ACTA ARITHMETICA
LXXI.4 (1995)

Многомерные цепные дроби и оценки линейных форм

А. Н. Коробов (Москва)

Обобщения непрерывных дробей рассматривали Эйлер, Якоби, Перрон, Минковский, Вороной и ряд других математиков. Первый алгоритм обобщающий алгоритм непрерывных дробей на двумерный случай предложил Эйлер. Якоби видоизменил алгоритм Эйлера, придав вычислениям больше однообразия, и обнаружил его периодичность для некоторых кубических иррациональностей. Якоби также убедился на частных примерах, что алгоритм позволяет находить хорошие совместные рациональные приближения с одним знаменателем для двух действительных чисел.

П. Бахман установил необходимые и достаточные условия периодичности алгоритма Якоби, связанные с характером совместных приближений.

Вороной предложил свой вариант алгоритма Якоби и доказал его периодичность для кубических иррациональностей.

В 1907 году О. Перрон [13] в своей магистерской диссертации обобщил алгоритм Якоби на многомерный случай и доказал ряд его основных свойств: сходимость, однозначность, линейную независимость получающихся чисел.

В последнее время появилось много исследований, посвященных алгоритму Якоби–Перрона и другим обобщениям непрерывных дробей. Так в работе Л. Бернштейна [10] исследовались вопросы, связанные с периодичностью алгоритма Якоби–Перрона. В диссертации А. Брентьеса [11] дается обзор большинства известных обобщений алгоритмов непрерывных дробей и исследуются свойства совместных приближений, обеспечиваемых алгоритмами.

Однако до настоящего времени по-видимому не было известно примеров разложений в многомерную цепную дробь векторов с трансцендентными компонентами и с помощью многомерных цепных дробей не получались точные оценки линейных форм от трансцендентных чисел.

Заметим, что ранее получение нетривиальных точных оценок линейных форм было основано на построении функциональных аппроксимаций (аппроксимаций Паде [5]). Таким путем в работе А. И. Галочкина [2] были впервые получены оценки по порядку такие же, как и для почти всех чисел. В работе автора [3] были получены неулучшаемые оценки линейных форм с помощью применения линейного рекуррентного соотношения. По существу в этой работе было построено многомерное обобщение цепной дроби Гурвица. В работе А. И. Галочкина [1] методом функциональных аппроксимаций были затем получены более общие неулучшаемые оценки.

В настоящей статье приведены примеры разложения в многомерные цепные дроби систем чисел, обобщающие классические цепные дроби Эйлера, Гурвица и Рамануджана. В качестве следствия получены неулучшаемые оценки линейных форм от соответствующих чисел.

Получение неулучшаемых оценок основано на общей теореме о цепных дробях Якоби–Перрона специального вида. Метод доказательства этой теоремы следует работе автора [3]. В частности получены неулучшаемые оценки линейной формы от $\psi(1/q), \psi'(1/q), \ldots$ $\ldots, \psi^{(s)}(1/q)$, где $q \in \mathbb{N}$ и

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{((s+1)n)!}, \qquad s \in \mathbb{N}.$$

1. Основные свойства многомерных цепных дробей. В этой статье будут рассматриваться выражения вида

$$\vec{a}_0 + \cfrac{1}{\vec{a}_1 + \cfrac{1}{\cdots}}, \tag{1}$$

$$\vec{a}_n = (a_1(n), \ldots, a_s(n)) \in \mathbb{R}^s,$$
$$a_i(n) \geq 0, \qquad a_s(n) > 0, \qquad i = 1, \ldots, s, \ n = 1, 2, \ldots, \ s \in \mathbb{N},$$

которые назовем *s-мерными цепными дробями* (или цепными s-дробями) с элементами $\vec{a}_n$.

Для того, чтобы приписать конечной цепной s-дроби

$$\vec{\alpha} = \vec{a}_0 + \cfrac{1}{\vec{a}_1 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{\vec{a}_n}}} = [\vec{a}_0; \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] \tag{2}$$

определенное значение, положим

$$1/(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = (1/\alpha_s, \alpha_1/\alpha_s, \dots, \alpha_{s-1}/\alpha_s). \tag{3}$$

Теперь, согласно (3), каждой конечной s-дроби (2) соответствует вполне определенный s-мерный вектор (значение конечной s-дроби), причем при вычислении значения s-дроби не может возникнуть ситуация деления на ноль, поскольку

$$a_s(k) > 0, \quad a_i(k) \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots,\ i = 1, \dots, s).$$

Цепные s-дроби (1) будем записывать также в виде $[\vec{a}_0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots]$.

Подходящей s-дробью бесконечной цепной s-дроби (1) назовем вектор

$$\vec{r}_k = [\vec{a}_0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k], \qquad k = 0, 1, \dots$$

Предположим, что существует предел $\vec{\alpha} = \lim_{k\to\infty} \vec{r}_k$. В этом случае s-дробь (1) назовем *сходящейся* к значению $\vec{\alpha}$ и будем писать $\vec{\alpha} = [\vec{a}_0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots]$.

Для любой сходящейся s-дроби (1) справедливо соотношение

$$\vec{\alpha} = [\vec{a}_0; \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{\alpha}_k], \tag{4}$$

где $\vec{\alpha}_k = [\vec{a}_k; \vec{a}_{k+1}, \vec{a}_{k+2}, \dots]$. Из (4) следует равенство $\vec{\alpha}_k = \vec{a}_k + 1/\vec{\alpha}_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots$, или, в координатной записи,

$$\begin{aligned}(\alpha_1(k), \dots, \alpha_s(k)) &= (a_1(k), \dots, a_s(k)) \\ &\quad + (1/\alpha_s(k+1), \alpha_1(k+1)/\alpha_s(k+1), \dots, \alpha_{s-1}(k+1)/\alpha_s(k+1)).\end{aligned} \tag{5}$$

Запишем соотношение (5) в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1(k) \\ \vdots \\ \alpha_s(k) \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_s(k+1)} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & a_1(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & a_s(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1(k+1) \\ \vdots \\ \alpha_s(k+1) \end{bmatrix}.$$

