ACTA ARITHMETICA
LXXIII.1 (1995)

Heckesche Systeme idealer Zahlen und Knesersche Körpererweiterungen

von

Toma Albu und Florin Nicolae (Bucureşti)

Einleitung. Eine klassische Konstruktion aus der algebraischen Zahlentheorie ist folgende: Zu jedem algebraischen Zahlkörper K kann man ein sogenanntes *System idealer Zahlen* S zuordnen, welches eine Untergruppe der multiplikativen Gruppe $\mathbb{C}^*$ der komplexen Zahlen ist derart, daß die Faktorgruppe S/K^* in kanonischer Weise isomorph zu der Klassengruppe Cl_K von K ist. Diese Konstruktion geht auf Hecke [5] zurück und hat folgende wichtige Eigenschaft, die auch bei dem Hilbertschen Klassenkörper zu K vorkommt: Jedes Ideal von K wird in $K(S)$ ein Hauptideal, wobei $K(S)$ den durch K und S erzeugten Unterkörper von $\mathbb{C}$ bezeichnet. Über den Grad $[K(S):K]$ behauptet Hecke, daß $[K(S):K] = |Cl_K|$ sei; wir konnten aber keinen Beweis dieser Behauptung in der Literatur finden. Der Zweck unserer Arbeit ist einen sehr kurzen und einfachen Beweis der Gleichheit $[K(S):K] = |Cl_K|$ zu geben, mittels eines schönen Satzes von Kneser [7]. Diese Gleichheit gilt allgemeiner für den Quotientenkörper eines Dedekindschen Ringes.

1. Terminologie und Grundbegriffe. In diesem Abschnitt bezeichnet K einen beliebigen Körper, $\overline{K}$ seinen algebraischen Abschluß und für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ ist ζ_n eine primitive n-te Einheitswurzel, d.h. eine Erzeugende der zyklischen Gruppe $\{z \in \overline{K} \mid z^n = 1\}$.

Ist G eine beliebige Gruppe, so schreiben wir $H \leq G$, wenn H eine Untergruppe von G ist. Ist nun M eine Teilmenge von G, so bezeichnen wir mit $\langle M \rangle$ die durch M erzeugte Untergruppe von G. $\mathrm{Ord}(g)$ bezeichnet die Ordnung eines Elementes $g \in G$ und $\mathrm{Exp}(G)$ den Exponenten von G. Für jeden Körper L bezeichnen wir mit L^* die multiplikative Gruppe aller von Null verschiedenen Elemente aus L. Schließlich, werden wir die Kardinalzahl einer Menge X durch $|X|$ bezeichnen.

Der folgende Satz von Kneser ist für unsere Arbeit grundlegend:

Satz 1.1 ([7; Satz]). *Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung und G eine Gruppe mit $K^* \le G \le L^*$ und endlicher Faktorgruppe G/K^*, so daß $L = K(G)$ gilt. Dann und nur dann ist $|G/K^*| = [L : K]$, wenn für ungerade Primzahlen p jede zu G gehörige p-te Einheitswurzel ζ_p schon in K liegt, und wenn ζ_4 in K liegt, falls $1 + \zeta_4$ in G ist.* ■

Der obige Satz führte uns zu der folgenden Definition:

Definition 1.2 ([1; Definition 2.2]). Sei L/K eine Körpererweiterung und G eine Gruppe. Die Erweiterung L/K heißt eine *G-Knesersche Erweiterung*, falls L/K eine endliche Erweiterung ist, mit $K^* \le G \le L^*$, $L = K(G)$ und $|G/K^*| = [L : K]$. Die Erweiterung L/K heißt eine *Knesersche Erweiterung*, falls L/K eine G-Knesersche Erweiterung für eine bestimmte Gruppe G ist. ■

Behauptung 1.3. *Sei L/K eine separable G-Knesersche Erweiterung und H eine Gruppe mit $K^* \le H \le G$. Dann ist die Erweiterung $K(H)/K$ eine H-Knesersche Erweiterung.*

