In virtue of the theorem quoted in § 1, one of the fractions V/W and $-V/W$ must be a reduct of expansion (2), and thus we have, for some $r \geqslant 0$: $\pm V/W = T_r/U_r$,

$$T_r^2 - f U_r^2 = \text{const},$$

and the degree of T_r, equal to the degree of V, is less than the degree of T_s by (12). Since this is incompatible with the definition of s, $f(x)$ must be reducible in the field $K(\sqrt{C})$, which completes the proof.

References

[1] N. H. Abel, *Über die Integration der Differential-Formel $\varrho dx/\sqrt{R}$, wenn R und ϱ ganze Funktionen sind*, Journal f. d. r. u. a. Math. 1 (1826), pp. 185-221.

[2] G. H. Halphen, *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, Paris 1886-1891.

[3] T. Nagell, *Solution de quelques problèmes dans la théorie arithmétique des cubiques planes du premier genre*, Vid. Akad. Skrifter Oslo I, 1935, Nr. 1.

[4] — *Problems in the theory of exceptional points on plane cubics of genus one*, Den 11te Skandinaviske Matematikerkongress, Trondheim 1949, pp. 71-76.

[5] A. Schinzel, *On some problems of the arithmetical theory of continued fractions*, Acta Arithm. 6 (1961), pp. 393-413.

[6] H. Schmidt, *Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen*, Math. Z. 52 (1950), pp. 168-192.

[7] P. Tchebicheff, *Sur l'intégration des différentielles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du troisième ou du quatrième degré*, Journal des math. pures et appl. (2) 2 (1857), pp. 1-42.

[8] — *Sur l'integration de la differentielle* $\dfrac{x+A}{\sqrt{x^4+ax^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}dx$, Journal des math. pures et appl. (2) 9 (1864), pp. 225-246.

[9] G. Zolotareff, *Sur la méthode d'intégration de M. Tchebicheff*, Journal des math. pures et appl. (2) 19 (1874), pp. 161-188.

Reçu par la Rédaction le 7. 10. 1961

ACTA ARITHMETICA
VII (1962)

Über die Normalität von Zahlen zu verschiedenen Basen

von

Wolfgang M. Schmidt (New York)

1. Einleitung. Cassels [1] zeigte die Existenz reeller Zahlen, die zwar nicht zur Basis 3, jedoch zu jeder Basis r normal sind, die keine Potenz von 3 ist. Unabhängig davon bewies der Author [2] kurz darauf: *Normalität zur Basis r impliziert Normalität zur Basis s genau dann, wenn s rationale Potenz von r ist.* Wir bezeichnen daher natürliche Zahlen r, s äquivalent und setzen $r \sim s$, falls jede der beiden Zahlen rationale Potenz der anderen ist. In dieser Arbeit beweisen wir den folgenden

Satz. *Gegeben sei eine Einteilung der Zahlen $2, 3, \ldots$ in zwei fremde Klassen R, S derart, daß äquivalente Zahlen in dieselbe Klasse fallen. Dann gibt es reelle Zahlen, die normal zu jeder Basis aus R und anormal zu jeder Basis aus S sind.*

Wir konstruieren Zahlen mit den erwähnten Eigenschaften explizit, und geben daher mehr als einen reinen Existenzbeweis. Am Ende der Arbeit skizzieren wir einen Beweis dafür, daß die Menge $M(R, S)$ dieser Zahlen die Mächtigkeit $\mathfrak{c}$ des Kontinuums hat. Da die Menge der Klasseneinteilungen R, S ebenfalls kontinuierliche Mächtigkeit hat, ergibt dies eine nette (freilich komplizierte!) Illustration der Gleichung $\mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$.

Der Bequemlichkeit halber nehmen wir im folgenden an, S sei nicht leer. Für leeres S ist der Satz wohlbekannt. Außerdem werden wir am Ende zeigen, wie sich unsere Konstruktion auf diesen Fall übertragen läßt.