Из этого равенства получим

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_s \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha_s(1) \dots \alpha_s(n+1)} \prod_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & a_1(k) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & a_s(k) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_1(n+1) \\ \vdots \\ \alpha_s(n+1) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Определим величины $A_i(n)$ из рекуррентных соотношений

$$A_i(n+s+1) = A_i(n) + a_1(n)A_i(n+1) + \dots + a_s(n)A_i(n+s) \tag{7}$$

и начальных условий

$$A_i(j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 0, \dots, s.$$

Индукцией легко установить, что тогда

$$\prod_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 0 & a_1(k) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & \dots & 1 & a_s(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0(n) & \dots & A_0(n+s) \\ A_1(n) & \dots & A_1(n+s) \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ A_s(n) & \dots & A_s(n+s) \end{bmatrix}.$$

Из (6) теперь получаем равенства

$$\alpha_i = \frac{A_i(n) + A_i(n+1)\alpha_1(n) + \ldots + A_i(n+s)\alpha_s(n)}{A_0(n) + A_0(n+1)\alpha_1(n) + \ldots + A_0(n+s)\alpha_s(n)}, \tag{8}$$

$$\alpha_s(1)\ldots\alpha_s(n) = A_0(n) + A_0(n+1)\alpha_1(n) + \ldots + A_0(n+s)\alpha_s(n), \tag{9}$$

$$[\vec{a}_0; \vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n] = \left(\frac{A_1(n+s+1)}{A_0(n+s+1)}, \ldots, \frac{A_s(n+s+1)}{A_0(n+s+1)}\right). \tag{10}$$

Заметим, что из равенств (5)–(10) следует равносильность понятия многомерной цепной дроби и алгоритма рассматривавшегося в работе Перрона [13].

Приведем критерий сходимости s-мерных цепных дробей, принадлежащий О. Перрону [13].

Критерий Перрона. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \sup a_i(n)/a_s(n) < \infty \qquad (i = 0, \ldots, s-1,\ a_0(n) = 1),$$

то цепная s-дробь $[\vec{a}_0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots]$ сходится.

2. Алгоритм Якоби–Перрона и многомерные цепные дроби. Пусть задан некоторый s-мерный вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbb{R}^s$ такой, что $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_s$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$.

Алгоритм Якоби–Перрона состоит в нахождении векторов неполных частных $\vec{a}_n = (a_1(n), \ldots, a_s(n))$ и векторов-остатков $\vec{\alpha}_n = (\alpha_1(n), \ldots, \alpha_s(n))$ по рекуррентным формулам

$$\begin{aligned} \vec{\alpha} &= \vec{\alpha}_0 = (\alpha_1(0), \ldots, \alpha_s(0)), \\ \vec{a}_n &= (a_1(n), \ldots, a_s(n)) = ([\alpha_1(n)], \ldots, [\alpha_s(n)]), \\ \vec{\alpha}_n &= \vec{a}_n + 1/\vec{\alpha}_{n+1}. \end{aligned} \tag{11}$$

Пусть $\beta_1 \neq 0$ и

$$(\beta_1, \ldots, \beta_s) = 1/(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = (1/\alpha_s, \alpha_1/\alpha_s, \ldots, \alpha_{s-1}/\alpha_s).$$

Тогда вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ однозначно определяется по формуле

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = (\beta_2/\beta_1, \ldots, \beta_s/\beta_1, 1/\beta_1).$$

Следовательно, последнее из равенств (11) можно переписать в виде

$$\vec{\alpha}_{n+1} = \left(\frac{\alpha_2(n)-a_2(n)}{\alpha_1(n)-a_1(n)}, \dots, \frac{\alpha_s(n)-a_s(n)}{\alpha_1(n)-a_1(n)}, \frac{1}{\alpha_1(n)-a_1(n)}\right). \tag{12}$$

Если $1, \alpha_1(n), \dots, \alpha_s(n)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$, то $\alpha_1(n) - a_1(n) \neq 0$ и в силу (12), $1, \alpha_1(n+1), \dots, \alpha_s(n+1)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$. Так как $1, \alpha_1(n), \dots, \alpha_s(n)$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$ при $n = 0$, то это справедливо при любом $n \in \mathbb{N}$ и поэтому при любом $n = 0, 1, \dots$ применима формула (12).

Таким образом, рекуррентные формулы (11) и (12) позволяют получить бесконечную последовательность векторов $\vec{a}_n \in \mathbb{Z}^s$ и $\vec{\alpha}_n \in \mathbb{R}^s$ таких, что при $n = 0, 1, \dots$ справедливы равенства

$$\vec{\alpha} = \vec{a}_0 + 1/\vec{\alpha}_1 = \vec{a}_0 + 1/(\vec{a}_1 + 1/\vec{\alpha}_2) = \ldots = [\vec{a}_0; \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{\alpha}_{n+1}]. \tag{13}$$

Кроме того, из (12) следует, что при $n = 0, 1, \dots$ выполняются оценки

$$\alpha_s(n+1) > \alpha_i(n+1) > 0, \qquad i = 0, \dots, s-1 \qquad (\alpha_0(n) = 1)$$

и поскольку $a_i(n) = [\alpha_i(n)]$, $i = 1, \dots, s$, то

$$a_i(n) \in \mathbb{Z}, \quad a_s(n+1) \geq a_i(n+1) \geq 0, \quad i = 0, \dots, s \quad (a_0(n) = 1). \tag{14}$$

Согласно критерию Перрона условия (14) обеспечивают сходимость цепной s-дроби $[\vec{a}_0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots]$.

Лемма 1. *Если при $n = 0, 1, 2, \dots$ справедливо представление вектора $\vec{\alpha} \in \mathbb{R}^s$ в виде конечной цепной s-дроби $\vec{\alpha} = [\vec{a}_0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n, \vec{\alpha}_{n+1}]$, где $\vec{\alpha}_n = (\alpha_1(n), \dots, \alpha_s(n))$, $\alpha_1(n) \geq 0$, $\alpha_s(n) > 0$, и цепная s-дробь $[\vec{a}_0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots]$ сходится, то она сходится к вектору $\vec{\alpha}$:*

$$\vec{\alpha} = [\vec{a}_0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots].$$

Доказательство. Заметим, что справедливо равенство (8), так как оно было выведено из соотношения (4), верного в условиях леммы.