Beweis. Wir wollen beweisen, daß $[K(H) : K] = |H/K^*|$ ist. Dafür wenden wir den Satz 1.1 von Kneser an. Sei p eine ungerade Primzahl mit ζ_p in H. Dann gehört ζ_p auch zu G. Da $K \subseteq K(G)$ eine G-Knesersche Erweiterung ist, folgt aus 1.1, daß ζ_p in K liegt. Nehmen wir an, daß $1 + \zeta_4$ in H liegt. Dann liegt $1 + \zeta_4$ auch in G, und aus 1.1 folgt es wieder, daß ζ_4 in K liegt. Also sind die Bedingungen des Kneserschen Satzes 1.1 für die Erweiterung $K(H)/H$ erfüllt. ■

2. Das Hauptergebnis. Sei K ein algebraischer Zahlkörper, $\mathcal{O}_K$ der Ring aller ganzen Zahlen von K, I_K die Gruppe der gebrochenen Ideale von K, H_K die Gruppe der Hauptideale von K, $Cl_K = I_K/H_K$ die Klassengruppe von K, $h = |Cl_K|$ die Anzahl der Idealklassen. Sei $\mathcal{C}_1, \ldots, \mathcal{C}_s$, $s \ge 1$ eine Basis der Abelschen Gruppe Cl_K: Jede Klasse $\mathcal{C} \in Cl_K$ besitzt eine eindeutige Darstellung

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^{r_1} \ldots \mathcal{C}_s^{r_s},$$

wobei $0 \le r_k < h_k$, h_k die Ordnung der Klasse $\mathcal{C}_k$, $k = 1, \ldots, s$, $h = h_1 \ldots h_s$ ist. Sei, für jedes $k = 1, \ldots, s$, I_k ein ganzes Ideal der Klasse $\mathcal{C}_k$. Dann besitzt jedes gebrochene Ideal $I \in I_K$ eine eindeutige Darstellung

$$I = (a) I_1^{r_1} \ldots I_s^{r_s},$$

$a \in K^*$, $0 \le r_k < h_k$, $k = 1, \ldots, s$, wobei die Exponenten r_k eindeutig bestimmt sind. Wir haben mit (a) das gebrochene Ideal $a\mathcal{O}_K$ bezeichnet.

Wegen $\mathcal{C}_k^{h_k} = 1$ gilt es $I_k^{h_k} = (c_k) \in H_K$ mit Zahlen $c_k \ne 0$ aus K, $k = 1, \ldots, s$, die nur bis auf willkürliche Einheitsfaktoren aus K festliegen.

Wir denken uns die Zahlen c_k fest gewählt und bilden den Zahlkörper

$$(*) \qquad L := K(\gamma_1, \dots, \gamma_s),$$

wobei γ_k eine Wurzel des Polynoms $X^{h_k} - c_k$ über K, also $\gamma_k^{h_k} = c_k$ sei. Die Zuordnung

$$(a)I_1^{r_1} \dots I_s^{r_s} \mapsto \widehat{\gamma_1^{r_1} \dots \gamma_s^{r_s}},$$

$a \in K^*$, $0 \leq r_k < h_k,\ k = 1, \dots, s$, induziert einen Gruppenhomomorphismus

$$(**) \qquad \psi_K : I_K/H_K \to K^*\langle\gamma_1, \dots, \gamma_s\rangle/K^*,$$

wobei $\widehat{\gamma}$ die Klasse des Elementes γ von $K^*\langle\gamma_1, \dots, \gamma_s\rangle$ in der Faktorgruppe $K^*\langle\gamma_1, \dots, \gamma_s\rangle/K^*$ ist. (Siehe auch [8; S. 506].)

