ACTA ARITHMETICA
LXXI.4 (1995)

# Entiers sans grand ni petit facteur premier III

par

Eric Saias (Paris)

## 1. Présentation des résultats

**1.a.** *Le théorème principal.* Soit $\Theta(x,y,z)$ le nombre des entiers $\le x$ et dont tous les facteurs premiers sont dans l'intervalle $]z,y]$. On désigne usuellement par $\Psi$ et $\Phi$ les fonctions de crible $\Psi(x,y)=\Theta(x,y,1)$ et $\Phi(x,z) = \Theta(x,x,z)$.

Dans [10], nous avons appliqué la forme indirecte de la méthode du col ([1]) pour donner un équivalent asymptotique de $\Theta(x,y,z)$ dans l'intersection des domaines

$$(\mathrm{H}_\varepsilon) \qquad x \ge y \ge \exp\{(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}\}$$

et

$$(\mathrm{G}_c) \qquad x \ge y \ge z^{1+c\sqrt{(\log 2\overline{u})/\overline{u}}} \ge 1, \qquad y \ge 2$$

avec

$$\overline{u} = \frac{1}{\log y}\min(\log x, y-z)$$

et où $c$ désigne une constante choisie suffisamment grande. Ici, nous appliquons la forme directe de la méthode du col pour estimer $\Theta(x,y,z)$ dans le domaine $(\mathrm{G}_c)$, de manière analogue à ce qu'ont réalisés Hildebrand et Tenenbaum [7] dans le cas particulier de $\Psi(x,y)$. Nous obtenons ainsi deux types d'information supplémentaire sur $\Theta(x,y,z)$. D'une part, on obtient une estimation explicite de $\Theta(x,y,z)$, valable hors de $(\mathrm{H}_\varepsilon)$. D'autre part, on en déduit un équivalent asymptotique explicite de $\Theta(x,y,z)/\Psi(x,y)$, valable également hors de $(\mathrm{H}_\varepsilon)$, c'est-à-dire dans un domaine où on sait (cf. [6]) que l'on ne peut pas obtenir d'équivalent asymptotique de $\Theta(x,y,z)$ et $\Psi(x,y)$, pris séparément.

([1]) Les expressions forme directe et indirecte de la méthode du col ont été introduites dans [11].

Avant d'aller plus loin, nous sommes amenés à introduire quelques notations.

On désigne par $p$ un nombre premier générique.

Pour tout nombre complexe $s$, on pose

$$\zeta(s,y,z)=\prod_{z<p\le y}(1-p^{-s})^{-1}\quad \text{et}\quad \varphi(s,y,z)=\log\zeta(s,y,z)$$

où on désigne par log la branche principale du logarithme.

Pour $k\ge 1$, on note

$$\varphi_k(s,y,z)=\frac{\partial}{\partial s^k}\varphi(s,y,z).$$

Enfin, on désigne par $\alpha=\alpha(x,y,z)$ le réel défini implicitement par

$$\varphi_1(\alpha,y,z)+\log x=0.$$

Nous donnons maintenant notre principal résultat.

THÉORÈME 1. *Il existe une constante $c>0$ telle que sous la condition* ($\mathrm{G}_c$), *on ait*

$$\Theta(x,y,z)=\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y,z)}}\left(1+O\left(\frac{\log y}{\log x}+(\log^2 y)\frac{\sqrt{y-z}}{y}\right)\right). \tag{1.1}$$

*De plus, sous la condition supplémentaire $y\ge 2z$, on peut remplacer le terme d'erreur $O\big((\log^2 y)\frac{\sqrt{y-z}}{y}\big)$ par $O\big(\frac{\log y}{y}\big)$.*

En spécifiant $z=1$, on retrouve le résultat du Théorème 1 de [7].

On peut, sous les conditions ($\mathrm{G}_c$) et $y<2z$, améliorer le terme d'erreur $O((\log y)^2\sqrt{y-z}\,y^{-1})$. Nous conjecturons en fait que sous la seule condition ($\mathrm{G}_c$), on a comme facteur d'incertitude $1+O\big(\frac{\log y}{\log x}+\frac{\log y}{y-z}\big)$.

**1.b.** *Premier type d'application : estimation explicite de $\Theta(x,y,z)$.* Comme dans [7], on peut donner des équivalents simples des quantités $\alpha=\alpha(x,y,z)$ et $\varphi_2(\alpha,y,z)$. Désignons par (B) un domaine de la forme

$$y\ge y_0,\quad z\ge 1,\quad x\ge y\ge z+z^{7/12} \tag{B}$$

où la constante $y_0\ge 3$ est choisie de telle sorte que sous cette condition (B), il y ait toujours au moins un nombre premier dans l'intervalle $]z,y]$. Le choix d'une telle constante $y_0$ est possible (voir par exemple [5]). Conformément aux notations introduites dans [9] et [10], on pose

$$u=\frac{\log x}{\log y},\quad v=\frac{\log x}{\log z}\quad \text{et}\quad r=\frac{u}{v}=\frac{\log z}{\log y},$$

et on désigne par $\xi_r(u)$ l'unique solution positive $\xi$ de l'équation

$$e^\xi=e^{r\xi}+u\xi. \tag{1.2}$$

Enfin, on pose

$$L_\varepsilon(t) = \exp\{(\log t)^{3/5-\varepsilon}\}.$$

Théorème 2. *Sous la condition* (B), *on a*

$$\alpha(x,y,z) = \frac{\log(1+(y-z)/\log x)}{\log y}\left(1+O\left(\frac{\log\log y}{\log y}\right)\right) \tag{1.3}$$

*et*

$$\varphi_2(\alpha,y,z) = \left(1+\frac{\log x}{y-z}\right)\log x\cdot\log y\left(1+O\left(\frac{1}{\log(1+u)}+\frac{1}{\log y}\right)\right). \tag{1.4}$$

En remplaçant dans le Théorème 1, $\alpha$ et $\varphi_2$ par leurs expressions données au Théorème 2, on obtient immédiatement le résultat suivant.

Corollaire. *Il existe une constante $c>0$ telle que sous la condition* $(\mathrm{G}_c)$ *et pour $y$ et $u$ convergeant vers $+\infty$, on ait*

$$\Theta(x,y,z) \sim \frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)}{\sqrt{2\pi u(1+(\log x)/(y-z))}\,\log(1+(y-z)/\log x)}.$$

Si $\frac{y-z}{\log x}+\frac{\log x}{y-z}$ est suffisamment grand, on peut également remplacer $x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)$ par une quantité plus explicite. En particulier, sous les conditions $(\mathrm{H}_\varepsilon)$ et $(\mathrm{G}_c)$, on peut montrer que l'on obtient ainsi

$$\left(1-\frac{\xi_r(u)}{\log y}\right)\Theta(x,y,z) = x\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sqrt{\frac{\xi_r'(u)}{2\pi}}\exp\left\{\gamma-\int_{1-r}^{u}\xi_r(t)\,dt\right\}$$
$$\times\left(1+O_\varepsilon\left(\frac{\log u}{(\log y)L_\varepsilon(z)}+\frac{1}{u}\right)\right),$$

c'est-à-dire la formule obtenue par la forme indirecte de la méthode du col au Théorème 2(ii) de [10]. Si maintenant $y-z\le\sqrt{\log x}$ on peut aussi estimer asymptotiquement $x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)$, mais dans ce cas, il est plus efficace de rai- sonner directement. En reprenant l'argumentation d'Ennola [3] qui traite le cas particulier de $\Psi(x,y)$, on obtient sans peine le résultat suivant

Théorème 3. *Sous les conditions $x\ge y>z\ge 1$ et $y-z\le\sqrt{\log x}$, on a*

$$\Theta(x,y,z) = \frac{1}{(\pi(y)-\pi(z))!}\prod_{z<p\le y}\frac{\log x}{\log p}\left(1+O\left(\frac{(y-z)^2}{\log x\log y}\right)\right). \tag{1.5}$$

Quand $\frac{y-z}{\log x}+\frac{\log x}{y-z}$ n'est plus suffisamment grand, on ne peut plus espérer obtenir d'équivalent asymptotique simple de $\Theta(x,y,z)$ (voir [6] dans le cas où $z=1$). Néanmoins, on peut déduire du Théorème 1 un équivalent de $\log\Theta(x,y,z)$.

Théorème 4. (i) *Il existe une constante $c > 0$ telle que sous la condition* $(\mathrm{G}_c)$, *on ait*

$$\log \Theta(x,y,z) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log\log x}\right)\right)\left[\frac{\log x}{\log y}\log\left(1+\frac{y-z}{\log x}\right) + \frac{y-z}{\log y}\log\left(1+\frac{\log x}{y-z}\right)\right].$$

(ii) *Il existe une constante $c > 0$ telle que sous les conditions* $\log x \le y - z$ *et* $(\mathrm{G}_c)$, *on ait*

$$\Theta(x,y,z) = \frac{x}{\log z}\exp\left\{-u\left[\log u + \log\left(\log u + \frac{\log y}{\log(y/z)}\right) + O(1)\right]\right\}. \tag{1.6}$$

Le point (i) généralise la formule de de Bruijn (cf. Théorème III.5.2 de [12]) pour $\log \Psi(x,y)$. La formule (1.6) a été démontrée au Théorème 2(i) de [10], mais avec la condition $(\mathrm{H}_\varepsilon)$ à la place de $\log x \le y - z$.

**1.c.** *Deuxième type d'application: estimation asymptotique de la quantité* $\Theta(x,y,z)/\Psi(x,y)$. Il est intéressant de comparer $\Theta(x,y,z)/x$ qui représente la probabilité pour qu'un entier ait tous ses facteurs premiers à la fois inférieurs à $y$ et supérieurs à $z$ avec le produit des probabilités correspondantes, c'est-à-dire $(\Psi(x,y)/x) \times (\Phi(x,z)/x)$. En fait, on sait bien estimer asymptotiquement la quantité $\Phi(x,z)$ dès que $x \ge 2z$ par exemple. Pour $x \ge 2z \ge 4$, on a

$$\Phi(x,z) \asymp \frac{x}{\log z}.$$

Plus précisément, on a pour $x \ge z^{1+\varepsilon}$ et $x \ge 2$,

$$\Phi(x,z) = e^{\gamma}\omega(v)x\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+O_\varepsilon\left(\frac{1}{\log x}\right)\right)$$

où $\gamma$ désigne la constante d'Euler et $\omega(v)$ la fonction de Buchstab (voir [10], §1). On est donc ramené à étudier asymptotiquement la quantité $\Theta(x,y,z)/\Psi(x,y)$.