Применяя (7) и (8), получаем

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{s} \frac{A_i(n+j)}{A_0(n+j)} \lambda_j(n), \tag{15}$$

где

$$\lambda_j(n) = \frac{A_0(n+j)a_j(n)}{\sum_{j=0}^{s} A_0(n+j)a_j(n)},$$

$$\sum_{j=0}^{s} \lambda_j(n) = 1, \quad 0 \leq \lambda_j(n) \leq 1, \quad j = 0, \dots, s.$$

Пусть $[\vec{a}_0; \vec{a}_1, \ldots] = \vec{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$. Тогда, в силу (10),

$$\beta_i = \lim_{n \to \infty} A_i(n)/A_0(n), \qquad i = 1, \ldots, s,$$

т.е.

$$A_i(n)/A_0(n) = \beta_i + o(1) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Из (15) теперь следует, что

$$\alpha_i = \sum_{j=0}^{s} (\beta_i + o(1)) \lambda_j(n) = \beta_i + o(1),$$

т.е. $\alpha_i = \beta_i$ и лемма доказана.

Из леммы 1 и (13) следует, что алгоритм Якоби–Перрона позволяет разложить любой вектор $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ (такой, что $1, \alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_s$ линейно независимы над $\mathbb{Q}$) в сходящуюся цепную дробь:

$$\vec{\alpha} = [\vec{a}_0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots], \qquad \vec{a}_n = (a_1(n), \ldots, a_s(n)),$$

причем выполнены условия (14).

3. Правильные многомерные цепные дроби и конечноразностные уравнения. Назовем цепную s-дробь (1) *правильной*, если ее элементы имеют вид

$$\vec{a}_n = (0, \ldots, 0, a_n), \qquad a_n \in \mathbb{N},\ n = 0, 1, \ldots$$

Понятие правильной s-дроби является обобщением понятия обычной цепной дроби с натуральными элементами (см., например, [7]). Для правильных s-дробей удается получить наиболее точные оценки соответствующих линейных форм и построить примеры разложения в такие дроби.

Из критерия Перрона следует, что любая правильная s-дробь сходится. Из результатов работы Перрона [13] также следует, что если разложение в правильную многомерную дробь существует, то оно единственно.

В следующей лемме устанавливается связь между положительными решениями некоторых рекуррентных уравнений и правильными s-дробями.

Лемма 2. *Пусть $a_n \in \mathbb{N}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и последовательность $x_n > 0$ $(n = 0, 1, \ldots)$ положительных чисел удовлетворяет рекуррентному уравнению*

$$x_{n+s} = x_{n-1} - a_n x_n. \tag{16}$$

Тогда справедливо разложение в правильную s-дробь

$$(x_1/x_0, \dots, x_s/x_0) = \cfrac{1}{\vec{a}_1 + \cfrac{1}{\vec{a}_2 + \dots}}, \tag{17}$$

где $\vec{a}_n = (0, \dots, 0, a_n)$.

Доказательство. Определим последовательность s-мерных векторов $\vec{\alpha}_n$ $(n = 1, 2, \dots)$ из равенства

$$\vec{\alpha}_n = (\alpha_1(n), \dots, \alpha_s(n)) = (x_{n+1}/x_n, \dots, x_{n+s-1}/x_n, x_{n-1}/x_n).$$

Применяя (16), получаем

$$\vec{\alpha}_n = (0, \dots, 0, a_n) + (x_{n+1}/x_n, \dots, x_{n+s}/x_n) = \vec{a}_n + 1/\vec{\alpha}_{n+1}.$$

Следовательно, при $n = 0, 1, 2, \dots$ имеем

$$(x_1/x_0, \dots, x_s/x_0) = [0; \vec{\alpha}_1] = [0; \vec{a}_1, \vec{\alpha}_2] = \dots = [0; \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{\alpha}_{n+1}].$$

Из леммы 1 теперь следует (17). Лемма доказана.

Покажем, что справедливо утверждение обратное лемме 2.

Лемма 3. *Пусть задана правильная s-дробь*

$$(\alpha_1, \dots, \alpha_s) = \cfrac{1}{\vec{a}_1 + \cfrac{1}{\vec{a}_2 + \dots}},$$

$$\vec{a}_n = (0, \dots, 0, a_n), \qquad (\alpha_1(n), \dots, \alpha_s(n)) = [\vec{a}_n; \vec{a}_{n+1}, \dots].$$

Тогда последовательность

$$x_n = 1/(\alpha_s(1) \dots \alpha_s(n)), \qquad n = 0, 1, \dots \qquad (x_0 = 1), \tag{18}$$

удовлетворяет уравнению (16).

Доказательство. Для правильной s-дроби соотношения (5) примут вид

$$\begin{aligned} \alpha_1(n) &= \frac{1}{\alpha_s(n+1)}, \\ \alpha_2(n) &= \frac{\alpha_1(n+1)}{\alpha_s(n+1)} = \frac{1}{\alpha_s(n+1)\alpha_s(n+2)}, \ \dots, \\ \alpha_{s-1}(n) &= \frac{\alpha_{s-2}(n+1)}{\alpha_s(n+1)} = \frac{1}{\alpha_s(n+1)\dots\alpha_s(n+s-1)}, \\ \alpha_s(n) &= a_n + \frac{1}{\alpha_s(n+1)\dots\alpha_s(n+s)}. \end{aligned} \tag{19}$$

Пользуясь (18), перепишем (19) следующим образом:

$$\alpha_s(n) = x_{n-1}/x_n = a_n + x_{n+s}/x_n,$$

откуда $x_{n+s} = x_{n-1} - a_n x_n$. Лемма доказана.

