ACTA ARITHMETICA
VII (1962)

Zur Theorie der Möbiusschen μ-Funktion

von

W. Staś (Poznań)

1. G. H. Hardy und J. E. Littlewood haben gezeigt ([1], Seite 156-162) daß

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-x)^k}{k!\,\zeta(2k+1)} = O(x^{-1/4}) \tag{1.1}$$

mit der Riemannschen Vermutung gleichwertig ist (vergl. [5], Seite 328). Das wesentlich interessante ist hier, daß die Bedingung (1.1) nur von den Werten explizite abhängt, die $\zeta(s)$ rechts von der Gerade $\sigma = 1$ annimmt.

Schreiben wir (1.1) in der Gestalt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} e^{-(\beta/n)^2} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right), \tag{1.2}$$

wo $\mu(n)$ die bekannte Möbiussche μ-Funktion bezeichnet (Siehe [1], Seite 160).

Ich beabsichtige in dieser Publikation eine explizite, numerische, untere Abschätzung von (1.2) mit Turánschen Methoden zu finden.

Es bezeichne

$$M(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu(n).$$

Wir werden den folgenden Satz zeigen:

Satz. *Wenn*

$$\int_1^T \left(\frac{M(x)}{x}\right)^2 dx < a\log T, \tag{1.4}$$

dann gilt für

$$T > \max(c_0, e^{\sqrt{a}}) \tag{1.5}$$

die folgende Abschätzung

$$(1.6)\qquad \max_{Te^{-\varphi(T)}\leqslant\beta\leqslant T}\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}\right|\geqslant\frac{1}{\sqrt{T}}e^{-3\frac{\log T\log\log\log\log T}{\log\log T}};$$

$\varphi(T)=\log T\log\log\log T/\log\log T$ *und* c_0 *bezeichnet eine explizite numerische Konstante.*

Beim Beweis wird das folgende Lemma von P. Turán ausgenutzt ([6], Seite 56, Korollar I).

LEMMA. *Wenn* $z_1, z_2, \ldots, z_M$ *von einander und von* 0 *verschiedene komplexe Zahlen bedeuten, für welche* $\max_j |z_j| = 1$, *mit* $\min_{\mu\neq\nu}|z_\mu - z_\nu|\geqslant\delta$, *dann existiert bei beliebigem ganzen* m *ein ganzes* ν *mit* $m+1\leqslant\nu\leqslant m+M$ *so, daß*

$$(1.7)\qquad \frac{|b_1z_1^\nu+\ldots+b_Mz_M^\nu|}{\sum_{j=1}^{M}|b_j|\,|z_j|^\nu}\geqslant\frac{\delta^{M-1}}{M2^M}.$$

Es wäre interessant die Voraussetzung (1.4) die eigentlich schärfer als die Riemannsche Vermutung ist, abzuschwächen. In diesem Fall mußte aber die Beweismethode etwas anders sein. Man mußte scheinbar den Turánschen Satz X anwenden ([6], Seite 52). Auf dieses Problem möchte ich noch zurückkommen.

2. Aus (1.4) folgt bekanntlich die Riemannsche Vermutung (Vergl. [3], Satz 477, Seite 154). Es sind also die folgenden Sätze anwendbar:

Für jedes $T\geqslant c_1$, *gibt es ein solches* t_T, $T<t_T<T+1$, *daß auf* $-1\leqslant\sigma\leqslant 2$,

$$(2.1)\qquad \frac{1}{|\zeta(\sigma+it_T)|}\leqslant T^{c_2}$$

gilt ([5], Theorem 14.16, Seite 303, [2]).

Bei festem η, *auf* $0<\eta<2$, *für* $t\geqslant 11$ *gilt*

$$(2.2)\qquad \frac{1}{|\zeta(\frac{1}{2}+\eta+it)|}\leqslant t^{\frac{c_3}{\eta\log^{\eta/3}t}}$$

([3], Seite 164).