Offensichtlich, ist ψ_K surjektiv. Wir zeigen nun, daß tatsächlich ψ_K einen Gruppenisomorphismus ist. Dafür genügt es zu beweisen, daß $r_1 = \dots = r_s = 0$ ist, falls $c := \gamma_1^{r_1} \dots \gamma_s^{r_s} \in K^*$ ist, $0 \leq r_k < h_k,\ k = 1, \dots, s$. In der Tat, betrachten wir das ganze Ideal $I = I_1^{r_1} \dots I_s^{r_s}$. Wegen $I_k^{h_k} = (\gamma_k)^{h_k} = (c_k)$, gilt $(I_k\mathcal{O}_L)^{h_k} = (\gamma_k\mathcal{O}_L)^{h_k}$ für jedes $k = 1, \dots, s$, und es folgt daraus $I_k\mathcal{O}_L = \gamma_k\mathcal{O}_L$, $k = 1, \dots, s$. Folglich ist

$$I\mathcal{O}_L = (\gamma_1^{r_1} \dots \gamma_s^{r_s})\mathcal{O}_L = c\mathcal{O}_L,$$

und so ist

$$I = I\mathcal{O}_L \cap \mathcal{O}_K = c\mathcal{O}_L \cap \mathcal{O}_K = c\mathcal{O}_K.$$

Die Klasse $\mathcal{C}$ von I in Cl_K ist also die Hauptklasse. Da $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^{r_1} \dots \mathcal{C}_s^{r_s}$ ist, folgt es $r_1 = \dots = r_s = 0$, was zu zeigen war.

Aus $(**)$ folgt also unmitellbar folgende Gleichheit:

$$|K^*\langle\gamma_1, \dots, \gamma_s\rangle/K^*| = |I_K/H_K| = h.$$

Aus dem obigen Beweis folgen:

(1) Die Zahlen von $(a)I_1^{r_1} \dots I_s^{r_s}$ mit $a \in K^*$ sind mit denjenigen Zahlen von K identisch, welche durch $a\gamma_1^{r_1} \dots \gamma_s^{r_s}$ teilbar sind (d.h., es ist $a\gamma_1^{r_1} \dots \dots \gamma_s^{r_s}\mathcal{O}_L \cap K = (a)I_1^{r_1} \dots I_s^{r_s}$);

(2) Das Ideal $(a)I_1^{r_1} \dots I_s^{r_s}$ geht in das Hauptideal $(a\gamma_1^{r_1} \dots \gamma_s^{r_s})$ des Körpers $K(a\gamma_1^{r_1} \dots \gamma_s^{r_s})$ über.

Hecke nennt die Gruppe $K^*\langle\gamma_1, \dots, \gamma_s\rangle$ ein *System idealer Zahlen zu K* und behauptet, daß der Grad $[L : K] = h$ sei, ohne einen Beweis zu geben [6; S. 122].

Bezüglich derselben Problematik sagt Hasse: "... *auf die Frage nach der Irreduzibilität der Polynome $X^{h_k} - c_k$ über K wollen wir hier nicht eingehen*" [4; S. 544] und Ribenboim gibt nur die Ungleichung $[L : K] \leq h$ [9; S. 124] an.

Mann kann sowohl die Behauptung von Hecke als auch die Irreduzibilität der Polynome $X^{h_k} - c_k$ über K sehr einfach mittels des Satzes 1.1 von Kneser beweisen:

Satz 2.1. *Mit den obigen Bezeichnungen ist* $[L : K] = h$.

Wir brauchen den folgenden Hilfssatz, der zuerst von Hecke in [5; S. 18] zum Ausdruck gebracht worden ist.

Hilfssatz 2.2. *Sei ε eine Einheit von L, die in $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$ liegt. Dann gehört ε zu K.*

Beweis. Nehmen wir an, daß $\varepsilon = a\gamma_1^{r_1} \ldots \gamma_s^{r_s}$ ist, $a \in K^*$, $0 \le r_k < h_k$, $k = 1, \ldots, s$. Wegen $I_k^{h_k} = (\gamma_k)^{h_k} = (c_k)$ für jedes $k = 1, \ldots, s$, gilt $(I_k\mathcal{O}_L)^{h_k} = (\gamma_k\mathcal{O}_L)^{h_k}$, und es folgt daraus $I_k\mathcal{O}_L = \gamma_k\mathcal{O}_L$, $k = 1, \ldots, s$. Also, hat das Ideal $I = (a)I_1^{r_1} \ldots I_s^{r_s}$ von K die Eigenschaft

$$I\mathcal{O}_L = (a\gamma_1^{r_1} \ldots \gamma_s^{r_s})\mathcal{O}_L = (\varepsilon)\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L.$$