4. Общая теорема. Пусть некоторый s-мерный вектор разложен в правильную цепную s-дробь

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_s)=\cfrac{1}{\vec{a}_1+\cfrac{1}{\vec{a}_2+\dots}},$$

$$\vec{a}_n=(0,\dots,0,a_n),\qquad a_n\in\mathbb{N}.$$

Согласно лемме 3, последовательность $x_n=1/(\alpha_1(1)\dots\alpha_s(n))$, где $(\alpha_1(n),\dots,\alpha_s(n))=[\vec{a}_n;\vec{a}_{n+1},\dots]$, удовлетворяет уравнению (16),

$$x_{n+s}=x_{n-1}-a_nx_n.$$

Определим целые числа $h_n(i)$ как решения этого уравнения с начальными условиями

$$h_j(i)=\delta_{ij},\qquad j=0,\dots,s. \tag{20}$$

Лемма 4. *Справедливы равенства*

$$x_n=h_n(0)x_0+\dots+h_n(s)x_s, \tag{21}$$

$$|\det(h_{n+j}(i))|=1,\qquad i,j=0,\dots,s. \tag{22}$$

Доказательство. Из (20) следует, что равенство (21) выполняется при $n=0,\dots,s$, а равенство (22) – при $n=0$. Предположим, что при некотором k равенство (21) справедливо при $n=k-1,\dots,k+s-1$ и (22) справедливо при $n=k-1$.

Пользуясь уравнением (16), получаем

$$\begin{aligned}x_{k+s}&=x_{k-1}-a_kx_k\\&=(h_{k-1}(0)-a_kh_k(0))x_0+\dots+(h_{k-1}(s)-a_kh_k(s))x_s\\&=h_{k+s}(0)x_0+\dots+h_{k+s}(s)x_s.\end{aligned}$$

Имеем

$$\begin{aligned}&|\det(h_k(i),\dots,h_{k+s}(i))|_{(i=0,\dots,s)}\\&\qquad=|\det(h_k(i),\dots,h_{k+s-i}(i),h_{k-1}(i)-a_kh_k(i))|\\&\qquad=|\det(h_k(i),\dots,h_{k+s-1}(i),h_{k-1}(i))|=1.\end{aligned}$$

Таким образом, в силу индукции, лемма доказана.

Пусть задано разложение в правильную s-дробь

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_s)=\cfrac{1}{\vec{a}_1+\cfrac{1}{\vec{a}_2+\dots}},\qquad \vec{a}_n=(0,\dots,0,a_n),\ a_n\in\mathbb{N}.$$

Определим величины $H_n\in\mathbb{N}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}&H_n=a_{n-s}a_{n-2s}\dots a_r\quad(1\le r\le s,\ n\equiv r\pmod{s},\ n>s),\\&H_0=\dots=H_s=1.\end{aligned} \tag{23}$$

Лемма 5. *Если выполнены условия*

$$H_{n+1} \gg H_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}/H_{n+s} < \infty, \tag{24}$$

то справедливы оценки ($n = 0, 1, \ldots$)

$$|h_n(i)| \ll H_n, \tag{25}$$

$$x_n < \frac{1}{H_{n+1} \ldots H_{n+s}}. \tag{26}$$

(*Здесь и далее используются символы Виноградова* $\asymp, \ll, \gg$.)

Доказательство. Положим $h_n(i) = u_n H_n$. Тогда уравнение (16) для $h_n(i)$ перепишется в виде

$$u_{n+s}H_{n+s} = u_{n-1}H_{n-1} - a_n u_n H_n = u_{n-1}H_{n-1} - u_n H_{n+s},$$
$$u_{n+s} = -u_n + (H_{n-1}/H_{n+s})u_{n-1}.$$

Пусть $M_n = \max(|u_{n+s}|, \ldots, |u_n|)$. Тогда

$$M_n \le M_{n-1}(1 + H_{n-1}/H_{n+s}) \le \ldots \le M_0 \prod_{k=1}^{n}(1 + H_{k-1}/H_{k+s})$$
$$\le \prod_{k=1}^{\infty}(1 + H_{k-1}/H_{k+s}).$$

Так как по условию (24) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} H_{n-1}/H_{n+s}$ сходится, то сходится и бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty}(1 + H_{k-1}/H_{k+s})$. Следовательно, $M_n \ll 1$ и получаем оценку (25):

$$|h_n(i)| = |u_n| H_n \le M_n H_n \ll H_n.$$

Из (18) и (23) следует оценка (26):

$$x_n = \frac{1}{\alpha_s(1) \ldots \alpha_s(n)} < \frac{1}{a_1 \ldots a_n} = \frac{1}{H_{n+1} \ldots H_{n+s}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть для правильной цепной s-дроби*

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_s) = \cfrac{1}{\vec{a}_1 + \cfrac{1}{\vec{a}_2 + \ldots}}, \qquad \vec{a}_n = (0, \ldots, 0, a_n),\ a_n \in \mathbb{N},$$

выполнены условия (24) *и для некоторой положительной и возрастающей функции* $\Phi(x)$ *выполняются оценки*

$$\Phi(H_n) \gg H_{n+1} \ldots H_{n+s}, \quad \Phi(x/2) \gg \Phi(x)$$
$$(H_n = a_{n-s}a_{n-2s} \ldots a_r\ (1 \le r \le s)).$$

Тогда для любых $h_0,\dots,h_s\in\mathbb{Z}$ *справедлива оценка*

$$|h_0+h_1\alpha_1+\ldots+h_s\alpha_s|\gg 1/\Phi(H),\qquad H=\max(|h_0|,\dots,|h_s|)>0. \tag{27}$$

При этом существует последовательность ненулевых линейных форм с целыми коэффициентами таких, что

$$|h_n(0)+h_n(1)\alpha_1+\ldots+h_n(s)\alpha_s|\ll\frac{1}{H_{n+1}\ldots H_{n+s}},\quad n=0,1,\dots,$$
$$|h_n(i)|\ll H_n,\quad h_n(i)\in\mathbb{Z}\quad(i=0,\dots,s).$$

(*Константы в знаках* $\gg$ *и* $\ll$ *зависят только от вектора* $\vec\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_s)$.)