Aus (1.4) folgt außerdem:

(2.3) *Alle nichttrivialen Nullstellen von* $\zeta(s)$ *sind einfach*

([5], Theorem 14.16, Seite 303).

Es gilt

$$(2.4)\qquad \frac{1}{|\zeta'(\varrho)|}\leqslant\sqrt{\alpha}\,|\varrho|$$

wo ϱ *die komplexen Nullstellen von* $\zeta(s)$ *bezeichnet* ([5], [2]).

Wenn ϱ_1, ϱ_2 *zwei verschiedene komplexe Nullstellen von* $\zeta(s)$ *bezeichnet, dann gilt*

$$(2.5)\qquad |\varrho_1-\varrho_2|\geqslant\frac{1}{15\sqrt{\alpha}\,(\max_{i=1,2}|\varrho_i|)^4}$$

([5], Theorem 14.31, Seite 326, [2]).

Bevor wir zum Beweis von (1.6) kommen, stellen wir einige Sätze über $\Gamma(s)$ und $\zeta(s)$ zusammen, welche im folgenden notwending sind.

Es gilt für die Eulersche Γ*-Funktion*

$$(2.6)\qquad |\Gamma(\sigma+it)|=\frac{k\Gamma(1+\sigma)}{\sqrt{\sigma^2+t^2}}\sqrt{\frac{2\pi t}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}}$$

und $1\leqslant k\leqslant\sqrt{1+t^2}$, $0<\sigma<1$ ([4], Seite 25).

Bezeichnen wir mit $N(\tau)$ *die Anzahl der Nullstellen von* $\zeta(s)$ *im* $0<\sigma<1$, $0<t\leqslant\tau$, $\tau\geqslant 2$ *dann gilt offenbar*

$$(2.7)\qquad N(\tau+1)-N(\tau)<c_4\log\tau.$$

Es gilt die folgende Funktionalgleichung der Riemannschen ζ*-Funktion*:

$$(2.8)\qquad \Gamma(s)\zeta(2s)=\pi^{-\frac{1}{2}+2s}\Gamma(\tfrac{1}{2}-s)\zeta(1-2s)$$

([5], Seite 22).

(2.9) *Die ersten komplexen Wurzeln von* $\zeta(s)$ *sind* $\frac{1}{2}\pm i\,14{,}13\ldots$

([5], Seite 330).

3. Sei $T\geqslant 1000$. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$(3.1)\qquad \varepsilon=(\log\log T)^{-1},$$

$$(3.2)\qquad \omega=2\log T,$$

$$(3.3)\qquad \omega_0=2\log T\log\log\log T(\log\log T)^{-1}.$$

Für die ganze Zahl k setzen wir voraus, daß sie die folgende Ungleichung erfüllt:

$$(3.4)\qquad (1-\varepsilon)\frac{\log T}{\log\log T}\leqslant k\leqslant\frac{\log T}{\log\log T}.$$

Es bezeichne weiter

$$(3.5)\qquad l=\frac{\log T}{(\log\log T)^4}.$$

4. Wenden wir auf (1.2) die bekannte Formel von Cahen-Mellin. Daraus ergibt sich unsere Ausgangsformel.

$$(4.1)\qquad \beta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/n)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\beta^{2s}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{\zeta(2s)}ds,$$

$\beta>0$, $s=\sigma+it$ ([1], Seite 158).