Notre premier résultat signifie qu'à une constante multiplicative près, la probabilité produit que représente la quantité $\Theta(x,y,z)/x$ est inférieure au produit des probabilités correspondantes.

Théorème 5. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour $x \ge y \ge z \ge 2$, on ait*

$$\Theta(x,y,z) \le c\frac{\Psi(x,y)}{\log z}.$$

En fait, il est probable que l'on ait

$$\frac{\Theta(x,y,z)}{x} \le (1+o(1))\frac{\Psi(x,y)}{x} \times \frac{\Phi(x,z)}{x} \quad \text{dès que } x \to +\infty.$$

Sous la condition supplémentaire $(\log x)/\log z \to +\infty$, on peut donner la condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité ci-dessus soit une égalité.

THÉORÈME 6. *Sous les conditions* $x \ge y \ge z \ge 2$ *et* $(\log x)/\log z \to +\infty$, *on a*

$$\frac{\Theta(x,y,z)}{x} \sim \frac{\Psi(x,y)}{x} \times \frac{\Phi(x,z)}{x}$$

*si et seulement si*

$$\frac{\log z}{\log y}\log\left(\frac{\log x}{\log y}\right) \to 0.$$

Les Théorèmes 5 et 6 reposent sur des estimations de la quantité $\Theta(x,y,z)/\Psi(x,y)$ que nous donnons maintenant. On désigne par $\alpha^*$ le réel $\alpha(x,y,1)$ et on note

$$R = R_\varepsilon(x,y,z) = \frac{\min(1, r\log 2u)}{\overline{u}^{1-2r}\log(2\min(u,z))} + F$$

avec

$$F = \begin{cases} 0 & \text{sous les conditions } (\mathrm{H}_\varepsilon) \text{ et } r\log u \le 1, \\ 1/u & \text{sinon.} \end{cases}$$

THÉORÈME 7. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Sous la condition* $x \ge y \ge z^2 \ge 2$, *on a*

$$\Theta(x,y,z) = \Psi(x,y)\prod_{p\le z}(1-p^{-\alpha^*})(1+O_\varepsilon(R)).$$

En fait, on peut montrer par des calculs plus précis que ceux qui apparaissent dans ce travail que l'on peut supprimer le terme d'erreur $F$.

Sous la condition supplémentaire $(\log 2u)(\log(z+2))^{2/5+\varepsilon} \le \log y$, on a une estimation de $\Theta(x,y,z)/\Psi(x,y)$ qui est plus explicite. On note $\varrho(u)$ la fonction de Dickman (voir [9]) et $\zeta(s)$ la fonction zêta de Riemann.

On désigne par $h$ le réel positif

$$h = -\frac{\varrho'(u)}{\varrho(u)\log y}$$

et on pose

$$(1.7) \qquad E(u,r) = \begin{cases} \dfrac{1}{(\log u)(u\log u)^{1-2r}} & (u \ge 1 - r\log r,\ r\log u \ge 1), \\ r^2/u & (u \ge 1 - r\log r,\ r\log u < 1), \\ r & (u < 1 - r\log r). \end{cases}$$

THÉORÈME 8. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Sous les conditions*

$$x > y \ge z^2 \ge 2 \quad \text{et} \quad (\log 2u)(\log(z+2))^{2/5+\varepsilon} \le \log y,$$

*on a*

$$(1.8)\qquad \Theta(x,y,z)=\Psi(x,y)\prod_{p\le z}\Big(1-\frac1p\Big)\frac{\exp\{-\int_0^{h\log z}[(e^t-1)/t]\,dt\}}{-h\zeta(1-h)}\times\Big(1+O_\varepsilon\Big(E(u,r)+\frac{\log 2u}{(\log y)L_\varepsilon(z)}\Big)\Big).$$

Sous la condition plus restrictive $(\log 2u)\log z\le\log y$, on obtient en particulier que

$$(1.9)\qquad \Theta(x,y,z)=\Psi(x,y)\prod_{p\le z}\Big(1-\frac1p\Big)\Big(1+O\Big(\frac{(\log 2u)\log z}{\log y}\Big)\Big).$$

Ce dernier résultat a été annoncé dans [9] sous l'appellation du Théorème B, puis démontré dans [13].

Rappelons que l'on a ([10] et [8]), sous les conditions ($\mathrm{H}_\varepsilon$) et ($\mathrm{G}_c$),

$$(1.10)\quad \Theta(x,y,z)=\prod_{p\le z}\Big(1-\frac1p\Big)(x\sigma(u,v)+ry)\Big(1+O_\varepsilon\Big(\frac{\log 2u}{\log y}\Big)\Big)$$

et

$$(1.11)\qquad \Psi(x,y)=x\varrho(u)\Big(1+O_\varepsilon\Big(\frac{\log 2u}{\log y}\Big)\Big).$$

En remplaçant, dans (1.8), $\Theta(x,y,z)$ et $\Psi(x,y)$ par leurs approximations données par les formules ci-dessus, on obtient comme analogue analytique de l'estimation arithmétique (1.8) la formule

$$(1.12)\quad \sigma(u,v)=\varrho(u)\exp\Big\{-\gamma-\int_0^{-r\varrho'(u)/\varrho(u)}\frac{e^t-1}{t}\,dt\Big\}(1+O(E(u,r)))$$

valable pour $u\ge1$ et $0\le r\le1/2$.

En fait, nous avons déjà établi (1.12) de manière purement analytique dans [9] (Théorème 2) dans le but précisément d'obtenir les formules (1.8) et (1.9). Nous utilisons effectivement la formule (1.12) dans la démonstration du Théorème 8. Il est à noter cependant que, contrairement à ce que nous avons annoncé dans [9], la démonstration de Tenenbaum [13] montre que l'on peut obtenir (1.9) dans la région $r\log 2u\le1$, sans connaître au préalable le comportement asymptotique de $\sigma(u,v)/\varrho(u)$.

Sous l'hypothèse de Riemann, on peut remplacer dans le Théorème 2 la condition (B) par $y\ge z+z^{1/2+\varepsilon}$, $y\ge y_0(\varepsilon)$ et dans le Théorème 8 la condition $(\log 2u)(\log(z+2))^{2/5+\varepsilon}\le\log y$ par $(\log x)^{2+\varepsilon}\le y$.

De plus, le terme d'erreur $(\log 2u)/((\log y)L_\varepsilon(z))$ dans la formule (1.8) peut alors être remplacé par $(\log 2u)/((\log y)z^{1/2-(\log u)/\log y-\varepsilon/5})$.

Nous profitons de l'occasion pour corriger quelques coquilles qui se sont malencontreusement glissées dans la première partie de ce travail [9]. Dans [9] donc :

- p. 348, l. − 3, il faut lire $\prod_{p\le z}(1-1/p)$ à la place de $\prod_{p\le y}(1-1/p)$,
- p. 350, à la formule (6), il faut lire $d\Omega_r$ à la place de $d\Omega$,
- p. 350, l. − 6, il faut lire $\eta_1$, $\eta_2$ à la place de $\eta_1<\eta_2$,
- p. 354, l. 4, il faut lire "mesure $d\mu$" à la place de "mesure de $d\mu$",
- p. 357, l. − 10, il faut lire $|\int_r^1 e^{\xi t}\,dt|$ à la place de $|\int_r^1 e^{\xi}\,d\xi|$,
- p. 368, l. − 5, il faut lire $\exp\{-I_0(rl(u))\}$ à la place de $\exp\{I_0(rl(u))\}$.

Notons également que dans [9], l'information donnée par le Lemme 6 est insuffisante pour conclure quand on utilise ce lemme par deux fois, page 365 (cela en raison de la dépendance en le paramètre $w$ des quantités $\varphi_{2,0}(u,w)$ et $\varphi_{0,1}(u,w)$). Le plus simple pour rétablir une preuve correcte du Théorème 1, est d'utiliser directement en ces deux occurrences à la place du Lemme 6, la formule de Taylor qui permet de le démontrer.

Dans la suite de ce travail, on désignera par $c_0, c_1, \ldots$ des constantes absolues $>0$. Ainsi par exemple l'énoncé du Lemme 9 signifie : il existe une constante $c_0>0$ telle que sous les conditions (B) et $1+1/\log(y/z)\le|\tau|\le c_0y/\log y$, on ait

$$\sum_{\substack{z<p\le y\\ \|\tau\log p\|\ge c_0X}} 1 \asymp \frac{y-z}{\log x}.$$

Nous remercions Gérald Tenenbaum dont l'apport a été important, tant dans la conception que dans la réalisation de ce travail.

**2. Rappel de quelques résultats sur $\Phi$, $\Psi$ et $\Theta$.** Nous faisons ici la liste des résultats connus sur $\Phi$, $\Psi$ et $\Theta$ dont nous avons besoin dans cet article.

Les fonctions $\varrho(u)$ et $\sigma(u,v)=\sigma_r(u)$ ont été définies dans [9]. On note

$$M(x,y,z)=x\zeta(1,y,z)\int_0^\infty \sigma_r(u-t)y^{-t}\,dt,$$

$$\Lambda(x,y)=\begin{cases} x\int_0^\infty \varrho(u-t)\,d([y^t]/y^t) & (x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}),\\ \frac12(\Lambda(x+0,y)+\Lambda(x-0,y)) & (x\in\mathbb{N})\end{cases}$$

et

$$\Lambda(x,y,z)=\sum_{P^+(d)\le z}\mu(d)\Lambda\Big(\frac{x}{d},y\Big)$$

où $P^+(d)$ désigne le plus grand facteur premier de $d$ et où $\mu(d)$ désigne la fonction de Möbius.