Доказательство. Пусть $h_0,\dots,h_s\in\mathbb{Z}$ и $H=\max(|h_0|,\dots,|h_s|)>0$. Так как, согласно (22), $\det(h_{n+j}(i))\ne 0$, то при любом n найдется такое i, что определитель

$$\delta=\begin{vmatrix} h_n(0) & \ldots & h_n(s)\\ \hdotsfor{3}\\ h_0 & \ldots & h_s\\ \hdotsfor{3}\\ h_{n+s}(0) & \ldots & h_{n+s}(s)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x_n & h_n(1) & \ldots & h_n(s)\\ \hdotsfor{4}\\ x & h_1 & \ldots & h_s\\ \hdotsfor{4}\\ x_{n+s} & h_{n+s}(1) & \ldots & h_{n+s}(s)\end{vmatrix}$$

ненулевой, где

$$x_k=h_k(0)x_0+\ldots+h_k(s)x_s,\quad x=h_0x_0+\ldots+h_sx_s\quad(x_0=1)$$

(определитель δ получен заменой i-той строки определителя $\det(h_{n+j}(k))$ на ненулевую строку $(h_0,\dots,h_s)$). Так как $\delta\in\mathbb{Z}$ и $\delta\ne 0$, то $|\delta|\ge 1$, откуда следует, что

$$\Big|xA+\sum_{\substack{k=0\\k\ne i}}^{s}x_{n+k}A_k\Big|\ge 1, \tag{28}$$

где $A_0,\dots,A_{i-1},A,A_{i+1},\dots,A_s$ – алгебраические дополнения элементов первого столбца определителя δ.

Применяя оценки леммы 5 и условия (24), получаем

$$\begin{gathered}|A|\ll\frac{H_n\ldots H_{n+s}}{H_{n+1}}\ll H_{n+1}\ldots H_{n+s},\\ |A_k|\ll\frac{HH_n\ldots H_{n+s}}{H_{n+i}H_{n+k}},\quad k\ne i,\\ |x_{n+k}|\ll\frac{1}{H_{n+1}\ldots H_{n+s}},\quad k=0,\dots,s.\end{gathered} \tag{29}$$

Следовательно,

$$\Big|\sum_{\substack{k=0\\k\neq i}}^{s} x_{n+k}A_k\Big| \ll \sum_{k\neq i}\frac{HH_n}{H_{n+i}H_{n+k}} \ll \frac{H}{H_{n+1}},$$

т.е. для некоторой константы $c>0$,

$$\Big|\sum_{k\neq i} x_{n+k}A_k\Big| < cH/H_{n+1}. \tag{30}$$

Из условий (24) следует, что последовательность H_n неограничена. Выберем наименьшее натуральное n, при котором $2cH < H_{n+1}$. Тогда $H \gg H_n$ и из (28)–(30) получим

$$|x| \gg \frac{1}{2|A|} \gg \frac{1}{H_{n+1}\dots H_{n+s}} \gg \frac{1}{\Phi(H_n)} \gg \frac{1}{\Phi(H)}.$$

Остается заметить, что в силу лемм 2–4,

$$(\alpha_1,\dots,\alpha_s) = (x_1,\dots,x_s), \qquad |x| = |h_0 + h_1\alpha_1 + \dots + h_s\alpha_s|.$$

Второе утверждение теоремы следует из леммы 5. Теорема доказана.

5. Многомерные обобщения некоторых классических цепных дробей и точные по высоте оценки линейных форм. Будем называть оценку (27) теоремы 1 *точной по высоте*, если существует бесконечная последовательность линейных форм вида

$$L = h_0 + h_1\alpha_1 + \dots + h_s\alpha_s, \qquad h_0,\dots,h_s \in \mathbb{Z},$$

высоты $H = \max(|h_0|,\dots,|h_s|)$, для которых $|L| \ll 1/\Phi(H)$, т.е. уточнение оценки (27) возможно только за счет константы в знаке $\gg$.

Ниже будут рассмотрены примеры правильных многомерных цепных дробей, обобщающие известные цепные дроби Гурвица, Эйлера–Ламберта и Рамануджана. В качестве примеров на теорему 1 будут получены точные по высоте оценки соответствующих линейных форм. Заметим, что подобные оценки рассматривались ранее в работах [3] и [2] вне связи с многомерными цепными дробями. Заметим также, что в одномерном случае ($s=1$) связь цепных дробей и точных оценок мер иррациональности общеизвестна (см. [4], [9]).

1. *Многомерная цепная дробь Гурвица.* Рассмотрим последовательность ($n = 0,1,\dots$)

$$\psi_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(as)^\nu \nu!} \prod_{x=1}^{n+s\nu} (ax+b)^{-1}, \qquad a, a+b \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Проверим, что выполняется равенство

$$\psi_{n-1} - (an+b)\psi_n = \psi_{n+s}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Действительно,

$$\psi_{n-1} - (an+b)\psi_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{a(n+s\nu)+b-(an+b)}{(as)^\nu \nu!} \prod_{x=1}^{n+s\nu} (ax+b)^{-1}$$
$$= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(as)^{\nu-1}(\nu-1)!} \prod_{x=1}^{n+s\nu} (ax+b)^{-1} = \psi_{n+s}.$$

Следовательно, на основании леммы 2 получаем разложение в правильную s-дробь

$$(\psi_1/\psi_0, \ldots, \psi_s/\psi_0) = [0; \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots], \qquad \vec{a}_n = (0, \ldots, 0, an+b).$$