Wir erhalten

$$I = I\mathcal{O}_L \cap K = \mathcal{O}_L \cap K = \mathcal{O}_K = (1).$$

Die Klasse $\mathcal{C}$ von I in Cl_K ist also die Hauptklasse. Da $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1^{r_1} \ldots \mathcal{C}_s^{r_s}$ ist, folgt $r_1 = \ldots = r_s = 0$, und $\varepsilon = a$ ist ein Element von K. ∎

Beweis von Satz 2.1. Wir wollen beweisen, daß

$$[K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) : K] = |K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle / K^*| = h$$

ist. Da $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) = K(K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle)$ ist, reicht es, die Bedingungen des Satzes 1.1 von Kneser zu prüfen. Sei p eine ungerade Primzahl mit ζ_p in $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$. Aus 2.2 folgt es, daß ζ_p in K liegt. Nehmen wir jetzt an, daß $1 + \zeta_4$ in $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$ liegt. Dann liegt auch $(1 + \zeta_4)^2 = 2\zeta_4$ in $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$, so liegt ζ_4 in $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$. Nach 2.2 liegt ζ_4 in K. Die Kneserschen Bedingungen sind also erfüllt. Aus 1.1 folgt es

$$[K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) : K] = |K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle / K^*| = h. \ ∎$$

Folgerung 2.3. *Sei $\mathcal{C}$ eine Idealklasse von K und $\widehat{\gamma}$ das zugeordnete Element in die Gruppe $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle / K^*$ durch den Isomorphismus ψ_K. Sei $m = \mathrm{Ord}(\mathcal{C})$ in Cl_K. Dann ist $[K(\gamma) : K] = m$ und jedes Ideal von $\mathcal{C}$ wird ein Hauptideal in $K(\gamma)$.*

Beweis. In der Tat, ist die Gruppe $K^*\langle\gamma\rangle$ eine Untergruppe von $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$, also erfüllt sie (nach 1.3) auch die Kneserschen Bedingungen, so ist

$$[K(\gamma) : K] = |K^*\langle\gamma\rangle / K^*| = \mathrm{Ord}(\widehat{\gamma}) = \mathrm{Ord}(\mathcal{C}) = m. \ ∎$$

Bemerkung 2.4. Der Körper $L = K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ besitzt zwei Eigenschaften, die auch bei dem Hilbertschen Klassenkörper K_0 zu K vorkommen: Es ist $[L : K] = h$, und jedes Ideal von K wird in L ein Hauptideal. Im allgemeinen sind L und K_0 verschieden, weil L/K im allgemeinen keine Galoissche Erweiterung ist. Die Folgerung 2.3 zeigt, daß jede Idealklasse $\mathcal{C} \in Cl_K$ von der Ordnung m in die Hauptklasse eines Zwischenkörpers von L/K vom Grade m über K übergeht. Die Frage, ob K_0 dieselbe Eigenschaft besitzt, ist von Artin und Furtwängler negativ beantwortet worden. (Siehe [3; S. 173–174].) ∎

SATZ 2.5. *Sei $I \in I_K$ ein Ideal von K und $m = \mathrm{Ord}(\mathcal{C})$, wobei $\mathcal{C}$ die Klasse von I in Cl_K ist. Sei $c \in K^*$ mit $I^m = (c)$. Dann ist das Polynom $X^m - c$ irreduzibel in $K[X]$.*