2. Hilfssätze. Wir schreiben $[\nu]$ für die ganze Zahl n, die $n \leqslant \nu < n+1$ leistet, und $\{\nu\}$ für $-[-\nu]$. In diesem Abschnitt sind r, s feste ganze Zahlen größer als 1, die $r \nsim s$ erfüllen, und $a_1, a_2, \ldots$ sind positive Konstanten, die nur von r und s abhängen.

Sind

$$r = p_1^{d_1} \ldots p_h^{d_h}, \quad s = p_1^{e_1} \ldots p_h^{e_h} \quad (d_i + e_i \neq 0)$$

die Primzerlegungen von r und s, dann dürfen wir

$$d_1/e_1 \geqslant \ldots \geqslant d_h/e_h$$

annehmen. ($d/0$ bedeutet hier $+\infty$). Wir schreiben b für das Produkt des Maximums der d_i mit dem Maximum der e_i. Mit l_i bezeichnen wir Zahlen, für die $p_i^{2b} \nmid l_i$. Die Zahlen

$$\begin{aligned} u_i &= (p_1^{d_1}\dots p_i^{d_i})^{e_i}(p_1^{e_1}\dots p_i^{e_i})^{-d_i} \\ v_i &= (p_{i+1}^{e_{i+1}}\dots p_h^{e_h})^{d_i}(p_{i+1}^{d_{i+1}}\dots p_h^{d_h})^{-e_i}, \end{aligned} \qquad (1\leqslant i\leqslant h)$$

wobei der Ausdruck 1 für $i=h$ bedeuten soll, sind ganz. $t_i = u_i/v_i$ ist infolge $r \not\sim s$ nicht 1, und p_i ist weder ein Teiler des Zählers noch des Nenners von t_i.

Wir setzen

$$f_i = \begin{cases} p_i-1, & \text{falls } p_i \text{ ungerade},\\ 2, & \text{falls } p_i=2. \end{cases}$$

Dann gibt es wohldefinierte ganze g_i, sodaß

$$t_i^{f_i} \equiv 1 + q_i p_i^{g_i-1} \pmod{p_i^{g_i}},$$

wobei $p_i \nmid q_i$. Es ist $g_i>1$ und sogar $g_i>2$, falls $p_i=2$. Durch Induktion nach e findet man

$$t_i^{f_i p_i^e} \equiv 1+q_i p_i^{g_i-1+e} \pmod{p_i^{g_i+e}}.$$

Da die Ordnung von t_i modulo $p_i^{g_i+e}$ ein Teiler von $f_i p_i^{g_i+e-1}$ ist, folgt, daß diese Ordnung ein Vielfaches von p_i^e ist.

Ist $k \geqslant g_i$ und läuft n durch ein Vertretersystem modulo p_i^k, dann fallen höchstens $p_i^{2b}p_i^{g_i}$ der Zahlen $t_i^n l_i$ in dieselbe Restklasse modulo p_i^k. Falls $p_i|s$, dann enthält ein Repräsentantensystem modulo s^k genau $(s/p_i)^k$ und daher höchstens $(s/2)^k$ Elemente, die modulo p_i^k kongruent sind. Indem wir $a_1 = \max(g_1,\dots,g_h)$ setzen, erhalten wir

Hilfssatz 1. *Sei $k\geqslant a_1$, $e_i>0$. Läuft nun n durch ein Vertretersystem modulo s^k, dann fallen höchstens $a_2(s/2)^k$ der Zahlen $l_i t_i^n$ in dieselbe Restklasse modulo s^k.*

Unter *Ziffern* (zur Basis s) verstehen wir die Zahlen $0,1,\dots,s-1$. Ein *braves Ziffernpaar* ist ein Paar cc' von Ziffern, die nicht beide gleich 0 oder beide gleich $s-1$ sind. Unter Ziffernpaaren einer natürlichen Zahl x verstehen wir die Paare $0c_x, c_xc_{x-1},\dots,c_2c_1$ in der Entwicklung $x = c_x\dots c_2c_1$ zur Basis s. In [2], lemma 3, bewiesen wir: *Sei $k\geqslant a_3$. Dann ist die Anzahl der natürlichen $x<s^k$ mit weniger als a_4k braven Ziffernpaaren höchstens gleich $2^{3k/4}$.*

Hilfssatz 2. *Sei N gegeben, sodaß die N Zahlen*

(1) $$l_i,\ l_it_i,\ \dots,\ l_it_i^{N-1}$$

ganz sind, und sei $e_i>0$. Dann haben alle bis auf höchstens N^{1-a_5} dieser Zahlen mindestens $a_6\log N$ brave Ziffernpaare.