Lemme A. *Pour $x \ge 1$ et $z \ge 2$ on a*

$$\Phi(x,z) - x\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right) \ll \min\left(2^z, \frac{xe^{-v\log(v+1)}+\sqrt{x}}{\log z}\right).$$

Lemme B. *Sous les conditions $x \ge x_0(\varepsilon)$ et $(\mathrm{H}_\varepsilon)$, on a*

$$\Psi(x,y) = \Lambda(x,y)(1+O_\varepsilon(L_\varepsilon^{-1}(y))).$$

Lemme C. *Sous la condition $1+(\log\log y)/\log y \le u \le 3$, on a*

$$\Psi(x,y) = x\left(\varrho(u)+(\gamma-1)\frac{\varrho'(u)}{\log y}\right)\left(1+O\left(\frac{1}{\log^2 y}\right)\right).$$

Lemme D. *Sous la condition $1 \le u \ll 1$, on a*

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)\left(1+O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right).$$

Lemme E. *Sous les conditions $3 \le u \le L_\varepsilon(y)$ et $r\log 2u \le 1$, on a*

$$\Theta(x,y,z) = \Lambda(x,y,z)(1+O_\varepsilon(L_\varepsilon^{-1}(y))).$$

Lemme F. *Sous les conditions $(\mathrm{H}_\varepsilon)$ et $(\mathrm{G}_c)$, on a*

$$\Theta(x,y,z) = M(x,y,z)\left(1+O_\varepsilon\left(\frac{\log 2u}{(\log y)L_\varepsilon(z)}\right)\right).$$

Lemme G. *Sous les conditions $1 \le u \le (\log\log 2y)^2$ et $(\mathrm{G}_c)$, on a*

$$\left(1-\frac{\xi_r(u)}{\log y}\right)\Theta(x,y,z) = x\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sqrt{\frac{\xi_r'(u)}{2\pi}}$$
$$\times\exp\left\{\gamma - \int_{1-r}^{u}\xi_r(t)\,dt\right\}\left(1+O_\varepsilon\left(\frac{\log u}{(\log y)L_\varepsilon(z)}+\frac{1}{u}\right)\right).$$

Lemme H. *Sous les conditions $1-r\log r \le u \le 3$ et $(\mathrm{G}_c)$, on a*

$$\Theta(x,y,z) = e^\gamma\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)x\left(\sigma_r(u)-\frac{\sigma_r'(u)}{\log y}\right)\left(1+O_\varepsilon\left(\frac{1}{(\log y)L_\varepsilon(z)}+r^2\right)\right).$$

Lemme I. *Sous les conditions $1 \le u \ll 1$ et $(\mathrm{G}_c)$, on a*

$$\Theta(x,y,z) = e^\gamma\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right)(x\sigma_r(u)+ry)\left(1+O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right).$$

Montrons le Lemme A. La majoration par $O(2^z)$ résulte du travail de de Bruijn [1]. Il suffit donc de montrer que

$$\Phi(x,z) - x\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right) \ll \frac{xe^{-v\log(v+1)}+\sqrt{x}}{\log z}.$$

Sous la condition ($\mathrm{H}_\varepsilon$), cela résulte du Corollaire 6.7.1 de [12]. Hors de ($\mathrm{H}_\varepsilon$), on a d'après le Théorème 6.1 de [12],

$$\Phi(x,z) - x\prod_{p\le z}\left(1-\frac{1}{p}\right) \ll \Psi(x,z).$$

Or il résulte des Théorèmes 1 et 2 de [7] que

$$\Psi(x,z) \ll \begin{cases} \sqrt{x}/\log x & (z \le (\log x)^{3/2}),\\ x\varrho(v)e^v & (z > (\log x)^{3/2}).\end{cases}$$

Cela permet de conclure.

Le Lemme B constitue le Théorème de [8]. Les Lemmes C et D découlent du Corollaire de [8]. En reprenant la démonstration du Théorème 2 de [4] dans le cas particulier qui nous intéresse, on obtient le Lemme E. Le Lemme F constitue le Théorème 1 de [10]. Le Lemme G découle du Théorème 2(ii) de [10]. Le Lemme H découle du Théorème 1 de [10] et du Théorème 3(ii) de [9]. Enfin, le Lemme I découle du Théorème 2(iii) de [10].

**3. Démonstration du Théorème 2 et estimation de $x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)$ $\times(\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y,z)})^{-1}$.** La démonstration du Théorème 2 repose sur les points (i) et (ii) du Lemme 1 ci-dessous, qui permettent de remplacer, moyennant un terme d'erreur que l'on contrôle, les sommes de la forme $\sum_{z<p\le y} f(p)$ avec $f$ positive par $\int_z^y \frac{f(t)}{\log t}\,dt$.

On désigne par ($\mathrm{V}_\varepsilon$) et (B) les domaines suivants :

($\mathrm{V}_\varepsilon$) $\qquad y \ge y_0, \quad x \ge y \ge z(1+L_\varepsilon(z)^{-1}),$

(B) $\qquad y \ge y_0, \quad x \ge y \ge z + z^{7/12},$

où $y_0$ désigne une constante suffisamment grande pour que dans chacun des deux domaines, il y ait toujours au moins un nombre premier dans l'intervalle $]z,y]$. Enfin, on désigne comme c'est l'usage par $\pi(t)$ le nombre de nombres premiers $\le t$.

Lemme 1. *Soit* $\varepsilon > 0$.

(i) *Sous la condition* ($\mathrm{V}_\varepsilon$), *on a*

$$\pi(y) - \pi(z) = (1 + O_\varepsilon(L_\varepsilon(y)^{-1}))\int_z^y \frac{dt}{\log t}.$$

(ii) *Sous la condition* (B), *on a*

$$\pi(y) - \pi(z) = (1 + O_\varepsilon(1/(\log y)^{4-\varepsilon}))\int_z^y \frac{dt}{\log t}.$$

(iii) *Sous la condition* $y > z + 1 \geq 1$, *on a*

$$\pi(y) - \pi(z) \ll (y-z)/\log(y-z).$$

D é m o n s t r a t i o n. Le point (i) résulte de la forme forte du théorème des nombres premiers (voir Théorème 11.3 de [2]). Le point (ii) résulte du travail de Heath-Brown [5]. Enfin, le point (iii) découle du théorème de Brun–Titchmarsh (voir [12], Théorème I.4.9).

Pour démontrer le Théorème 2, nous reprenons la démarche qui a permis à Hildebrand et Tenenbaum ([7], Théorème 2(i)) d'obtenir les formules (1.3) et (1.4) dans le cas particulier où $z = 1$. La généralisation aux $z$ quelconques ne pose pas de difficultés. C'est pourquoi nous nous contenterons pour l'essentiel de donner les énoncés qui généralisent les lemmes qui jalonnent la démonstration de [7].

Lemme 2. (i) *Soit* $\varepsilon > 0$. *Sous les conditions* (B) *et* $0 < \nu \leq 2$, *on a*

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad & -\varphi_1(\nu,y,z)\\ &= \left(1+O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right)\frac{1}{1-y^{-\nu}}\int_z^y \frac{dt}{t^\nu} + O_\varepsilon\left(\min\left(1, \frac{L_\varepsilon^{-1}(z)}{1-y^{-\nu}}\int_z^y \frac{dt}{t^\nu}\right)\right)\end{aligned}$$

*et*

$$(3.2)\qquad \varphi_2(\nu,y,z) = \left(1+O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right)\frac{1}{(1-y^{-\nu})^2}\int_z^y \frac{\log t}{t^\nu}\,dt + O(1).$$

(ii) *Sous la condition supplémentaire* $\nu \geq \nu_0 > 0$, *on peut remplacer les termes* $O(1/\log y)$ *dans les formules* (3.1) *et* (3.2) *par* $O_{\varepsilon,\nu_0}(1/(\log y)^{4-\varepsilon})$.

(iii) *Sous les conditions* $\nu \geq \nu_0 > 0$ *et* ($\mathrm{V}_\varepsilon$), *on peut remplacer les termes* $O(1/\log y)$ *par* $O_{\varepsilon,v_0}(1/L_\varepsilon(y))$.

Lemme 3. *Pour* $0 \leq r < 1$ *et* $u > 1 - r$, *on a*

$$\xi_r(u) = \log u + \log\left(\log u + \frac{1}{1-r}\right) + O(1).$$

Lemme 4. *Sous la condition* (B), *on a*

$$\alpha(x,y,z) \asymp \frac{y-z}{(\log x)\log y} \qquad \textit{pour } y - z \leq \log x$$

*et*

$$\alpha(x,y,z) \gg 1/\log y \qquad \textit{pour } y - z > \log x.$$

Lemme 5. *Soit* $k \geq 1$. *Sous la condition* (B), *on a*

$$0 < (-1)^k \varphi_k(\alpha,y,z) \asymp_k (u \log y)^k \overline{u}^{1-k}.$$

Les Lemmes 2, 3 et 5 généralisent respectivement les Lemmes 13, 1 et 4 de [7]. Le Lemme 4 généralise les formules (3.3) et (3.4) du Lemme 2 de [7]. Le Lemme 3 résulte des points (iv), (v) et (vi) du Lemme 4 de [9]. Notons au passage que la formule (3.9) de [7] est erronée. Elle doit être remplacée par

$$(-1)^k \phi_k(\alpha, y) = \sum_{p \le y} \frac{(\log p)^k Q_{k-1}(p^\alpha)}{(p^\alpha - 1)^k}.$$

Par conséquent, il faut aussi remplacer dans la suite de la démonstration du Lemme 4 de [7] la quantité $Q_{k-1}(p^\alpha \log p)$ par $(\log p)^{k-1} Q_{k-1}(p^\alpha)$.

On note

$$K_\varepsilon(y,z) = \begin{cases} L_\varepsilon^{-1}(y) & \text{sous la condition } (\mathrm{V}_\varepsilon), \\ (\log y)^{-4+\varepsilon} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour démontrer (1.3), on montre en fait, comme dans [7], que

$$\alpha = \frac{\log\left(1 + \frac{y-z}{\log x}\right)}{\log y} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log y}\right)\right) \tag{3.3}$$

sous les conditions

$$(\mathrm{B}) \quad \text{et} \quad y - z \le (\log x)^2 \tag{3.4}$$

et

$$\alpha = 1 - \frac{\xi_r(u)}{\log y} + O_\varepsilon\left(K_\varepsilon(y,z) + \frac{1}{u(\log y)^2}\right) \tag{3.5}$$

sous les conditions

$$(\mathrm{B}) \quad \text{et} \quad y - z \ge (\log x)^{1+\varepsilon}. \tag{3.6}$$

Pour cela, on introduit la fonction $\alpha_u{=}\alpha(y^u, y, z)$. Les réels $u{=}(\log x)/\log y$ et $r = (\log z)/\log y$ étant donnés, on définit de plus les réels $a$ et $b$ par les équations

$$\alpha_a = \frac{\log\left(1 + \frac{y-z}{\log x}\right)}{\log y} \quad \text{et} \quad \alpha_b = 1 - \frac{\xi_r(u)}{\log y}.$$

On prouve alors comme dans [7] que les estimations $|\alpha_u - \alpha_a| \ll \alpha_a/\log y$ et $|\alpha_u - \alpha_b| \ll_\varepsilon K_\varepsilon(y,z) + 1/(u(\log y)^2)$ sont valables dans les domaines respectifs (3.4) et (3.6).