Beweis. Sei γ eine Wurzel von $X^m - c$. Im Körper $K(\gamma)$ ist $I\mathcal{O}_{K(\gamma)} = \gamma\mathcal{O}_{K(\gamma)}$. Sei ε eine Einheit von $\mathcal{O}_{K(\gamma)}$ mit $\varepsilon \in K^*\langle\gamma\rangle$, $\varepsilon = a\gamma^r$, $a \in K^*$, $0 \leq r < m$. Man erhält $I^r = (I\mathcal{O}_{K(\gamma)})^r \cap K = (\gamma)^r\mathcal{O}_{K(\gamma)} \cap K = (\varepsilon a^{-1})\mathcal{O}_{K(\gamma)} \cap K = (a^{-1})\mathcal{O}_{K(\gamma)} \cap K = (a^{-1})\mathcal{O}_K$. Es folgt $m \,|\, r$, also ist $r = 0$, und $\varepsilon = a$ gehört zu K^*. Wir verfahren nun wie im Beweis von 2.1, um zu zeigen, daß $K(\gamma)/K$ eine $K^*\langle\gamma\rangle$-Knesersche Erweiterung ist. Also ist $[K(\gamma) : K] = |K^*\langle\gamma\rangle/K^*| = \mathrm{Ord}(\widehat{\gamma})$. Sei $n = \mathrm{Ord}(\widehat{\gamma})$. Es folgt $n \,|\, m$. Im Körper K haben wir $I^n = (\gamma^n)$, also ist I^n ein Hauptideal. Es folgt $m \,|\, n$, so ist $m = n$. Also ist $[K(\gamma) : K] = m$, und somit ist der Polynom $X^m - c$ irreduzibel in $K[X]$. ∎

FOLGERUNG 2.6. *Mit den obigen Bezeichnungen gelten die folgenden Aussagen*:

(1) *Für jedes $k = 1, \ldots, s$ sind die Polynome $X^{h_k} - c_k$ irreduzibel über K.*
(2) *Die Körper $K(\gamma_1), \ldots, K(\gamma_s)$ sind linear disjunkt über K.*
(3) *Es gibt einen kanonischen Gruppenisomorphismus*

$$K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle/K^* \simeq \prod_{1 \leq i \leq s} (K^*\langle\gamma_i\rangle/K^*).$$

Beweis. (1) folgt unmittelbar aus 2.5.

(2) Wegen (1), gilt $[K(\gamma_j) : K] = h_j$ für $j = 1, \ldots, s$, und somit ist

$$[K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) : K] = h = h_1 \ldots h_s = [K(\gamma_1) : K] \ldots [K(\gamma_s) : K].$$

Das zeigt, daß die Körper $K(\gamma_1), \ldots, K(\gamma_s)$ linear disjunkt über K sind.

(3) ist klar, wegen des Isomorphismus

$$\psi_K : I_K/H_K \to K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle/K^*. \ ∎$$

Bemerkung 2.7. Wenn γ'_k eine andere Wurzel des Polynoms $X^{h_k} - c_k$, $k = 1, \ldots, s$, ist, kann man zeigen, daß die Körper $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ und $K(\gamma'_1, \ldots, \gamma'_s)$ isomorph über K sind, mittels des Isomorphismus $\gamma_k \mapsto \gamma'_k$, $k = 1, \ldots, s$. ∎

In [1] haben die Authoren die folgende Frage gestellt: Wie könnte man die Zwischenkörper einer G-Kneserschen Erweiterung bestimmen? Für eine

G-Knesersche Erweiterung $L = K(G)$ kommen die folgenden kanonischen Abbildungen α und β vor:

$$\alpha : \mathcal{L} \to \mathcal{G}, \qquad \alpha(E) = E \cap G,$$
$$\beta : \mathcal{G} \to \mathcal{L}, \qquad \beta(H) = K(H),$$

wobei

$$\mathcal{G} = \{H \mid K^* \le H \le G\},$$
$$\mathcal{L} = \{E \mid K \subseteq E,\ E \text{ Unterkörper von } L\},$$

ist. Der günstigste Fall ist jener, wenn α und β inverse Bijektionen sind, und in [1] ist dafür eine notwendige und hinreichende Bedingung formuliert worden.