Setzen wir

$$\beta = e^{\omega_1/2} \tag{4.2}$$

und integrieren (4.1) k-mal, von $\omega-\omega_0$ bis $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_k, \omega$. Bezeichnen wir die Summe in (4.1) mit $H(\beta)$. Dann gilt nach der Integration:

$$I_\omega = \int\limits_{\omega-\omega_0}^{\omega}\int\limits_{\omega-\omega_0}^{\omega_k}\ldots\int\limits_{\omega-\omega_0}^{\omega_3}\int\limits_{\omega-\omega_0}^{\omega_2}\{e^{\omega_1/2}H(e^{\omega_1/2})\}\,d\omega_1\ldots d\omega_k \tag{4.3}$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\frac{e^{\omega s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^k\zeta(2s)}\,ds - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\omega_0^{k-j}}{(k-j)!}\int\limits_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\frac{e^{(\omega-\omega_0)s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^j\zeta(2s)}\,ds\,.$$

Einerseits hat man einfach

$$I_\omega \leqslant \frac{\omega_0^k}{k!}\max_{\omega-\omega_0\leqslant\omega_1\leqslant\omega}|e^{\omega_1/2}H(e^{\omega_1/2})|\,. \tag{4.4}$$

Durch geeignete Konturintegration und Grenzübergang bekommt man

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\frac{e^{\omega s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^k\zeta(2s)}\,ds = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\frac{1}{4}-\varepsilon)}\frac{e^{\omega s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^k\zeta(2s)}\,ds + 2^{k-1}\sum_{\varrho}\frac{e^{\omega\varrho/2}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\varrho^k\zeta'(\varrho)}\,. \tag{4.5}$$

Der Beweis von (4.5) folgt aus (2.2), (2.1), (2.3), (2.6) und (2.8).

Aus (4.3) und (4.5) hat man nun

$$I_\omega = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\frac{1}{4}-\varepsilon)}\frac{e^{\omega s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^k\zeta(2s)}\,ds + 2^{k-1}\sum_{\varrho}\frac{e^{\omega\varrho/2}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\varrho^k\zeta'(\varrho)} - \tag{4.6}$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\omega_0^{k-j}}{(k-j)!}\int\limits_{(\frac{1}{2}+\varepsilon)}\frac{e^{(\omega-\omega_0)s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^j\zeta(2s)}\,ds\,.$$

Die Summe in (4.6) teilen wir jetzt in zwei Summen

$$\sum_{\varrho}(\ldots) = \sum_{|\Im\varrho|>l}(\ldots) + \sum_{|\Im\varrho|\leqslant l}(\ldots)\,, \tag{4.7}$$

wo l mit (3.5) bestimmt ist.

Aus der Abschätzung der ersten Teilsumme, wegen (2.4), (2.6) und (2.7) ergibt sich

$$\Bigl|2^{k-1}\sum_{|\Im\varrho|>l}(\ldots)\Bigr| \leqslant c_5\sqrt{a}\,\frac{2^k e^{\omega/4}}{(k-1)([l]-1)^{k-1}} \tag{4.8}$$

und wegen (3.2), (3.4) und (3.5) endlich

$$\leqslant \sqrt{a}\,e^{-8\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}\,.$$

Wir werden jetzt die Integrale in (4.6) explizite abschätzen müssen. Der Integrationsweg des zweiten Integrals in (4.6) läßt sich bis zu der Gerade $\sigma = \frac{1}{4}+\varepsilon$ verschieben (Vergl. die Bemerkungen betreffs (4.5)).

Man hat also

$$\Bigl|\int\limits_{(\frac{1}{4}+\varepsilon)}\frac{e^{(\omega-\omega_0)s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^j\zeta(2s)}\,ds\Bigr|$$

$$\leqslant e^{(\omega-\omega_0)(\frac{1}{4}+\varepsilon)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{|\Gamma(\frac{1}{4}-\varepsilon-it)|}{\bigl(t^2+(\frac{1}{4}+\varepsilon)^2\bigr)^{1/2}|\zeta(\frac{1}{2}+2\varepsilon+2it)|}\,dt$$

$$\leqslant 2e^{(\omega-\omega_0)(\frac{1}{4}+\varepsilon)}\Bigl(\int\limits_{0}^{11} + \int\limits_{11}^{\varphi(\varepsilon)} + \int\limits_{\varphi(\varepsilon)}^{\infty}\Bigr)$$

$\varphi(\varepsilon)$ muß so gewählt sein, damit für $t\geqslant\varphi(\varepsilon)$, die Ungleichung

$$\frac{c_8}{t^{2\varepsilon}\log^{2\varepsilon/3}t} \leqslant e^{\frac{1}{4}\pi t} \tag{4.9}$$

erfüllt war. Es genügt ersichtlich

$$\varphi(\varepsilon) = \Bigl(\frac{c_6}{\varepsilon}\Bigr)^2$$

zu setzen; also wegen (3.1)

$$\varphi(\varepsilon) = (c_6\log\log T)^2$$

zu wählen.