Beweis. Wir dürfen $N\geqslant s^{a_1}$, $N\geqslant s^{a_3+1}$ annehmen. Wähle k so, daß $s^k\leqslant N<s^{k+1}$. Dann können wir $0\leqslant x<N-1$ in s Teilintervalle zerlegen, deren jedes höchstens s^k ganze Zahlen enthält. Man findet die Schranke

$$a_2(s/2)^k s 2^{3k/4} < a_7 N^{1-a_5}$$

für die Anzahl der Zahlen (1), die weniger als $a_6\log N < a_4 k$ brave Ziffernpaare besitzen. Indem wir, wenn nötig, a_5 und a_6 verkleinern, dürfen wir $a_7=1$ setzen, und erhalten Hilfssatz 2.

Hilfssatz 3. *Sei l natürlich. Dann haben höchstens N^{1-a_8} der ersten N Zahlen der Folge*

(2) $$l,\ lr,\ lr^2,\ \dots$$

weniger als $a_9\log N$ brave Ziffernpaare.

Bemerkung. a_8, a_9 sind von l unabhängig.

Beweis. Setze $z(x)$ für die Anzahl der braven Ziffernpaare von x. Offenbar ist $z(sx)\geqslant z(x)$, und man darf daher Faktoren s von Zahlen y abspalten, wenn man untere Schranken für $z(y)$ geben will. Speziell dürfen wir $s\nmid l$ annehmen. Es gibt dann ein i in $1\leqslant i\leqslant h$, sodaß $p_i|s$ und $p_i^b\nmid l$. Sei i_1 die größte Zahl mit dieser Eigenschaft, und setze $l_{i_1}=l$. Aus $p_{i_1}|s$ folgt $p_{i_1+1}|s,\dots,p_h|s$, und daher $p_{i_1+1}^b|l,\dots,p_h^b|l$, folglich $v_{i_1}|l_{i_1}$.

Daher ist $l_{i_1}t_{i_1}$ ganz. Ist $l_{i_1}t_{i_1}^n$ ganz, dann ist $l_{i_1}r^{ne_{i_1}} = l_{i_1}(t_{i_1}s^{d_{i_1}})^n$, und wir dürfen $l_{i_1}r^{ne_{i_1}}$ durch $l_{i_1}t_{i_1}^n$ ersetzen. Entweder ist $l_{i_1}t_{i_1}^n$ ganz für jedes natürliche n (dies ist etwa der Fall, wenn $i_1=h$), oder es gibt ein größtes n, etwa n_1, mit dieser Eigenschaft .Im ersten Fall ersetzen wir die Folge (2) durch

$$l_{i_1},\ l_{i_1}r,\ \dots,\ l_{i_1}r^{e_{i_1}-1},\ l_{i_1}t_{i_1},\ l_{i_1}t_{i_1}r,\ \dots,\ l_{i_1}t_{i_1}^2,\ \dots,\ l_{i_1}t_{i_1}^3,\ \dots$$

Im zweiten Fall ersetzen wir sie durch

$$l_{i_1},\ l_{i_1}r,\ \dots,\ l_{i_1}t_{i_1},\ \dots,\ l_{i_1}t_{i_1}^{n_1},\ l_{i_1}t_{i_1}^{n_1}r,\ l_{i_1}t_{i_1}^{n_1}r^2,\ \dots$$