Satz 2.8 ([1; Theorem 3.7]). *Sei L/K eine separable Erweiterung mit $L = K(G)$, $K^* \le G \le L^*$ und endlicher Faktorgruppe G/K^* vom Exponenten* $n = \operatorname{Exp}(G/K^*)$. *Mit den obigen Bezeichnungen sind die folgenden Behauptungen äquivalent*:

(1) *L/K ist eine G-Knesersche Erweiterung und α und β sind inverse Isomorphismen von Verbänden*;

(2) *L/K ist eine n-reine Erweiterung*, d.h. *für jede Primzahl p oder $p = 4$ mit $p \mid n$ liegt ζ_p in K, falls ζ_p in L ist.* ■

Im Falle einer Galoisschen Erweiterung L/K gibt es einen *Antiisomorphismus* zwischen dem Verband $\mathcal{L} = \{E \mid K \subseteq E, E$ Unterkörper von $L\}$ und dem Verband aller Untergruppen einer kanonischen Gruppe, nämlich, die Galoissche Gruppe $\operatorname{Gal}(L/K)$, die zu L/K zugeordnet ist. Die Erweiterungen aus 2.8 haben eine duale Eigenschaft: Es gibt einen *Isomorphismus* zwischen $\mathcal{L}$ und dem Verband aller Untergruppen der Gruppe G/K^*. Wegen dieser dualen Eigenschaft, nennen wir die Erweiterungen wie in 2.8 *G-kogaloissche Erweiterungen.*

Es entsteht nun die natürliche Frage, ob die oben betrachtete Erweiterung $(*)$ $K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)/K$ eine $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$-kogaloissche Erweiterung ist. Die Antwort ist negativ.

Betrachten wir zum Beispiel den Körper $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-87})$, für den $h = 6$ ist. (Siehe die Tabellen aus [2].) Da $-87 \equiv 1 \pmod 4$ ist, ist $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}\left[\frac{1+\sqrt{-87}}{2}\right]$. Die Primidealzerlegung von 3 in $\mathcal{O}_K$ ist $3\mathcal{O}_K = (3, \sqrt{-87})^2$. Das Primideal $I = (3, \sqrt{-87})$ ist kein Hauptideal. In der Tat, nehmen wir an, daß $I = (\delta)$ ist, mit einer Zahl

$$\delta = a + b\frac{1 + \sqrt{-87}}{2}$$

aus $\mathcal{O}_K$. Wir bezeichnen mit $N = N_{K/\mathbb{Q}}$ die Normabbildung der Erweiterung

$K/\mathbb{Q}$. Es folgt $N(\delta)\,|\,N(3) = 9$ und $N(\delta)\,|\,N(\sqrt{-87}) = 87$, so ist

$$N(\delta) = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + 87\frac{b^2}{4} = a^2 + ab + 22b^2 = 3.$$

Diese Gleichung ist unlösbar im Ring der ganzen rationalen Zahlen: Für $ab \geq 0$ ist das offenbar; wenn $ab < 0$ ist, folgt es $a^2 + b^2 > -ab$ und $21b^2 \geq 21 > 3$, und wir erhalten $a^2 + 22b^2 > 3 - ab$, und so ist $a^2 + ab + 22b^2 > 3$.

Die Klasse $\mathcal{C}_1$ von I in Cl_K hat also die Ordnung 2, und es ist $I^2 = (3) = (-3)$. Wir wählen $\gamma_1 = \sqrt{-3}$ als ideale Zahl für I. Die Gruppe Cl_K ist zyklisch von der Ordnung 6, so gibt es eine Klasse $\mathcal{C}_2$ von der Ordnung 3, und $\{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ ist eine Basis von Cl_K. Sei γ_2 eine ideale Zahl für ein ganzes Ideal von $\mathcal{C}_2$. Die Gruppe $K^*\langle\sqrt{-3}, \gamma_2\rangle$ ist ein System idealer Zahlen zu K. Nach 2.1 ist die Erweiterung L/K mit $L = K(\sqrt{-3}, \gamma_2)$ eine $K^*\langle\sqrt{-3}, \gamma_2\rangle$-Knesersche Erweiterung. Man hat $\mathrm{Exp}(K^*\langle\sqrt{-3}, \gamma_2\rangle/K^*) = 6$, $3\,|\,6$ und $\zeta_3 = (1 + \sqrt{-3})/2$ gehört zu L, so ist die Erweiterung L/K keine 6-reine Erweiterung. Aus 2.8 folgt es, daß L/K keine $K^*\langle\sqrt{-3}, \gamma_2\rangle$-kogaloissche Erweiterung ist.