Aus (2.2), (2.6) und (2.9) bekommt man einfach für $T > c_{10}$

$$\int\limits_{\varphi(\varepsilon)}^{\infty}(\ldots)\,dt \leqslant c_8\,, \qquad \int\limits_{0}^{11}(\ldots)\,dt \leqslant c_9$$

und endlich wegen (2.2), (2.6) und (4.9), für $T > c_{11}$

$$\int\limits_{11}^{\varphi(\varepsilon)}(\ldots)\,dt \leqslant T^{\frac{(\log\log T)^2(\log\log\log T)^2}{\log T}}\,.$$

Man hat daraus für $T > c_{12}$

$$\Bigl|\int\limits_{(\frac{1}{4}+\varepsilon)}\frac{e^{(\omega-\omega_0)s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^j\zeta(2s)}\,ds\Bigr| \leqslant e^{(\omega-\omega_0)(\frac{1}{4}+\varepsilon)}\,T^{\frac{(\log\log T)^2(\log\log\log T)^2}{\log T}} \tag{4.10}$$

und endlich

$$\Bigl|\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\frac{\omega_0^{k-j}}{(k-j)!}\int\limits_{(\frac{1}{4}+\varepsilon)}\frac{e^{(\omega-\omega_0)s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^j\zeta(2s)}\,ds\Bigr| \tag{4.11}$$

$$\leqslant c_{13}k\Bigl(\frac{e\omega_0}{k}\Bigr)^k e^{(\frac{1}{4}+\varepsilon)(\omega-\omega_0)}\,T^{\frac{(\log\log T)^2(\log\log\log T)^2}{\log T}}\,.$$

$$\leqslant c_{14}\sqrt{T}\,e^{-\frac{1}{8}\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}\,.$$

Auf ähnlichem Weg folgt aus (2.2), (2.6) und (2.8) die Abschätzung des ersten Integrals in (4.6):

$$(4.12)\qquad \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{4}-\varepsilon)}\frac{e^{\omega s}\Gamma(\frac{1}{2}-s)}{s^k\zeta(2s)}ds\right| \leqslant c_{15}e^{(\frac{1}{4}-\varepsilon)\omega}T^{\frac{(\log\log T)^2(\log\log\log T)^2}{\log T}}$$

und endlich wegen (3.2)

$$\leqslant c_{16}\sqrt{T}\,e^{-\frac{\log T}{\log\log T}}.$$

Aus (4.4), (4.6), (4.8), (4.11) und (4.12) hat man nun

$$(4.13)\qquad \left|2^{k-1}\sum_{|\Im\varrho|\leqslant l}\frac{e^{\omega\varrho/2}\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)}{\varrho^k\zeta'(\varrho)}\right| \leqslant \frac{\omega_0^k}{k!}\max|e^{\omega_1/2}H(e^{\omega_1/2})|+$$

$$+\sqrt{a}\,e^{\frac{3\log T\log\log\log T}{\log\log T}}+c_{17}\sqrt{T}\,e^{-\frac{\log T}{\log\log T}}+c_{18}\sqrt{T}\,e^{-\frac{1}{4}\cdot\frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}}.$$

Bezeichnen wir mit ϱ_1 die erste komplexe Wurzel von $\zeta(s)$. Nach (2.9) hat man, mit L die linke Seite von (4.13) bezeichnend:

$$(4.14)\qquad L = 2^{k-1}\frac{e^{\omega/4}}{|\frac{1}{2}+i14{,}13\ldots|^k}\left|\sum_{|\Im\varrho|\leqslant l}\frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho)\,e^{\frac{1}{2}\omega(\varrho-\varrho_1)}}{\zeta'(\varrho)}\left(\frac{\varrho_1}{\varrho}\right)^k\right|.$$

Sei Z die Summe in (4.14). Wir schätzen $|Z|$ von unten mit Hilfe des Turánschen Lemmas (1.7) ab.