В частности, при $s = 1$ имеем известное разложение в цепную дробь Гурвица (см. [4])

$$\psi_1/\psi_0 = [0; a+b, 2a+b, \ldots].$$

Для того, чтобы применить теорему 2, покажем, что выполняются оценки

$$\ln H_n \asymp n \ln n, \tag{32}$$
$$H_{n+1} \asymp n^{1/s} H_n. \tag{33}$$

Действительно,

$$H_n = (a(n-s)+b)\ldots(ar+b) \qquad (1 \le r \le s),$$
$$\ln H_n \asymp \ln(n/s-1) + \ln(n/s-2) + \ldots + \ln(r/s) + O(n)$$
$$\asymp \ln([n/s]!) + O(n) \asymp n \ln n,$$
$$\frac{H_{n+1}}{H_n} \asymp \prod_{k=1}^{[n/s]} \frac{a(n-ks+1)+b}{a(n-ks)+b} = \prod_{k=1}^{[n/s]} \left(1 + \frac{1/s}{n/s-k+b/(as)}\right).$$

Логарифмируя, получаем

$$\ln \frac{H_{n+1}}{H_n} = \sum_{k=1}^{[n/s]} \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{n/s-k+b/(as)} + O(1)$$
$$= (1/s)\ln(n/s) + O(1) = (1/s)\ln n + O(1),$$

т.е. $H_{n+1}/H_n \asymp n^{1/s}$ и оценки (32) и (33) доказаны.

Из (32) и (33) следует, что (24) выполнено и

$$H_{n+1}\dots H_{n+s}\asymp n^{1/s+2/s+\ldots+s/s}H_n^s$$
$$=n^{(s+1)/2}H_n^s\asymp H_n^s(\ln(H_n+2)/\ln\ln(H_n+2))^{(s+1)/2}.$$

Теперь, применяя теорему 1, в качестве примера на общую теорему получаем результат работы [3]:

Теорема 2. *Пусть* $s,a,a+b\in\mathbb{N}$ *и*

$$\psi_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(as)^\nu\nu!}\prod_{x=1}^{n+s\nu}(ax+b)^{-1},\qquad n=0,\dots,s.$$

Тогда справедлива точная по высоте оценка

$$|h_0\psi_0+\ldots+h_s\psi_s|\gg H^{-s}(\ln(H+2)/\ln\ln(H+2))^{-(s+1)/2},$$
$$H=\max(|h_0|,\dots,|h_s|)>0,\qquad h_0,\dots,h_s\in\mathbb{Z}.$$

2. *Многомерная цепная дробь Эйлера.* Рассмотрим последовательность $(n=0,1,\dots)$

$$\psi_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{(s+1)^\nu\nu!q^{n+(s+1)\nu}}\prod_{x=1}^{n+s\nu}((s+1)[x/s]+b(x))^{-1}, \tag{34}$$

где $s,q\in\mathbb{N}$, $b(k)=k$ $(k=1,\dots,s-1)$, $b(s)=-1$, $b(x+s)=b(x)$. Покажем, что выполняется равенство

$$\psi_{n-1}-((s+1)[n/s]+b(n))q\psi_n=\psi_{n+s}.$$

Действительно,

$$\psi_{n-1}-((s+1)[n/s]+b(n))q\psi_n$$
$$=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(s+1)[(n+s\nu)/s]+b(n)-(s+1)[n/s]-b(n)}{(s+1)^\nu\nu!q^{n-1+(s+1)\nu}}$$
$$\times\prod_{x=1}^{n+s\nu}((s+1)[x/s]+b(x))^{-1}$$
$$=\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{(s+1)^{\nu-1}(\nu-1)!q^{n+s+(s+1)(\nu-1)}}\prod_{x=1}^{n+s\nu}((s+1)[x/s]+b(x))^{-1}$$
$$=\psi_{n+s}.$$

Следовательно, согласно лемме 2, справедливо разложение в правильную цепную s-дробь

$$(\psi_1/\psi_0,\dots,\psi_s/\psi_0)=[0;\vec a_1,\vec a_2,\dots], \tag{35}$$
$$\vec a_n=(0,\dots,0,a_n),\qquad a_n=q((s+1)[n/s]+b(n)).$$

(Последовательность a_n состоит из всех чисел вида kq, где $k \not\equiv 0 \pmod{s+1}$, $k \in \mathbb{N}$.)

Заметим, что при $k = 0, \dots, s$, (34) преобразуется к виду

$$\psi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((s+1)n+k)!q^{(s+1)n+k}}.$$

В частности, при $s = 1$ получим

$$\psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!q^{2n}} = \operatorname{ch}(1/q), \qquad \psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!q^{2n+1}} = \operatorname{sh}(1/q)$$

и из (35) получаем дробь Эйлера–Ламберта [8]

$$\operatorname{th}(1/q) = (e^{2/q} - 1)/(e^{2/q} + 1) = [0; q, 3q, 5q, \dots].$$

Числа ψ_k $(k = 0, \dots, s)$ можно представить в виде линейной комбинации экспонент в алгебраических точках, например,

$$\psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((s+1)n)!q^{(s+1)n}} = \frac{1}{(s+1)(e^{1/q} + e^{p/q} + \dots + e^{p^s/q})}, \qquad p = e^{2\pi i/(s+1)}.$$

При $s = 3$ получим

$$\psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!q^{4n}} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(1/q) + \cos(1/q)),$$
$$\psi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+1)!q^{4n+1}} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(1/q) + \sin(1/q)),$$
$$\psi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+2)!q^{4n+2}} = \frac{1}{2}(\operatorname{ch}(1/q) - \cos(1/q)),$$
$$\psi_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n+3)!q^{4n+3}} = \frac{1}{2}(\operatorname{sh}(1/q) - \sin(1/q))$$

и (35) запишется в виде трехмерной цепной дроби

$$(36) \qquad (\psi_1/\psi_0, \psi_2/\psi_0, \psi_3/\psi_0) = \cfrac{1}{(0,0,q) + \cfrac{1}{(0,0,2q) + \cfrac{1}{(0,0,3q) + \cfrac{1}{(0,0,5q) + \dots}}}}.$$

Оценим величины $H_n = a_{n-s}a_{n-2s} \dots a_r$ $(1 \le r \le s)$.