Pour démontrer (1.4), la méthode consiste à utiliser dans un premier temps la formule (3.2) pour établir que l'on a

$$\varphi_2(\alpha, y, z) = \left(1 + O\left(\frac{1}{\log y} + \frac{1}{\log u}\right)\right) \frac{\log y}{(1 - y^{-\alpha})^2} \int_z^y \frac{dt}{t^\alpha} + O(1),$$

puis à utiliser les estimations de $\alpha$ établies auparavant pour conclure.

Pour démontrer les Théorèmes 1 et 4, nous aurons besoin du résultat suivant où on désigne par $Q$ la quantité

$$Q = \frac{\log x}{\log y} \log\left(1 + \frac{y-z}{\log x}\right) + \frac{y-z}{\log y} \log\left(1 + \frac{\log x}{y-z}\right).$$

Lemme 6. (i) *Sous la condition* (B), *on a*
$$\log\left(\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y,z)}}\right)=Q\left\{1+O\left(\frac{1}{\log y}+\frac{1}{\log\log x}\right)\right\}.$$
(ii) *Sous les conditions* (B) *et* $y-z\ge\log x$, *on a*
$$\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y,z)}}=\frac{x}{\log z}\exp\left\{-u\left[\log u+\log\left(\log u+\frac{\log y}{\log(y/z)}\right)+O(1)\right]\right\}.$$
(iii) *Soit* $\varepsilon>0$. *Sous les conditions* (B) *et* $y-z\ge(\log x)^{1+\varepsilon}$, *on a*
$$\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y,z)}}=x\prod_{p\le z}\left(1-\frac1p\right)\left(\frac{\xi_r'(u)}{2\pi}\right)^{1/2}$$
$$\times\exp\left\{\gamma-\int_{1-r}^{u}\xi_r(t)\,dt+O_\varepsilon\left(\frac{\log 2u}{\log y}+uK_\varepsilon(y,z)\right)\right\}.$$

Pour établir le point (i), on a besoin du résultat auxiliaire suivant où on note
$$\beta=\frac{\log(1+(y-z)/\log x)}{\log y}.$$

Lemme 7. *Sous les conditions* $y-z\le(\log x)^2$ *et* (B), *on a*
$$\int_\beta^1\frac{y^{1-\nu}-z^{1-\nu}}{(1-\nu)(1-y^{-\nu})}\,d\nu=\frac{y-z}{\log y}\log\left(1+\frac{\log x}{y-z}\right)+O\left(\frac{Q}{\log y}\right).$$

Démonstration. Pour $0<\nu<1$ on a
$$0\le\frac{y^{1-\nu}-z^{1-\nu}}{(1-\nu)(1-y^{-\nu})}-(y-z)\frac{y^{-\nu}}{1-y^{-\nu}}\le(y-z)\frac{\nu y^{-\nu}}{(1-\nu)(1-y^{-\nu})}\tag{3.7}$$
et
$$\int_\beta^1\frac{y^{-\nu}}{1-y^{-\nu}}\,d\nu=-\frac{\log(1-y^{-\beta})}{\log y}+\frac{\log(1-y^{-1})}{\log y}$$
$$=\frac{\log(1+(\log x)/(y-z))}{\log y}+O\left(\frac{1}{y\log y}\right);$$
d'où
$$\int_\beta^1\frac{y^{-\nu}}{1-y^{-\nu}}\,d\nu=\frac{\log(1+(\log x)/(y-z))}{\log y}+O\left(\frac{Q}{(y-z)\log y}\right).\tag{3.8}$$

Avec la première inégalité de (3.7), cela établit la partie minoration de l'estimation du lemme.

Pour la majoration, on montre facilement en découpant le domaine d'intégration au réel $1 - 1/\log y$ que

$$\int_{3/4}^{1} \frac{y^{1-\nu} - z^{1-\nu}}{(1-\nu)(1-y^{-\nu})}\, d\nu \ll y^{1/4}.$$

Or sous les conditions (B) et $y - z \le \log^2 x$, on a

$$y^{1/4} \ll \frac{\sqrt{y-z}}{\log^2 y} \ll \frac{y-z}{\log^2 y} \log\left(1 + \frac{\log x}{y-z}\right) \ll \frac{Q}{\log y}.$$

En utilisant la deuxième inégalité de (3.7) pour $\beta < \nu < 3/4$ et (3.8), il suffit donc pour conclure de montrer que

$$H = \int_{\beta}^{3/4} \frac{\nu y^{-\nu}}{(1-\nu)(1-y^{-\nu})}\, d\nu \ll \frac{Q}{(y-z)\log y}.$$

Cela s'établit comme suit.

Si $y - z \ge \log x$, on a

$$H \asymp \int_{\beta}^{3/4} \nu y^{-\nu}\, d\nu \asymp \frac{\beta y^{-\beta}}{\log y} \asymp \frac{1}{y-z} \cdot \frac{\log x}{\log^2 y} \log\left(1 + \frac{y-z}{\log x}\right) \ll \frac{Q}{(y-z)\log y}.$$

Si $y - z < \log x$, on a

$$H \asymp \int_{\frac{\log 2}{\log y}}^{3/4} \nu y^{-\nu}\, d\nu + \frac{1}{\log y} \int_{\beta}^{\frac{\log 2}{\log y}} d\nu \asymp \frac{1}{\log^2 y} \ll \frac{Q}{(y-z)\log y}.$$

D é m o n s t r a t i o n d u L e m m e 6. Notons que d'après (1.2), on a

$$\int_{1-r}^{u} \xi_r(t)\, dt = u\xi_r(u) - \int_{0}^{\xi_r(u)} \frac{e^s - e^{rs}}{s}\, ds. \tag{3.9}$$

Le point (iii) généralise donc le Théorème 2(ii) de [7] et se démontre de manière analogue. On omet les détails.

Supposons $y - z > (\log x)^2$. En utilisant (3.9), le Lemme 3 et le Lemme 5(i) de [9], on obtient

$$\int_{1-r}^{u} \xi_r(t)\, dt = u\left[\log u + \log\left(\log u + \frac{\log y}{\log(y/z)}\right) + O(1)\right].$$

En utilisant de plus le Lemme 4(vii) de [9] pour estimer $\xi_r'(u)$ et la formule de Mertens pour $\prod_{p \le z}(1 - 1/p)$, on voit que le point (ii) découle du point (iii). Un calcul banal montre que cela entraîne également le point (i).

Supposons maintenant que $y-z \le (\log x)^2$. Il découle de la démonstration du Théorème 2 que l'on a

$$\log(\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y,z)}) \ll Q/\log y$$

et

$$\alpha\log x = \beta\log x(1+O(1/\log y)). \tag{3.10}$$

On a par ailleurs

$$\log\zeta(\alpha,y,z) = \log\zeta(1,y,z) - \int_\alpha^1 \varphi_1(\nu,y,z)\,d\nu.$$

Par la formule de Mertens, on voit que $\log\zeta(1,y,z) \ll Q/\log y$. D'autre part, d'après (3.1), on a

$$-\int_\alpha^1 \varphi_1(\nu,y,z)\,d\nu = (1+O(1/\log y))\int_\alpha^1 \frac{y^{1-\nu}-z^{1-\nu}}{(1-\nu)(1-y^{-\nu})}\,d\nu,$$

soit, en utilisant (3.10) et le Lemme 7,

$$-\int_\alpha^1 \varphi_1(\nu,y,z)\,d\nu = (1+O(1/\log y))\frac{y-z}{\log y}\log\left(1+\frac{\log x}{y-z}\right).$$

Il suffit maintenant de réunir ces diverses estimations pour achever la démonstration du point (i). Enfin, un calcul banal permet, à l'aide du point (i), de conclure également la démonstration de (ii).

**4. Démonstration des Théorèmes 1 et 4.** Notons tout d'abord que pour tout $y_0$ fixé, il existe une constante $c>0$ telle que si $x$, $y$ et $z$ vérifient la condition ($\mathrm{G}_c$), ils vérifient aussi $y \ge y_0$, $y \ge z + z^{2/3}$, et donc également la condition (B). Il résulte de cela que le Théorème 4 découle immédiatement de l'association du Théorème 1 et du Lemme 6(i) et (ii). Il reste donc à montrer le Théorème 1, ce à quoi nous allons nous employer maintenant.

Ici encore, on suit la ligne directrice de la démonstration du Théorème 1 de [7]. Toutefois, la généralisation est plus délicate que pour le Théorème 2.

Dans le lemme suivant, si $\alpha = 1$,

$$\frac{y^{1-\alpha}-z^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\log y} \quad \text{signifie} \quad \frac{\log(y/z)}{\log y}.$$

Lemme 8. *Sous la condition* (B), *on a*

$$\frac{y^{1-\alpha}-z^{1-\alpha}}{(1-\alpha)\log y} \asymp \frac{y^{1-\alpha}}{\log y}\min\left(\frac{1}{|1-\alpha|},\log(y/z)\right) \asymp \overline{u}.$$

Démonstration. Le premier ordre de grandeur est banal. Montrons le second. Pour cela, on suppose dans un premier temps que $y-z \le (\log x)^2$.

On a alors, d'après (3.3),

$$\alpha < 2/3 \quad \text{et} \quad y^\alpha \asymp 1 + \frac{y-z}{\log x},$$

d'où

$$A = \frac{y^{1-\alpha}}{\log y} \min\left(\frac{1}{|1-\alpha|}, \log(y/z)\right) \asymp \frac{y-z}{(\log y)\left(1+\frac{y-z}{\log x}\right)} \asymp \overline{u}.$$

Si maintenant $y - z > (\log x)^2$, on utilise (3.5) sous la forme

$$(1-\alpha)\log y = \xi_r(u) + O(1).$$

Cette formule permet de conclure directement si $u + (\log y)/\log(y/z)$ est borné. Si cette dernière quantité est suffisamment grande on a, en utilisant aussi le Lemme 3,

$$A \asymp \frac{e^\xi}{\log y} \min\left(\frac{1}{1-\alpha}, \log(y/z)\right) \asymp u.$$

Dans le lemme suivant, on note $\|t\|$ la distance du réel $t$ au réel de $2\pi\mathbb{Z}$ le plus proche. On note de plus

$$X = \frac{\log(y/(|\tau|\log y))}{\log y}.$$

Lemme 9. *Sous les conditions* (B) *et*

$$1 + \frac{1}{\log(y/z)} \le |\tau| \le \frac{c_0 y}{\log y},$$

*on a*

$$\sum_{\substack{z<p\le y \\ \|\tau\log p\|\ge c_0 X}} 1 \asymp \frac{y-z}{\log y}.$$

Démonstration. La majoration découle du Lemme 1(iii). Il suffit donc de démontrer la minoration. Pour cela, il suffit de traiter le cas où $y \le ez$. En effet, posons $z' = \max(z, y/e)$. On a alors d'une part le fait que les hypothèses $|\tau| \ge 1$ et $|\tau|\log(y/z) \ge 1$ entraînent la relation $|\tau|\log(y/z') \ge 1$, et d'autre part, que $y - z' \asymp y - z$.