Wir setzen

$$(4.15)\qquad b_\mu = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho_\mu)\,e^{\frac{1}{2}\omega(\varrho_\mu-\varrho_1)}}{\zeta'(\varrho_\mu)},$$

$$(4.16)\qquad z_\mu = \frac{\varrho_1}{\varrho_\mu}.$$

Die Bedingung $\max\limits_\mu|z_\mu| = 1$, ist wegen (4.16) sicherlich erfüllt. Wir müssen jetzt den Wert des in Lemma (1.7) vorkommenden δ feststellen. Aus (2.5) und (2.9) hat man

$$|z_\mu-z_\nu| = \frac{|\varrho_1|}{|\varrho_\mu|\,|\varrho_\nu|}|\varrho_\nu-\varrho_\mu| \geqslant \frac{|\frac{1}{2}+i14{,}13\ldots|}{|\frac{1}{2}+i\gamma_\mu|\,|\frac{1}{2}+i\gamma_\nu|}\cdot\frac{1}{15\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{\max(|\varrho_\mu|,|\varrho_\nu|)^4}.$$

Aus $|\Im\varrho|\leqslant l$ und (3.5) hat man weiter für $T>\max(c_{20}, e^{\sqrt{a}})$,

$$(4.17)\qquad |z_\mu-z_\nu| \geqslant \frac{\sqrt{\frac{1}{4}+14^2}}{15\sqrt{a}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{\frac{1}{4}+l^2})^6} \geqslant \frac{(\log\log T)^{23}}{\log^7 T} \overset{\mathrm{Def}}{=} \delta.$$

Aus Satz (1.7) folgt

$$(4.18)\qquad |Z| \geqslant \frac{\delta^{M-1}}{M2^M}\sum_{\nu=1}^{M}|b_j|\,|z_j|^k \geqslant \frac{\delta^{M-1}}{M2^M}|b_1|,$$

wo k die Bedingung

$$m+1\leqslant k\leqslant m+M$$

erfüllt. Wir wählen m in Übereinstimmung mit (3.4), also

$$m = (1-\varepsilon)\frac{\log T}{\log\log T}-1.$$

Wegen (2.7) und (3.5) ist die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im $0<\sigma<1$, $0\leqslant t\leqslant l$, $T>c_{21}$,

$$N(l)\leqslant\frac{\log T}{(\log\log T)^3}.$$

Man kann also

$$(4.19)\qquad M = \frac{\log T}{(\log\log T)^3}$$

setzen und damit ist die Bedingung für k erfüllt.

Jetzt müßen wir das $|b_1|$ in (4.18) ausrechnen. Wegen (2.3) und (2.6) hat man

$$(4.20)\qquad |b_1| = \frac{|\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\varrho_1)|}{|\zeta'(\varrho_1)|} = \frac{|\Gamma(\frac{1}{4}-i\,7{,}065\ldots)|}{|\zeta'(\varrho_1)|} = c_{22}\neq 0.$$