Im zweiten Fall sei i_2 die größte Zahl, sodaß $p_{i_2}^b\nmid l_{i_1}t_{i_1}^{n_1}$. Offenbar ist $i_2>i_1$, denn sonst wäre $l_{i_1}t_{i_1}^{n_1+1}$ ganz. Wir setzen nun $l_{i_2}=l_{i_1}t_{i_1}^{n_1}$ und behandeln die Folge $l_{i_2}, l_{i_2}r, l_{i_2}r^2,\dots$ genau so, wie wir die ursprüngliche Folge (2) behandelten. Dieser Prozeß wird fortgesetzt. Wegen $i_1<i_2<\dots\leqslant h$ muß er einmal abbrechen, das heißt, wir werden zu einem i_g gelangen, sodaß $l_{i_g}t_{i_g}^n$ für jedes natürliche n ganz ist. Wir ersetzen daher die Folge (2) durch

(3) $$\begin{array}{l} l_{i_1},\ l_{i_1}r,\ \dots,\ l_{i_1}t_{i_1},\ \dots,\ l_{i_1}t_{i_1}^2,\ \dots,\ l_{i_1}t_{i_1}^{n_1-1}r^{e_{i_1}-1}, \\ l_{i_2},\ l_{i_2}r,\ \dots,\ l_{i_2}t_{i_2},\ \dots,\ l_{i_2}t_{i_2}^2,\ \dots,\ l_{i_2}t_{i_2}^{n_2-1}r^{e_{i_2}-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ l_{i_g},\ l_{i_g}r,\ \dots,\ l_{i_g}t_{i_g},\ \dots,\ l_{i_g}t_{i_g}^2,\ \dots,\ l_{i_g}t_{i_g}^3,\ \dots \end{array}$$

Da wir in (3) höchstens h Reihen haben, wird es genügen, zu zeigen, daß es unter den ersten N Gliedern einer Reihe (bzw. unter allen Gliedern, falls die Reihe weniger als N Glieder hat) höchstens $N^{1-\alpha_{10}}$ gibt, die weniger als $\alpha_{11}\log N$ brave Ziffernpaare besitzen. Wir betrachten etwa die Reihe

$$l_i, l_ir, \ldots, l_ir^{e_i-1}, l_it_i, l_it_ir, \ldots$$

Diese Reihe besteht aus e_i und daher höchstens b (endlichen oder unendlichen) Folgen der Gestalt

$$l_ir^u, l_ir^ut_i, l_ir^ut_i^2, \ldots \quad (0 \leqslant u < e_i).$$

Wir setzen $L_i = l_ir^u$ und bemerken $p_i^{2b} \nmid L_i$. Wir müssen zeigen, daß es unter den ersten N Gliedern (bzw. allen Gliedern) der Folge

$$L_i, L_it_i, L_it_i^2, \ldots \tag{4}$$

höchstens $N^{1-\alpha_{12}}$ gibt, die $z(L_it_i^n) < \alpha_{13}\log N$ haben. Ist die Anzahl der Glieder in (4) kleiner als $\sqrt{N}$, dann ist dies trivial. Ist die Anzahl der Glieder mindestens gleich $\sqrt{N}$, dann wenden wir Hilfssatz 2 (mit L_i an Stelle von l_i) an und sehen, daß höchstens $N^{1-\alpha_5}$ der Glieder weniger als $\alpha_6\log\sqrt{N} = \alpha_{13}\log N$ brave Ziffernpaare haben.

Dies beweist Hilfssatz 3.

Sei K natürlich. Wir setzen $z_K(x)$ für die Anzahl der braven Ziffernpaare $c_{i+1}c_i$ von x, für die $i \geqslant K$.

Hilfssatz 4. *Sei $l \geqslant s^K$. Dann gibt es unter den Zahlen*

$$l, lr, \ldots, lr^{N-1}$$

höchstens $N^{1-\alpha_{14}}$, deren z_K kleiner als $\alpha_{15}\log N$ ist.

Bemerkung. α_{14} und α_{15} sind von l und K unabhängig.