Pour tout $p$ tel que $z < p \le y$, on note $\nu_0(p)$ un réel tel que

$$\|\tau\log p\| = |\tau\log(p/\nu_0(p))| \quad \text{et} \quad \tau\log\nu_0(p) \in 2\pi\mathbb{Z}.$$

Comme $|\tau| \ge 1$ et $y \le ez$, on a

$$\log(p/\nu_0(p)) \asymp \frac{p-\nu_0(p)}{y},$$

d'où pour tout $\delta > 0$,

$$p - \nu_0(p) \ge \frac{c_1\delta y}{|\tau|} \Rightarrow \|\tau\log p\| \ge \delta. \tag{4.1}$$

D'après le Lemme 1(iii), on a pour tout $\nu_1$ et $\delta \ge |\tau|/(c_1 y)$,
$$\sum_{|p-\nu_1|<c_1\delta y/|\tau|} 1 \ll \frac{\delta y}{|\tau|\log(\delta y/|\tau|)}$$
et donc aussi
$$\sum_{\substack{z<p\le y\\ |p-\nu_0(p)|<c_1\delta y/|\tau|}} 1 \ll (|\tau|\log(y/z))\frac{\delta y}{|\tau|\log(\delta y/|\tau|)} \asymp \frac{(y-z)\delta}{\log(\delta y/|\tau|)}.$$
Avec $\delta = c_2 X$, on a donc, sous la condition (B) et d'après le Lemme 1(ii),
$$\sum_{\substack{z<p\le y\\ |p-\nu_0(p)|<c_1\delta y/|\tau|}} 1 \le \frac{\pi(y)-\pi(z)}{2}.$$
En choisissant convenablement $c_0$, on a donc, d'après (4.1),
$$\sum_{\substack{z<p\le y\\ \|\tau\log p\|\ge c_0 X}} 1 \ge \frac{\pi(y)-\pi(z)}{2} \asymp \frac{y-z}{\log y},$$
ce qui conclut la démonstration du lemme.

Dans le lemme suivant, on garde les notations employées ici pour $X$ et $\nu_0(p)$.

Lemme 10. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Sous la condition* (B), *on a pour* $s = \alpha + i\tau$ *et* $\tau \in \mathbb{R}$,

(i) *si* $|\tau| \le 1/\log y$,
$$\left|\frac{\zeta(s,y,z)}{\zeta(\alpha,y,z)}\right| \le \exp\left\{-c_3\frac{y-z}{\log y}\log\left(1+\frac{\tau^2\varphi_2(\alpha,y,z)}{(y-z)/\log y}\right)\right\},$$

(ii) *si* $1/\log y < |\tau| \le \exp\{(\log y)^{3/2-\varepsilon}\}$ *et* $y \ge \max(2z, y_0)$ *avec la constante* $y_0$ *choisie suffisamment grande*,
$$\left|\frac{\zeta(s,y,z)}{\zeta(\alpha,y,z)}\right| \le \exp\left\{-c_4(\varepsilon)\frac{\overline{u}\tau^2}{(1-\alpha)^2+\tau^2+(\log(y/z))^{-2}}\right\},$$

(iii) *si* $1/\log y < |\tau| \le c_5 y/\log y$,
$$\left|\frac{\zeta(s,y,z)}{\zeta(\alpha,y,z)}\right| \le \exp\left\{-c_6 X\frac{\overline{u}\tau^2}{(1-\alpha)^2+\tau^2+(\log(y/z))^{-2}}\right\}.$$

Démonstration. Le point (i) se démontre de manière analogue au point (i) du Lemme 8 de [7]. Pour les points (ii) et (iii), on montre comme dans [7] que
$$\left|\frac{\zeta(s,y,z)}{\zeta(\alpha,y,z)}\right| \le e^{-w}$$

avec

$$w = \sum_{z<p\le y} \frac{1-\cos(\tau\log p)}{p^\alpha}.$$

Il suffit donc de minorer convenablement $w$, ce qui se fait dans le cas (ii) en suivant la démarche de [7]. Il reste donc à minorer $w$ dans le cas (iii).

On suppose dans un premier temps que $|\tau|\log(y/z)\le 1$. Si $y\le 2z$, on a

$$\begin{aligned} w &\gg y^{-\alpha}\sum_{z<p\le y}(1-\cos(\tau\log p)) \\ &\gg \tau^2 y^{-2-\alpha}\sum_{z<p\le y}(p-\nu_0(p))^2 \gg \frac{\tau^2}{y^{2+\alpha}}\cdot\frac{(y-z)^3}{\log y} \end{aligned}$$

d'après le Lemme 1(iii), ce qui est convenable d'après le Lemme 8. Si $y>2z$, on a par une sommation d'Abel

$$\begin{aligned} w &\asymp \int_z^y \frac{1-\cos(\tau\log t)}{t^\alpha\log t}\,dt \gg \tau^2\min{}^2\biggl(\log(y/z),\frac{1}{|1-\alpha|}\biggr)\int_z^y\frac{dt}{t^\alpha\log t} \\ &\asymp \frac{\tau^2 y^{1-\alpha}}{\log y}\min{}^3\biggl(\log(y/z),\frac{1}{|1-\alpha|}\biggr) \asymp \tau^2\overline{u}\min{}^2\biggl(\log(y/z),\frac{1}{|1-\alpha|}\biggr) \end{aligned}$$

d'après le Lemme 8.

On suppose maintenant $|\tau|\log(y/z)>1$. Si $|\tau|\le 1$, on estime de nouveau $w$ par une sommation d'Abel :

$$w \asymp \int_z^y \frac{1-\cos(\tau\log t)}{t^\alpha\log t}\,dt \asymp \overline{u}\tau^2\min{}^2\biggl(\log(y/z),\frac{1}{|1-\alpha|},\frac{1}{|\tau|}\biggr)$$

d'après le Lemme 8. Si $|\tau|>1$, en utilisant le Lemme 9 on a

$$w \gg \frac{1}{\log y}\int_z^y\frac{dt}{t^\alpha} \asymp \overline{u}$$

d'après le Lemme 8. Cela permet de conclure la démonstration du Lemme 10.

On désigne dorénavant par $P^-(n)$ et $P^+(n)$ respectivement le plus petit et le plus grand facteur premier de $n$.

Lemme 11. *Sous les conditions* $[1\le t\le \exp\{(\log y)^{3/2-\varepsilon}\}$ *et* $y\ge 2z]$ *ou* $[(\mathrm{B})$ *et* $1\le t\le c_7 y/(\log y)^{3/2}]$, *on a*

$$\begin{aligned} &\Theta\Bigl(x+\frac{x}{t},y,z\Bigr)-\Theta\Bigl(x-\frac{x}{t},y,z\Bigr) \\ &\qquad\ll_\varepsilon x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)\biggl(\frac{1}{t}+\exp\biggl\{-c_8\Bigl(\frac{y}{y-z}\Bigr)^2\overline{u}\biggr\}\biggr). \end{aligned}$$

Démonstration. La démonstration est analogue à celle du Lemme 9 de [7]. On a

$$\Theta\Big(x+\frac{x}{t},y,z\Big)-\Theta\Big(x-\frac{x}{t},y,z\Big) \ll \sum_{z<P^-(n)\le P^+(n)\le y} \exp\bigg\{-\frac12\Big(t\log\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big)^2\bigg\}$$

et on majore la somme en exprimant $e^{-v^2/2}$ comme une intégrale

$$e^{-v^2/2}=\frac{e^{\kappa^2/2-\kappa v}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\{-\tau^2/2+i\tau(\kappa-v)\}\,d\tau,\qquad (\kappa,v)\in\mathbb{R}^2.$$

En choisissant $\kappa=\alpha/t$, on obtient

$$\Theta\Big(x+\frac{x}{t},y,z\Big)-\Theta\Big(x-\frac{x}{t},y,z\Big)\ll\frac{x^\alpha}{t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\tau^2/(2t^2)}|\zeta(\alpha+i\tau,y,z)|\,d\tau$$

et on utilise le Lemme 10 pour majorer l'intégrale.

Comme dans [7], les deux lemmes suivants constituent le coeur de la démonstration du Théorème 1.

Lemme 12. *Soit* $\varepsilon$, $0<\varepsilon<1$ *fixé. Sous la condition* (B), *on a*

$$\Theta(x,y,z)=\Big(1+O_\varepsilon\Big(\frac1T\Big)\Big)\frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y}\zeta(s,y,z)x^s\,\frac{ds}{s} + O_\varepsilon\Big(\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)\log T}{T}\Big)\tag{4.2}$$

*avec*

$$T=\begin{cases}[\exp\{-(\log y)^{3/2-\varepsilon}\}+\exp\{-c_9u(\log 2u)^{-2}\}]^{-1} & (y\ge 2z),\\ \bigg[c_{10}\frac{(\log y)^{3/2}}{y}+(\log 2\overline{u})\exp\bigg\{-c_{11}\frac{\overline{u}}{\big(\log 2\overline{u}+\frac{\log y}{\log(y/z)}\big)^2}\bigg\}\bigg]^{-1} & (y<2z).\end{cases}\tag{4.3}$$

Lemme 13. *Sous la condition* (B), *on a*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-i/\log y}^{\alpha+i/\log y}\zeta(s,y,z)x^s\,\frac{ds}{s}=\frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha,y,z)}}(1+O(1/\overline{u})).\tag{4.4}$$

Démonstration. Le Lemme 13 se démontre comme le Lemme 11 de [7]. Nous omettons les détails.

Montrons maintenant le Lemme 12.