Jedoch, wenn der Grundkörper K eine reele Einbettung besitzt, können wir die idealen Zahlen $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ derart bilden, daß die Erweiterung L/K mit $L = K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ eine $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$-kogaloissche Erweiterung ist. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß $K \subseteq \mathbb{R}$ ist. In der obigen Konstruktion der idealen Zahlen können wir $c_1 > 0, \ldots, c_s > 0$ wählen. Für γ_k wählen wir die positive reele Wurzel des Polynoms $X^{h_k} - c_k$, $1 \leq k \leq s$. Dann ist $L = K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ ein reeler Körper, der außer 1 und -1 keine Einheitswurzeln mehr enthält, so ist L/K in trivialer Weise eine n-reine Erweiterung für irgendwelche natürliche Zahl n. Nach 2.8 ist L/K eine $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$-kogaloissche Erweiterung.

Gleichfalls, wenn ζ_h in K liegt, dann ist die Erweiterung L/K mit $L = K(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ eine $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$-kogaloissche Erweiterung. (Siehe [1; Theorem 5.2].)

Es sei endlich bemerkt, daß alle oben festgestellten Ergebnisse für Dedekindsche Ringe verallgemeinert werden können:

Sei A ein Dedekindscher Ring mit endlicher Idealklassengruppe Cl_A von der Ordnung h und Quotientenkörper K. Nehmen wir an, daß die Charakteristik von K verschieden von 2 und relativ prim zu h ist. In diesem Falle können wir die am Anfang des Abschnitts 2 durchgeführte Konstruktion *mutatis mutandis* wiederholen, und damit können wir ein *System idealer Elementen* $K^*\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_s\rangle$ *zu* K bilden. Wir erhalten:

Satz 2.9. *Sei A ein Dedekindscher Ring mit endlicher Idealklassengruppe von der Ordnung h und Quotientenkörper K. Wir nehmen an, daß die Charakteristik von K verschieden von* 2 *und relativ prim zu h ist. Dann gelten für A die Behauptungen aus* 2.1, 2.3, 2.5 *und* 2.6. ∎

Literatur

[1] T. Albu and F. Nicolae, *Kneser field extensions with cogalois correspondence*, J. Number Theory 52 (1995), 299–318.
[2] S. I. Borevič und I. R. Šafarevič, *Zahlentheorie*, Birkhäuser, Basel, 1966.
[3] H. Hasse, *Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper*, *Teil II*: *Reziprozitätsgesetz*, Physica-Verlag, Würzburg, 1965.
[4] —, *Zahlentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin, 1963.
[5] E. Hecke, *Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur Verteilung der Primzahlen* (*Zweite Mitteilung*), Math. Z. 4 (1920), 11–51.
[6] —, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Chelsea, New York, 1948.
[7] M. Kneser, *Lineare Abhängigkeit von Wurzeln*, Acta Arith. 26 (1975), 307–308.
[8] J. Neukirch, *Algebraische Zahlentheorie*, Springer, Berlin, 1992.
[9] P. Ribenboim, *Algebraic Numbers*, Wiley, New York, 1972.

Toma Albu
FACULTATEA DE MATEMATICĂ
UNIVERSITATEA BUCUREŞTI
STR. ACADEMIEI 14
RO-70109 BUCUREŞTI 1, ROMANIA
E-mail: TALBU@IMAR.RO

Florin Nicolae
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ
AL ACADEMIEI ROMÂNE
P.O. BOX 1-764
RO-70700 BUCUREŞTI 1, ROMANIA
E-mail: FNICOLAE@IMAR.RO

Eingegangen am 2.12.1994 (2704)