Aus (4.18), (4.17), (4.19) und (4.20) folgt einfach für $T>c_{23}$

$$|z|\geqslant c_{22}\frac{\left\{\frac{(\log\log T)^{23}}{\log T}\right\}^{\frac{\log T}{(\log\log T)^3}-1}}{\frac{\log^7 T}{(\log\log T)^3}\,2^{\frac{\log T}{(\log\log T)^3}}} \geqslant e^{-4\frac{\log T}{(\log\log T)^2}}$$

und endlich aus (4.14)

$$(4.21)\qquad L\geqslant\left(2^{\frac{1}{2}\cdot\frac{\log T}{\log\log T}}\right)\left(\frac{\sqrt{T}}{|\frac{1}{2}+i14{,}13\ldots|^{\frac{\log T}{\log\log T}}}\right)|z|$$

$$\geqslant\sqrt{T}\,e^{-5\frac{\log T}{(\log\log T)^2}},\qquad T>c_{24}.$$

Aus (4.13) und (4.21) ergibt sich

$$(4.22)\qquad \frac{\omega_0^k}{k!}\max_{\omega-\omega_0\leqslant\omega_1\leqslant\omega}|e^{\omega_1/2}H(e^{\omega_1/2})|\geqslant\tfrac{1}{2}\sqrt{T}\,e^{-5\frac{\log T}{(\log\log T)^2}}.$$

Aus (3.3) und (3.4) folgt aber

$$\frac{\omega_0^k}{k!}\leqslant\frac{(e\omega_0)^k}{k^k}\leqslant e^{2\frac{\log T\log\log\log\log T}{\log\log T}}.$$

Wir erhalten nun endlich

$$\max_{\omega-\omega_0\leqslant\omega_1\leqslant\omega} |e^{\omega_1/2}H(e^{\omega_1/2})| \geqslant \sqrt{T}\, e^{-3\frac{\log T\log\log\log\log T}{\log\log T}}$$

und daraus wegen (4.2), (3.2), (3.3) und der Definition von $H(\beta)$

$$\max_{Te^{-\varphi(T)}\leqslant\beta\leqslant T} \left|\beta\sum_{1}^{\infty}\frac{\mu(n)}{n}e^{-(\beta/2)^2}\right| \geqslant \sqrt{T}\, e^{-3\frac{\log T\log\log\log\log T}{\log\log T}}$$

für

$$T > \max(c_{25}, e^{\sqrt{a}}), \qquad \varphi(T) = \frac{\log T\log\log\log T}{\log\log T}.$$

Daraus bekommt man einfach (1.6) und damit ist unser Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918), pp. 117-196.

[2] S. Knapowski, *On the Möbius function*, Acta Arith. 4 (1958), pp. 209-216.

[3] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. II, Leipzig 1927.

[4] N. Nielsen, *Handbuch der Theorie der Gammafunktion*, Leipzig 1906.

[5] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.

[6] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
ADAM MICKIEWICZ UNIVERSITÄT IN POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 12. 3. 1962

ACTA ARITHMETICA
VII (1962)

Arithmetical notes, IX.
On the set of integers representable as a product of a prime and a square

by

E. Cohen (Knoxville, Tennessee)

1. Introduction. In this note we obtain an asymptotic determination of the number $A(x)$ of positive integers n not exceeding x which are expressible as the product of a prime by a square. In particular, we show that

$$A(x) \sim \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x}{\log x} \quad \text{as} \quad x\to\infty. \tag{1.1}$$

Actually, a more precise approximation to $A(x)$ is deduced (Theorem 2.1.) The proof is based upon the prime number theorem and a simple factorization principle (Remark, § 2). Using the theorem of § 2 on $A(x)$, a similar result is derived for a related problem in § 3.

2. The main result. Let A denote the set of all n which can be represented as a prime multiplied by a square. Since every n is uniquely expressible as a product of a square-free number and a square, we have immediately the

Remark. If n is in A, then n has a factorization $n = pQ$, p prime, Q square, and this representation is unique.

In addition to this remark we shall use the prime number theorem in the form

$$\pi(x) = \frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right), \tag{2.1}$$

where $\pi(x)$ denotes, as usual, the number of primes $\leqslant x$ (Landau [2], § 54).

Theorem 2.1. *If $x \geqslant 2$, then*

$$A(x) = \frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{x}{\log x} + O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right). \tag{2.2}$$