D'après le Théorème II.2.2 de [12], on a pour $T \geq 1$,

$$\Theta(x,y,z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-iT}^{\alpha+iT} \zeta(s,y,z)x^s \frac{ds}{s} + O\Big(x^\alpha \sum_{z<P^-(n)\leq P^+(n)\leq y} \frac{1}{n^\alpha(1+T/|\log(x/n)|)}\Big). \tag{4.5}$$

On choisit $T$ selon la formule (4.3). On a

$$x^\alpha \sum_{\substack{z<P^-(n)\leq P^+(n)\leq y\\ |\log(x/n)|\leq T^{-1}}} n^{-\alpha} \ll \Theta\Big(x+\frac{c_{12}x}{T},y,z\Big) - \Theta\Big(x-\frac{c_{12}x}{T},y,z\Big) \ll \frac{x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)}{T}$$

d'après le Lemme 11.

Par une sommation d'Abel, on a

$$\begin{aligned} x^\alpha &\sum_{\substack{z<P^-(n)\leq P^+(n)\leq y\\ T^{-1}<|\log(x/n)|\leq \log 2}} \frac{1}{n^\alpha|\log(x/n)|} \\ &\ll \Big(\frac{1}{2}\Big)^\alpha \Theta(3x/2,y,z) - 2^\alpha\Theta(x/2,y,z) \\ &\quad + T(e^{\alpha/T}\Theta(xe^{-1/T},y,z) - e^{-\alpha/T}\Theta(xe^{1/T},y,z)) \\ &\quad + x^\alpha\Big(\int_{[x/2,xe^{-1/T}]\cup[xe^{1/T},2x]} \frac{(1+\alpha\log(t/x))\Theta(t,y,z)}{t^{1+\alpha}(\log(t/x))^2}\,dt\Big). \end{aligned}$$

Par le Lemme 11, les termes tout intégrés sont $\ll_\varepsilon \Theta(x,y,z) + x^\alpha\zeta(\alpha,y,z)$. Quant à l'autre terme, il est

$$\begin{aligned} \int_{e^{1/T}}^{2} &\Big[\frac{(1+\alpha\log t)\Theta(tx,y,z)}{t^{1+\alpha}} - \frac{(1-\alpha\log t)\Theta(x/t,y,z)}{t^{1-\alpha}}\Big]\frac{dt}{\log^2 t} \\ &= \int_{e^{1/T}}^{2} \frac{(1-\log t)(\Theta(tx,y,z)-\Theta(x/t,y,z))}{\log^2 t}\,dt \\ &\quad + O\Big(\int_{e^{1/T}}^{2} (\Theta(tx,y,z)-\Theta(x/t,y,z))\,dt\Big). \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 11, cette dernière quantité est

$$\ll x^\alpha \zeta(\alpha, y, z) \int\limits_{e^{1/T}}^{2} \frac{dt}{t-1} + \Theta(x, y, z)$$
$$\ll x^\alpha \zeta(\alpha, y, z) \log T + \Theta(x, y, z).$$

Enfin

$$x^\alpha \sum_{\substack{z<P^-(n)\le P^+(n)\le y \\ |\log(x/n)|\ge \log 2}} \frac{1}{n^\alpha |\log(x/n)|} \ll x^\alpha \zeta(\alpha, y, z).$$

On a donc montré que

$$x^\alpha \sum_{z<P^-(n)\le P^+(n)\le y} \frac{1}{n^\alpha (1+T|\log(x/n)|)} \ll \frac{1}{T}(\Theta(x, y, z) + (\log T) x^\alpha \zeta(\alpha, y, z)),$$

ce qui est convenable. Pour achever la démonstration du Lemme 12, il suffit de montrer que la contribution à l'intégrale de (4.5) du domaine $1/\log y \le |\mathrm{Im}\, s| \le T$ est $\ll x^\alpha \zeta(\alpha, y, z)/T$, ce qui se fait comme dans [7] en utilisant le Lemme 10.

Fin de la démonstration du Théorème 1. Rappelons que, comme on l'a remarqué au début de ce paragraphe, si $c$ est choisi suffisamment grand, le domaine $(\mathrm{G}_c)$ est inclus dans le domaine (B). Si $u < (\log\log 2y)^2$, le résultat découle donc du Lemme G et du Lemme 6(iii).

Si

$$u \ge (\log\log 2y)^2, \tag{4.6}$$

le Théorème 1 découle de la combinaison des Lemmes 12 et 13.

Il faut juste vérifier que les termes d'erreur engendrés par les formules (4.2) et (4.4) sont absorbés par celui du Théorème 1. Cela est une conséquence de la définition de $T$ et des majorations suivantes. D'après le Théorème 2, on a

$$\alpha\sqrt{\varphi_2(\alpha, y, z)} \ll \min(\sqrt{u}\log y, \sqrt{(y-z)/\log y}).$$

Sous la condition $(\mathrm{G}_c)$, on a

$$(\log 2\overline{u}) \exp\left\{ - c_{11} \frac{\overline{u}}{\left(\log 2\overline{u} + \frac{\log y}{\log(y/z)}\right)^2} \right\} \le \frac{1}{\overline{u}}.$$

Sous la condition (4.6), on a

$$\exp\{-c_9 u (\log 2u)^{-2}\} \ll 1/\overline{u}.$$

Enfin on a $1/\overline{u} \ll (\log y)/y$ si $y \ge 2z$ et

$$\frac{1}{\overline{u}} \ll (\log^2 y) \frac{\sqrt{y-z}}{y} \quad \text{sous } (\mathrm{G}_c).$$

## 5. Démonstration des Théorèmes 5, 6, 7 et 8

**5.a.** *Lemmes préliminaires.* On rappelle que l'on note $\alpha$ et $\alpha^*$ les réels positifs définis implicitement par

$$\sum_{z<p\le y}\frac{\log p}{p^\alpha-1}=\sum_{p\le y}\frac{\log p}{p^{\alpha^*}-1}=\log x. \tag{5.1}$$

On remarque que l'on a donc $0<\alpha\le\alpha^*$.

Lemme 14. *Sous la condition* $(1-r)\log 2\overline{u}\ge 1$, *on a*

(i) $$\alpha^*-\alpha\asymp\frac{(e^{r\xi_0(\bar u)}-1)(1+\alpha^*\log z)}{(\log x)(\log z)(1+\alpha^*\log 2\overline{u})},$$

(ii) $$\varphi_2(\alpha^*,y,1)=\varphi_2(\alpha,y,z)\bigg(1+O\bigg(\frac{(\alpha^*-\alpha)\log x}{\overline{u}}\bigg)\bigg),$$

(iii) $$\log\left(x^{\alpha^*-\alpha}\frac{\zeta(\alpha^*,y,z)}{\zeta(\alpha,y,z)}\right)\ll\frac{((\alpha^*-\alpha)\log x)^2}{\overline{u}}.$$

D é m o n s t r a t i o n. Remarquons tout d'abord que d'après le Lemme 4, on a

$$\alpha^*\asymp\frac{y}{(\log x)\log y}\qquad((1-r)\log 2\overline{u}\ge 1,\ y-z\le\log x), \tag{5.2}$$

$$\alpha^*\gg 1/\log y\qquad((1-r)\log 2\overline{u}\ge 1,\ y-z>\log x). \tag{5.3}$$

Montrons (i). On suppose dans un premier temps que $y-z\le\log x$. D'après (5.1), on a

$$\sum_{p\le y}\frac{p^\alpha(p^{\alpha^*-\alpha}-1)\log p}{(p^\alpha-1)(p^{\alpha^*}-1)}=\sum_{p\le z}\frac{\log p}{p^\alpha-1},$$

ce qui entraîne avec (5.2),

$$\frac{\alpha^*-\alpha}{\alpha\alpha^*}\pi(y)\asymp\frac{\pi(z)}{\alpha}.$$

En réutilisant (5.2) et le théorème des nombres premiers, on en déduit que

$$\alpha^*-\alpha\asymp\frac{z}{(\log x)\log z}\qquad((1-r)\log 2\overline{u}\ge 1,\ y-z\le\log x), \tag{5.4}$$

ce qui est équivalent à l'assertion souhaitée d'après le Lemme 3. Supposons maintenant $y-z>\log x$. On a, d'après le Lemme 3,

$$\xi_r(u)=\xi_0(u)+O(1)\qquad((1-r)\log 2u\ge 1). \tag{5.5}$$

Donc en comparant les formules (3.3) et (3.5) pour $z$ quelconque et $z=1$, on obtient

$$\alpha^*\asymp\alpha\quad\text{et}\quad(\alpha^*-\alpha)\log y\ll 1. \tag{5.6}$$

En appliquant le Lemme 5 avec $z = 1$, on en déduit que

$$\begin{aligned}(\alpha^* - \alpha)(\log x)\log y &\asymp (\alpha^* - \alpha)\varphi_2(\alpha^*, y, 1) = (\alpha^* - \alpha)\sum_{p\le y}\frac{p^{\alpha^*}\log^2 p}{(p^{\alpha^*}-1)^2}\\ &\asymp (\alpha^* - \alpha)\sum_{p\le y}\frac{p^{\alpha}\log^2 p}{(p^{\alpha^*}-1)(p^{\alpha}-1)}\\ &\asymp \sum_{p\le y}\frac{p^{\alpha}(p^{\alpha^*-\alpha}-1)\log p}{(p^{\alpha^*}-1)(p^{\alpha}-1)} = -\varphi_1(\alpha, z, 1).\end{aligned}$$

D'après (5.6) et la formule (3.5) de [7], on a

$$(1-\alpha)\log y = (1-\alpha^*)\log y + O(1) = \xi_0(u) + O(1) \qquad ((1-r)\log 2u \ge 1,\ y - z > \log x). \tag{5.7}$$

On en déduit donc en utilisant d'abord le Lemme 2,

$$\begin{aligned}\alpha^* - \alpha &\asymp \frac{-\varphi_1(\alpha, z, 1)}{(\log x)\log y} \asymp \frac{z^{1-\alpha}-1}{(1-\alpha)(1-z^{-\alpha})(\log x)\log y}\\ &\asymp \frac{e^{r\xi_0(u)}-1}{(\log 2u)(\log x)(1-z^{-\alpha})}.\end{aligned}$$

Les formules (5.3) et (5.6) permettent maintenant de conclure la démonstration du point (i).

Montrons (ii). On écrit $\varphi_2(\alpha^*, y, 1) - \varphi_2(\alpha, y, z)$ sous la forme

$$\varphi_2(\alpha^*, y, 1) - \varphi_2(\alpha, y, z) = \varphi_2(\alpha^*, y, z) - \varphi_2(\alpha, y, z) + \varphi_2(\alpha, z, 1)$$

avec

$$\begin{aligned}\varphi_2(\alpha^*, y, z) - \varphi_2(\alpha, y, z) &\ll (\alpha^* - \alpha)\max_{t\in[\alpha^*,\alpha]}\varphi_3(t, y, z)\\ &\ll \frac{(\alpha^* - \alpha)\log x}{\overline{u}}\varphi_2(\alpha, y, z)\end{aligned}$$

d'après le Lemme 5, et d'après le Lemme 2

$$\varphi_2(\alpha, z, 1) \asymp \frac{(\log z)(z^{1-\alpha^*}-1)}{(1-\alpha^*)(1-z^{-\alpha^*})^2} = H.$$

Il reste à majorer convenablement $H$.

