p_{\beta-2} — p_{\beta-2} — p_{\alpha+2}p_{\beta-2} — \dots — p_{\alpha+\beta-1}p_1.\end{aligned}$$

On considère les chaînes $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ avec $[\alpha = \alpha_0$ et $\beta_0 \le \beta \le \beta_1]$ ou $[\alpha_0 \le \alpha \le \alpha_1$ et $\beta = \beta(\alpha)]$. D'après le Lemme 3, on a pour $p_i > x^{4/5}$, $p_j < x^{1/5}$ et x suffisamment grand,

$$p_{i+1}p_{j-1} < p_i p_j.$$

Cela montre que les chaînes $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ considérées sont formées d'entiers $\le x$. Par ailleurs, d'une part ces chaînes $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ recouvrent tous les entiers n tels que $x/2 < n \le x$, $\Omega(n) = 2$ et $P(n) > x^{4/5}$. D'autre part, le nombre de ces chaînes est, d'après le théorème des nombres premiers, $O(x/\log x)$. Enfin, on a

$$\begin{aligned}&\operatorname{card}\{x/2 < n \le x : \Omega(n) = 2 \text{ et } P(n) \le x^{4/5}\} \\ &\qquad \le \sum_{\substack{p,q \\ x^{1/5}/2 < p \le q \le x/p}} 1 \le \sum_{x^{1/5}/2 < p \le \sqrt{x}} \pi(x/p) \asymp x/\log x,\end{aligned}$$

d'après le théorème des nombres premiers. Cela permet de compléter les chaînes $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}$ par des chaînes réduites à un élément et ainsi d'achever la démonstration du Lemme 10.

Bibliographie

[1] P. Erdős, R. Freud and N. Hegyvári, *Arithmetical properties of permutations of integers*, Acta Math. Hungar. 41 (1983), 169–176.
[2] M. N. Huxley, *The Distribution of Prime Numbers*, Clarendon Press, Oxford, 1972.
[3] A. D. Pollington, *There is a long path in the divisor graph*, Ars. Combin. 16-B (1983), 303–304.
[4] C. Pomerance, *On the longest simple path in the divisor graph*, Congr. Numer. 40 (1983), 260–268.
[5] E. Saias, *Applications des entiers à diviseurs denses*, prépublication.
[6] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Inst. Élie Cartan 13, Université de Nancy I, 1990.
[7] —, *Sur un problème de crible et ses applications*, 2. *Corrigendum et étude de graphe divisoriel*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 28 (1995), 115–127.

MATHEMATICAL INSTITUTE
HUNGARIAN ACADEMY OF SCIENCES
REÁLTANODA U. 13-15
BUDAPEST, H-1053 HUNGARY

LABORATOIRE DE PROBABILITÉS
UNIVERSITÉ PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU
F-75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Reçu le 2.12.1994 (2706)