Лемма 6. *Справедливы оценки*

$$\ln H_n \asymp n \ln n, \tag{37}$$

$$H_{n+1}/H_n \asymp n^{[(n+1)/s]-[n/s]+(b(n+1)-b(n))/(s+1)}, \tag{38}$$

$$H_{n+1} \dots H_{n+s} \asymp H_n^s n^{\beta(n)}, \tag{39}$$

где $\beta(n) = 1 + n - s[n/s] + (b(1) + \ldots + b(s) - sb(n))/(s+1)$.

Доказательство. Оценка (37) получается аналогично (32). Проверим (38):

$$\begin{aligned}\frac{H_{n+1}}{H_n} &\asymp \prod_{k=1}^{[n/s]} \frac{(s+1)[(n+1-ks)/s] + b(n+1)}{(s+1)[(n-ks)/s] + b(n)} \\ &= \prod_{k=1}^{[n/s]} \left(1 + \frac{[(n+1)/s] - [n/s] + (b(n+1) - b(n))/(s+1)}{([n/s] - k + b(n))/(s+1)}\right).\end{aligned}$$

Так же как при выводе (33) получим

$$\ln(H_{n+1}/H_n) = O(1) + ([(n+1)/s] - [n/s] + (b(n+1) - b(n))/(s+1)) \ln n,$$

откуда следует (38).

Оценка (39) является следствием (38). Действительно,

$$\begin{aligned}&H_{n+1} \asymp n^{[(n+1)/s]-[n/s]+(b(n+1)-b(n))/(s+1)} H_n, \\ &H_{n+2} \asymp n^{[(n+2)/s]-[n/s]+(b(n+2)-b(n))/(s+1)} H_n, \ \ldots, \\ &H_{n+s} \asymp n^{[(n+s)/s]-[n/s]+(b(n+s)-b(n))/(s+1)} H_n.\end{aligned}$$

Перемножая эти оценки, получим (39):

$$H_{n+1} \dots H_{n+s} \asymp H_n^s n^{\beta(n)},$$

где

$$\begin{aligned}\beta(n) &= [(n+1)/s] + \ldots + [(n+s)/s] - s[n/s] \\ &\quad + \frac{b(n+1) + \ldots + b(n+s) - sb(n)}{s+1} \\ &= 1 + n - s[n/s] + \frac{b(1) + \ldots + b(s) - sb(n)}{s+1}.\end{aligned}$$

Лемма доказана.

Заметим, что $\beta(n+s) = \beta(n)$ и

$$\max_{k=1,\ldots,s} \beta(k) = \beta(s) = 1 + \frac{2 + \ldots + s}{s+1} = \frac{s(s+3)}{2(s+1)}.$$

В силу леммы 6 условия (24) выполнены и

$$H_{n+1} \dots H_{n+s} \ll H_n^s (\ln(H_n + 2)/\ln\ln(H_n + 2))^{s(s+3)/(2s+2)},$$

причем для $n \equiv 0 \pmod{s}$,

$$H_{n+1} \dots H_{n+s} \asymp H_n^s (\ln(H_n+2)/\ln\ln(H_n+2))^{s(s+3)/(2s+2)}.$$

Применяя теорему 2, получаем следующее утверждение:

Теорема 3. *Пусть $s, q \in \mathbb{N}$ и*

$$\psi_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{((s+1)n+k)!\,q^{(s+1)n+k}}, \qquad k = 0, \dots, s.$$

Тогда справедлива точная по высоте оценка

$$|h_0\psi_0 + \dots + h_s\psi_s| \gg H^{-s}(\ln(H+2)/\ln\ln(H+2))^{-s(s+3)/(2s+2)},$$
$$H = \max(|h_0|, \dots, |h_s|) > 0, \quad h_i \in \mathbb{Z}.$$

В частности, при $s = 3$, выполняется точная по высоте оценка

$$|h_0 \operatorname{ch}(1/q) + h_1 \cos(1/q) + h_2 \operatorname{sh}(1/q) + h_3 \sin(1/q)|$$
$$\gg H^{-3}(\ln(H+2)/\ln\ln(H+2))^{-9/4},$$
$$H = \max(|h_0|, |h_1|, |h_2|, |h_3|) > 0, \qquad h_0, h_1, h_2, h_3 \in \mathbb{Z}.$$

3. *Многомерная цепная дробь Рамануджана.* Пусть $a, s \in \mathbb{N}$, $a \geq 2$. Рассмотрим последовательность

$$\psi_n = a^{-n(n+1)/2} \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{(-s(s+1)/2)\nu^2 - (s+1)n\nu} \prod_{k=1}^{\nu} (a^{(s+1)k} - 1)^{-1}, \qquad n = 0, 1, \dots \tag{40}$$

Покажем, что справедливо равенство

$$\psi_{n-1} - a^n \psi_n = \psi_{n+s}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

Действительно,

$$\begin{aligned}
\psi_{n-1} - a^n\psi_n
&= a^{-n(n-1)/2} \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{(-s(s+1)/2)\nu^2} (a^{-(s+1)(n-1)\nu} - a^{-(s+1)n\nu}) \prod_{k=1}^{\nu} (a^{(s+1)k} - 1)^{-1} \\
&= a^{-n(n-1)/2} \sum_{\nu=1}^{\infty} a^{(-s(s+1)/2)\nu^2 - (s+1)n\nu} \prod_{k=1}^{\nu-1} (a^{(s+1)k} - 1)^{-1} \\
&= a^{-n(n-1)/2 - n(s+1) - s(s+1)/2} \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} a^{(-s(s+1)/2)\nu^2 - (s+1)(n+s)\nu} \prod_{k=1}^{\nu} (a^{(s+1)k} - 1)^{-1} \\
&= \psi_{n+s}.
\end{aligned}$$

В силу леммы 2, справедливо разложение в правильную s-дробь

$$(\psi_1/\psi_0,\dots,\psi_s/\psi_0)=\cfrac{1}{(0,\dots,a)+\cfrac{1}{(0,\dots,a^2)+\dots}}. \tag{41}$$