Si $y - z \le \log x$, on a d'après (5.2), (5.4) et le Lemme 5,

$$\begin{aligned}H &\asymp \frac{z}{\alpha^{*2}\log z} \asymp \frac{z(\log x)^2\log^2 y}{y^2\log z} \asymp (\alpha^* - \alpha)\frac{\log^3 x}{\overline{u}^2}\\ &\asymp \frac{(\alpha^* - \alpha)\log x}{\overline{u}}\varphi_2(\alpha, y, z).\end{aligned}$$

On suppose maintenant $y - z > \log x$. Si $\alpha^* \le 1/\log z$, on a encore

$$H \asymp \frac{z}{\alpha^{*2}\log z} \ll \frac{z\log y}{\alpha^*\log z} \qquad \text{d'après (5.3).}$$

En utilisant l'hypothèse $\alpha^* \le 1/\log z$, (5.7) et le point (i), on en déduit que

$$H \ll (\alpha^* - \alpha)\frac{\log^3 x}{\overline{u}^2}.$$

Si au contraire $\alpha^* > 1/\log z$, on a, toujours avec (5.7) et le point (i),

$$H \asymp \frac{(e^{r\xi_0(u)} - 1)(\log y)\log z}{\log 2u} \ll \frac{(\alpha^* - \alpha)\log^3 x}{\overline{u}^2}.$$

On conclut en remarquant que d'après le Lemme 5

$$\frac{(\alpha^* - \alpha)\log^3 x}{\overline{u}^2} \asymp \frac{(\alpha^* - \alpha)\log x}{\overline{u}}\varphi_2(\alpha, y, z).$$

Montrons (iii). On a $(\alpha^* - \alpha)\log y \ll 1$ d'après (i). D'où

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{\zeta(\alpha, y, z)}{\zeta(\alpha^*, y, z)}\right) &= \sum_{z<p\le y}\log\left(1 - \frac{p^{\alpha-\alpha^*} - 1}{p^\alpha - 1}\right)\\
&= (\alpha^* - \alpha)\sum_{z<p\le y}\frac{\log p}{p^\alpha - 1}\\
&\qquad + O((\alpha^* - \alpha)^2)\sum_{p\le y}(\log^2 p)\left(\frac{1}{p^\alpha - 1} + \frac{1}{(p^\alpha - 1)^2}\right)\\
&= (\alpha^* - \alpha)\log x + O(\varphi_2(\alpha, y, 1)(\alpha^* - \alpha)^2)\\
&= (\alpha^* - \alpha)\log x + O(\varphi_2(\alpha^*, y, 1)(\alpha^* - \alpha)^2)
\end{aligned}$$

et on conclut avec le Lemme 5. Cela achève la démonstration du Lemme 14.

Lemme 15. *Soit $\varepsilon > 0$. Sous les conditions $x \ge y > z \ge 1$ et $(\log 2u) \times (\log(z+2))^{2/5+\varepsilon} \le \log 2y$, on a*

$$\begin{aligned}
\prod_{p\le z}(1 - p^{-\alpha^*}) &= \prod_{p\le z}(1 - p^{-1})\left[\frac{\exp\left\{-\int_0^{r\xi_0(u)}\frac{e^t-1}{t}\,dt\right\}}{-\frac{\xi_0(u)}{\log y}\zeta\left(1 - \frac{\xi_0(u)}{\log y}\right)}\right]\\
&\qquad\times\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log 2u}{L_\varepsilon(z)\cdot\log y} + \frac{e^{r\xi_0(u)} - 1}{\log x\cdot\xi_0(u)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Démonstration. On suppose dans un premier temps $z \ge z_0(\varepsilon)$ où $z_0(\varepsilon)$ est une constante choisie suffisamment grande. On a alors, d'après le Lemme 3(ii) de [10],

$$\frac{\prod_{p\le z}(1 - p^{-\alpha^*})}{\prod_{p\le z}(1 - p^{-1})} = \frac{\exp\left\{-\int_0^{(1-\alpha^*)\log z}\frac{e^t-1}{t}\,dt\right\}}{(\alpha^* - 1)\zeta(\alpha^*)}\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{1-\alpha^*}{L_\varepsilon(z)}\right)\right).$$

La formule

$$\alpha^* = 1 - \frac{\xi_0(u)}{\log y} + O_\varepsilon\biggl(\frac{1}{L_\varepsilon(y)} + \frac{1}{(\log x)\log y}\biggr)$$

qui est un cas particulier de (3.5), permet alors de conclure. Si $z \le z_0(\varepsilon)$, comme $u \le y^{99/100}$, on a $\alpha^* \gg 1$. On en déduit que

$$\frac{\prod_{p\le z}(1-p^{-\alpha^*})}{\prod_{p\le z}(1-p^{-1})} = \exp\biggl\{-\int_{\alpha^*}^{1}\sum_{p\le z}\frac{\log p}{p^\nu - 1}\,d\nu\biggr\} = 1 + O_\varepsilon\biggl(\frac{\log 2u}{\log y}\biggr)$$

ce qui entraîne l'estimation annoncée.

On pose

$$J(s) = \frac{s\zeta(s+1)}{s+1}.$$

On rappelle que l'on note

$$h = -\frac{\varrho'(u)}{\varrho(u)\log y}$$

et que $E(u,r)$ désigne la quantité définie par (1.7).

Lemme 16. (i) *Sous les conditions* $x \ge y > z \ge 3/2$, $u \ge 3$ *et* $r\log 2u \le 1$, *on a*

$$\Lambda(x,y,z) = x\varrho(u)\biggl[J(-h)\prod_{p\le z}\biggl(1 - \frac{1}{p^{1-h}}\biggr) + O\biggl(\frac{\log z}{(\log x)\log y}\biggr)\biggr].$$

(ii) *Sous les conditions* $1 \le \min(u,z) \le \max(u,z) \le \sqrt{y}$, *on a*

$$M(x,y,z) = x\varrho(u)\prod_{p\le z}\biggl(1-\frac{1}{p}\biggr)\frac{\exp\{-\int_0^{h\log z}[(e^t-1)/t]\,dt\}}{1-h}(1+O(E(u,r))).$$

Démonstration. Pour montrer (i), on remarque dans un premier temps que l'on a l'identité

$$J(s)\prod_{p\le z}\biggl(1-\frac{1}{p^{s+1}}\biggr) = \int_0^\infty t^{-s}\,d\biggl(\frac{\Phi(t,z)}{t}\biggr) \qquad (\operatorname{Re} s > -1). \tag{5.8}$$

Montrons (5.8). En utilisant le Lemme A, on démontre en intégrant par parties l'intégrale ci-dessus qu'elle converge pour $\operatorname{Re} s > -1$. De plus, il est clair que le membre de gauche de (5.8) est défini dans la même région. On a pour $\operatorname{Re} s > 0$,

$$\zeta(s+1)\prod_{p\le z}\biggl(1-\frac{1}{p^{s+1}}\biggr) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(t,z)}{t^{s+1}} = (s+1)\int_0^\infty \frac{\Phi(t,z)}{t^{s+2}}\,dt.$$

Il suit

$$\int_0^\infty t^{-s}\, d\biggl(\frac{\Phi(t,z)}{t}\biggr) = \int_0^\infty \frac{d\Phi(t,z)}{t^{s+1}} - \int_0^\infty \frac{\Phi(t,z)}{t^{s+2}}\, dt = J(s)\prod_{p\le z}\biggl(1-\frac{1}{p^{s+1}}\biggr).$$

On en déduit (5.8) par prolongement analytique.

D'après (5.8), on a

$$\begin{aligned}(5.9)\qquad & \frac{\Lambda(x,y,z)}{x} - \varrho(u)J(-h)\prod_{p\le z}\biggl(1-\frac{1}{p^{1-h}}\biggr)\\ &= \int_{0^-}^\infty \bigl(\varrho(u-t)-\varrho(u)e^{-t\varrho'(u)/\varrho(u)}\bigr)\, d\biggl(\frac{\Phi(y^t,z)-y^t\prod_{p\le z}(1-1/p)}{y^t}\biggr)\\ (5.10)\qquad &= \int_{0^-}^\infty \bigl(\varrho'(u-t)-\varrho'(u)e^{-t\varrho'(u)/\varrho(u)}\bigr)\biggl(\Phi(y^t,z)-y^t\prod_{p\le z}\biggl(1-\frac{1}{p}\biggr)\biggr)\frac{dt}{y^t}\\ &\qquad + \frac{\Phi(x,z)}{x} - \prod_{p\le z}\biggl(1-\frac{1}{p}\biggr).\end{aligned}$$

D'après la formule (3.5) et le Lemme 8(i) de [9], pour $u\ge 3$ et $t\ge 0$ on a

$$\varrho'(u-t) = \varrho'(u)e^{-t\varrho''(u)/\varrho'(u)}\biggl(1+O\biggl(\frac{t^2}{u}+\biggl(\frac{t^2}{u}\biggr)^2\biggr)\biggr)$$

avec

$$\frac{\varrho''(u)}{\varrho'(u)} = \frac{\varrho'(u)}{\varrho(u)} + O\biggl(\frac{1}{u}\biggr).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}(5.11)\qquad & \varrho'(u-t)\\ &= \varrho'(u)e^{-t\varrho'(u)/\varrho(u)}\biggl(1+O\biggl(\frac{t+t^2}{u}+\biggl(\frac{t^2}{u}\biggr)^2\biggr)\biggr)\qquad (u\ge 3,\ t\ge 0).\end{aligned}$$

Par ailleurs, d'après le Lemme A on a

$$(5.12)\qquad \Phi(x,z) - x\prod_{p\le z}\biggl(1-\frac{1}{p}\biggr) \ll \frac{xe^{-v\log(v+1)}+\sqrt{x}}{\log z}\qquad (x\ge 1,\ z\ge 2).$$

On obtient finalement la majoration de (5.9) requise au point (i), en majorant (5.10) à l'aide de (5.11) et (5.12).

Montrons (ii). Si $x$ reste borné, le résultat est trivial. On suppose donc dorénavant que $x$ est suffisamment grand. D'après le Théorème 3(iii) de [9] on a alors, sous les conditions $3\le u\le\sqrt{y}$ et $(\mathrm{G}_c)$,

$$M(x,y,z) = x\zeta(1,y,z)\frac{\sigma_r(u)}{\log y+\sigma_r'(u)/\sigma_r(u)}\biggl(1+O\biggl(\frac{1}{(\log x)\log y}\biggr)\biggr)$$

avec

$$\sigma_r(u) = \sigma(u, u/r).$$

En utilisant le Théorème 2 de [9] on a

(5.13)

$$\sigma_r(u) = \varrho(u)\exp\Big\{-\gamma - \int_0^{h\log z}\frac{e^t-1}{t}\,dt\Big\}(1+O(E(u,r))) \qquad (y \ge z^2),$$

et

$$\log y + \sigma_r'(u)/\sigma_r(u) = (1-h)(\log y)(1+O(E(u,r))).$$

Enfin, par la formule de Mertens, on a

$$\zeta(1,y,z) = \bigg(1+O\bigg(\frac{1}{\log^2 y}\bigg)\bigg)e^{\gamma}\prod_{p\le z}\bigg(1-\frac{1}{p}\bigg),$$

ce qui permet de conclure la démonstration du point (ii).

**5.b.** Démonstration du Théorème 7. On distingue trois cas.

Si $u < 3$, d'après le Lemme I et le Lemme D on a

$$\Theta(x,y,z) = e^{\gamma}x\sigma(u,v)\prod_{p\le z}\bigg(1-\frac{1}{p}\bigg)(1+O(r))$$

et

$$\Psi(x,y) = x\varrho(u)(1+O(r)).$$

Le Lemme 15 et la formule (5.13) permettent alors de conclure.

Supposons maintenant que $3 \le u \le L_\varepsilon(y)$ et $r\log 2u \le 1$. On a alors, d'après le Lemme B et le Lemme E,

$$\Psi(x,y) = \Lambda(x,y,3/2)(1+O_\varepsilon(L_\varepsilon^{-1}(y)))$$

et

$$\Theta(x,y,z) = \Lambda(x,y,z)(1+O_\varepsilon(L_\varepsilon^{-1}(y))).$$

En utilisant le Lemme 16(i) deux fois, pour $z = 3/2$ et $z$ quelconque, on obtient donc

$$\Theta(x,y,z) = \Psi(x,y)\prod_{p\le z}(1-p^{1-h})(1+O_\varepsilon(R)). \tag{5.14}$$

On a

$$\varrho'(u)/\varrho(u) = -\xi_0(u) + O(1/u). \tag{5.15}$$

En utilisant (3.5), on a donc ici

$$\alpha^* = 1-h+O_\varepsilon\bigg(\frac{1}{\log x}\bigg).$$

Cela montre que l'erreur engendrée par la substitution de $1-h$ par $\alpha^*$ dans (5.14) est convenable.

Supposons enfin $u > L_\varepsilon(y)$ ou $r \log 2u > 1$. Par le Théorème 1, on a

$$\Theta(x, y, z) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha, y, z)}{\alpha\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha, y, z)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right)$$

et

$$\Psi(x, y) = \frac{x^\alpha \zeta(\alpha^*, y, 1)}{\alpha^*\sqrt{2\pi\varphi_2(\alpha^*, y, 1)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

On a donc

$$\begin{aligned}\Theta&(x, y, z)\\ &= \Psi(x, y)\prod_{p\le z}(1 - p^{-\alpha^*})\frac{\zeta(\alpha, y, z)}{\zeta(\alpha^*, y, z)} x^{\alpha-\alpha^*}\sqrt{\frac{\varphi_2(\alpha^*, y, 1)}{\varphi_2(\alpha, y, z)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{u}\right)\right)\end{aligned}$$

et le Lemme 14 permet de conclure.

**5.c.** Démonstration du Théorème 8. On distingue quatre cas.

Si $1 \le u \le 1 - r\log r$, il suffit d'appliquer le Théorème 7 conjointement avec le Lemme 15 et la formule (5.15).

Si $1 - r\log r < u < 3$, en appliquant le Lemme H et le Lemme C, on obtient

$$\begin{aligned}\Theta&(x, y, z)\\ &= e^\gamma \prod_{p\le z}\left(1 - \frac{1}{p}\right) x\left(\sigma_r(u) - \frac{\sigma_r'(u)}{\log y}\right)\left(1 + O_\varepsilon\left(r^2 + \frac{1}{(\log y)L_\varepsilon(z)}\right)\right)\end{aligned}$$

et

$$\Psi(x, y) = x\left(\varrho(u) + (\gamma - 1)\frac{\varrho'(u)}{\log y}\right)(1 + O(r^2)).$$

En appliquant le Théorème 2 de [9] pour comparer ces deux formules, on obtient

$$\begin{aligned}\Theta(x, y, z) = \Psi(x, y)\prod_{p\le z}\left(1 - \frac{1}{p}\right)\exp\left\{-\int_0^{-h\log z}\frac{e^t - 1}{t}\,dt\right\}\left(\frac{1 + h}{1 + (1 - \gamma)h}\right)&\\ \times\left(1 + O\left(r^2 + \frac{1}{(\log y)L_\varepsilon(z)}\right)\right)&,\end{aligned}$$

ce qui est équivalent à l'assertion voulue.

Si $3 \le u \le L_\varepsilon(y)$, d'après le Lemme F et le Lemme B, on a

$$\Theta(x, y, z) = M(x, y, z)\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{\log 2u}{(\log y)L_\varepsilon(z)}\right)\right)$$

et

$$\Psi(x, y) = \Lambda(x, y, 3/2)(1 + O_\varepsilon(L_\varepsilon^{-1}(y))).$$

Le Lemme 16(i) pour $z = 1$ et (ii) pour $z$ quelconque permet alors de conclure dans ce cas.

Enfin si $u > L_\varepsilon(y)$, on conclut en appliquant le Théorème 7 et en estimant $\prod_{p\le z}(1-p^{-\alpha^*})$ à l'aide du Lemme 15 et de la formule (5.15). Cela achève la démonstration du Théorème 8.

**5.d.** Démonstration du Théorème 5. Supposons dans un premier temps que $y \ge z^2$. D'après (3.3) et (3.5), on a $\max(\alpha^*-1, 0) \ll 1/\log z$. On en déduit que

$$\prod_{p\le z}(1-p^{-\alpha^*}) \ll \prod_{p\le z}(1-p^{-1}) \asymp 1/\log z.$$

Le Théorème 7 permet alors de conclure. Si $z \le y < z^2$, on a $\Theta(x,y,z) \le \Theta(x,y,\sqrt{y}) \ll \Psi(x,y)/\log y$ d'après ce que l'on vient de voir. D'où $\Theta(x,y,z) \ll \Psi(x,y)/\log z$.

**5.e.** Démonstration du Théorème 6. Soit $u_0$ une constante suffisamment grande. On suppose dans un premier temps que $u \ge u_0$ et $y \ge z^2$. Si de plus $y \ge \log\log\log x$ on a d'après le Théorème 7, pour $v \to +\infty$,

$$\begin{aligned} x\Theta(x,y,z) \sim \Psi(x,y)\Phi(x,z) &\Leftrightarrow \prod_{p\le z}(1-p^{-\alpha^*}) \sim \prod_{p\le z}(1-p^{-1}) \\ &\Leftrightarrow (1-\alpha^*)\log z \to 0. \end{aligned}$$

Or d'après les formules (3.3) et (3.5), pour $u \ge u_0$ on a

$$(1-\alpha^*)\log z \to 0 \Leftrightarrow \frac{\log z}{\log y}\log u \to 0.$$

Si $y < \log\log\log x$, on conclut avec les formules (1.5) appliquées avec $z = 1$ et $z$ quelconque.

On suppose maintenant $y < z^2$ et $u \ge u_0$. On a alors d'après ce qui a été vu précédemment, pour $v \to +\infty$,

$$x\Theta(x,y,z) \le x\Theta(x,y,\sqrt{y}) = o(\Phi(x,\sqrt{y})\Psi(x,y)) = o(\Phi(x,z)\Psi(x,y)).$$

Enfin si $u < u_0$, d'après le Lemme A, le Lemme D et le Lemme I, pour $x \to +\infty$ on a

$$x\Theta(x,y,z) \sim \Psi(x,y)\Phi(x,z) \Leftrightarrow \sigma_r(u) \sim e^{-\gamma}\varrho(u).$$

Or d'après le Théorème 2 de [9], on a

$$\sigma_r(u) \sim e^{-\gamma}\varrho(u) \qquad (u \le u_0,\ v \to +\infty).$$

Cela conclut la démonstration du Théorème 6.

**Bibliographie**


[1] N. G. de Bruijn, *On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 53 (1950), 803–812.

[2] W. J. Ellison et M. Mendès-France, *Les nombres premiers*, Hermann, Paris, 1975.

[3] V. Ennola, *On numbers with small prime divisors*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI 440 (1969).

[4] E. Fouvry et G. Tenenbaum, *Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques*, Proc. London Math. Soc. 63 (1991), 449–494.

[5] D. R. Heath-Brown, *The numbers of primes in a short interval*, J. Reine Angew. Math. 389 (1988), 22–63.

[6] A. Hildebrand, *Integers free of large prime factors and the Riemann hypothesis*, Mathematika 31 (1984), 258–271.

[7] A. Hildebrand and G. Tenenbaum, *On integers free of large prime factors*, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986), 265–290.

[8] E. Saias, *Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier*, J. Number Theory 32 (1989), 78–99.

[9] —, *Entiers sans grand ni petit facteur premier I*, Acta Arith. 61 (1992), 347–374.

[10] —, *Entiers sans grand ni petit facteur premier II*, ibid. 63 (1993), 287–312.

[11] G. Tenenbaum, *La méthode du col en théorie analytique des nombres*, dans : Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1986–87, C. Goldstein (ed.), Progr. Math. 75, Birkhäuser, 1988, 411–442.

[12] —, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Inst. Élie Cartan 13, Université de Nancy I, 1990.

[13] —, *Cribler les entiers sans grand facteur premier*, Philos. Trans. Roy. Soc. Ser. A 345 (1993), 377–384.


LABORATOIRE DE PROBABILITÉS
UNIVERSITÉ PARIS VI
4, PLACE JUSSIEU
75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

*Reçu le 30.4.1993*
*et révisé le 9.8.1994* (2429)