При $s=1$ из (40) и (41) получаем цепную дробь Рамануджана [14] (см. также [12] и [6])

$$\psi_0=\sum_{n=0}^{\infty}a^{-n^2}\prod_{k=1}^{n}(a^{2k}-1)^{-1},$$

$$\psi_1=\sum_{n=0}^{\infty}a^{-(n+1)^2}\prod_{k=1}^{n}(a^{2k}-1)^{-1},$$

$$\psi_1/\psi_0=[0;a,a^2,a^3,\dots],\qquad a\in\mathbb{N},\ a\ge 2.$$

Пусть

$$H_n=a^{n-s}a^{n-2s}\dots a^r\qquad(1\le r\le s).$$

Тогда

$$\log_a H_n=\sum_{k=1}^{[n/s]}(n-ks)+O(1)=n^2/(2s)+O(n),$$

$$n=\sqrt{2s}(\log_a H_n)^{1/2}+O(1),$$

$$H_{n+1}/H_n\asymp a^{n/s},\qquad H_{n+k}\asymp a^{kn/s}H_n\qquad(k=1,\dots,s),$$

$$H_{n+1}\dots H_{n+s}\asymp a^{n(s+1)/2}H_n^s\asymp H_n^{s+(s+1)\sqrt{s/2}/\sqrt{\log_a H_n}}.$$

Условия (24), очевидно, выполнены и, применяя теорему 2, получаем точную по высоте оценку

$$|h_0\psi_0+\dots+h_s\psi_s|\gg H^{-s-(s+1)\sqrt{s}/\sqrt{2\log_a H}},$$

$$H=\max(|h_0|,\dots,|h_s|)>0,\qquad h_0,\dots,h_s\in\mathbb{Z},\ a\ge 2,\ a\in\mathbb{N},$$

а $\psi_0,\dots,\psi_s$ определены равенством (40).

Замечания. 1. Впервые неулучшаемые оценки линейных форм были получены в работе автора [3] в 1981 г. Затем обобщение этого результата опубликовал А. И. Галочкин [1] в 1984 г. (в 1983 г. им было опубликовано краткое сообщение на эту тему). Новыми результатами статьи являются многомерные обобщения цепных дробей Эйлера, Гурвица и Рамануджана и соответствующие точные оценки линейных форм. Теорема 2 повторяет результат автора [3] для иллюстрации нового подхода. Очевидно, общая теорема 1 позволяет строить множество других примеров чисел, заданных явно цепной дробью, для которых будут получаться новые неулучшаемые оценки линейных форм.

2. Теорему 3 не следует рассматривать как известный пример на применение теоремы из [1], поскольку:

а) Главный смысл теоремы 3 состоит в иллюстрации естественности нового обобщения многомерной дроби Эйлера (36), в которой разлагаются линейные комбинации экспонент в алгебраических точках.

б) Возможность получения теоремы 3 как следствия теоремы из [1] становится понятной в связи с доказательством теоремы 3. Вид функций в теореме 3 отличается от рассматривавшихся в работах [3] и [1] тем, что в них не присутствует явно множитель $1/\nu!$.

в) Теорема 3 легко может быть выведена методом работы автора [3], если последовательность $ax+b$ заменить на $ax+b(x)$, где $b(x+s) = b(x)$, и выбрать затем $a = q(s+1)/s$, $b = q\{(x-1)/s\} - q/s$, $z = 1$ $(s, q, x, ax + b(x) \in \mathbb{N})$.

г) Ни в одной из известных автору работ не рассматривались примеры с точными оценками линейных форм для функций из теоремы 3 (за исключением тривиального случая $s = 1$).

3. В некоторых утверждениях второго параграфа, в которых это явно оговорено, предполагается линейная независимость компонент вектора вместе с 1 над $\mathbb{Q}$. В леммах 1–5 и теоремах 1–3 такая линейная независимость не предполагается в формулировках и не используется в доказательствах. Линейная независимость следует из теоремы 1, и соответствующая цепная дробь может быть получена по алгоритму, описанному во втором параграфе.

4. Статья представляет собой изложение результатов 3-й главы кандидатской диссертации автора *Цепные дроби и диофантовы приближения*, Москва 1990 (на правах рукописи), выполненной в 1984–88 г.г. в МГУ им. М. В. Ломоносова.

Литература

[1] А. И. Галочкин, *О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм*, Мат. сб. 124 (1984), 416–430.

[2] —, *Уточнение оценок некоторых линейных форм*, Мат. заметки 20 (1976), 35–45.

[3] А. Н. Коробов, *Оценки некоторых линейных форм*, Вест. МГУ сер. мат.-мех. 6 (1981), 36–40.

[4] С. Ленг, *Введение в теорию диофантовых приближений*, Мир, Москва, 1970.

[5] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, Москва, 1988.

[6] Б. Г. Тасоев, *Некоторые вопросы теории непрерывных дробей*, Труды Тбилисс. унив. мат. мех. астроном. 16–17 (1984), 53–83.

[7] А. Я. Хинчин, *Цепные дроби*, Наука, Москва, 1978.

[8] Л. Эйлер, *Введение в анализ бесконечно малых*, ОНТИ, Москва, 1936.

[9] W. Adams, *Asymptotic Diophantine approximations and Hurwitz numbers*, Amer. J. Math. 83 (1967), 1083–1108.

[10] L. Bernstein, *The Jacobi–Perron Algorithm. Its Theory and Application*, Lecture Notes in Math. 207, Springer, 1971.

[11] A. J. Brentjes, *Multi-Dimensional Continued Fraction Algorithms*, Math. Centrum, Amsterdam, 1981.

[12] G. H. Hardy and E. M. Wright, *Introduction to the Theory of Numbers*, 4th ed., Oxford Univ. Press, London, 1960.

[13] O. Perron, *Grundlagen fur eine Theorie des Jacobischen Kettenbruch Algorithmus*, Math. Ann. 64 (1907), 1–76.

[14] S. Ramanujan, *Collected Papers*, Cambridge Univ. Press, 1927.

РОССИЙСКАЯ КНИЖНАЯ ПАЛАТА
ПРОЕЗД РУСАНОВА Д. 23 КВ. 87
МОСКВА 129323, РОССИЯ

Поступило 12.2.1992
и в дополненной форме 7.5.1994 (2226)