Beweis. Wir dürfen uns auf Zahlen lr^n beschränken, deren n in $N^{2/3}\log s/\log r \leqslant n < N$ liegt. Dieses letztere Intervall zerlegen wir in Teilintervalle der Länge $[N^{1/3}]$ und, wenn nötig, ein kleineres Intervall. Die Anzahl der Teilintervalle ist höchstens gleich $N[N^{1/3}]^{-1}+1$, und ist kleiner als $2N^{2/3}$ für großes N. Nehmen wir zunächst an, wir können zeigen, daß nicht mehr als $[N^{1/3}]^{1-\alpha_{16}}$ der Zahlen in einem Teilintervall $z_K(lr^n) < \alpha_{17}\log[N^{1/3}]$ befriedigen. Dann gibt es in $N^{2/3}\log s/\log r \leqslant n < N$ höchstens $2N^{2/3}N^{(1-\alpha_{16})/3} = 2N^{1-\alpha_{18}}$ Zahlen n, die $z_K(lr^n) < \alpha_{19}\log N < \alpha_{17}\log[N^{1/3}]$ leisten. Indem wir dann, wenn nötig, α_{18}, α_{19} verkleinern, können wir den Faktor 2 vermeiden und Hilfssatz 4 beweisen.

Es bleibt daher, die erwähnte Behauptung für Teilintervalle zu beweisen. Ist das Teilintervall etwa $n_0 \leqslant n < n_0+[N^{1/3}]$, und setzen wir $l' = lr^{n_0}$, dann lautet die Behauptung genau so wie der Hilfssatz, nur daß l durch l', N durch $[N^{1/3}]$ ersetzt wurde. Diesmal haben wir jedoch die stärkere Voraussetzung $l' \geqslant s^Kr^{n_0} \geqslant s^{K+N^{2/3}} \geqslant s^{K+[N^{1/3}]^2}$. Es wird daher genügen, den ursprünglichen Hilfssatz unter der Voraussetzung $l \geqslant s^{K+N^2}$ zu beweisen.

Wir dürfen dabei annehmen, es gebe ein n in $0 \leqslant n < N$, sodaß $z_K(lr^n) < \alpha_{15}\log N$. Sei n_1 die kleinste solche Zahl. Dann genügt es, die Behauptung für $l^* = lr^{n_1}$ an Stelle von l zu zeigen. Man darf daher von vornherein $z_K(l) < \alpha_{15}\log N$ voraussetzen.

Da nun l mindestens N^2 Ziffern c_i besitzt, deren Index i mindestens gleich K ist, und da $z_K(l) < \alpha_{15}\log N$ ist, muß es einen Block von mindestens $h = [(N^2-1)/\alpha_{15}\log N]-1$ nicht braven Ziffernpaaren

$$c_{i+h}c_{i+h-1}, \ldots, c_{i+1}c_i, \quad (i \geqslant K)$$

in der Entwicklung von l geben. Wir unterscheiden zwei Fälle:

a) $c_{i+h} = \ldots = c_i = 0$. Dann gibt es ein ganzes $\bar{l}$, sodaß

$$l = \bar{l}s^{i+h+1}+R, \quad 0 \leqslant R < s^i.$$

Infolge $0 \leqslant R < s^i$ ist $0 \leqslant Rr^N < s^is^{N\log_s r} < s^{i+h}$, falls N groß ist. Dann gilt aber für jedes $n < N$:

$$z_K(lr^n) \geqslant z_K(\bar{l}s^{i+h+1}r^n) \geqslant z(\bar{l}r^n).$$

Nach Hilfssatz 3 ist $z(\bar{l}r^n) \geqslant \alpha_9\log N$ mit höchstens $N^{1-\alpha_8}$ Ausnahmen. Da wir durch Verkleinerung der Konstanten α kleine Werte von N mit einschließen können, folgt das gewünschte Ergebnis.

b) $c_{i+h} = \ldots = c_i = s-1$. Es gibt jetzt ein $\bar{\bar{l}}$, sodaß

$$l = \bar{\bar{l}}s^{i+h+1}-R, \quad 0 < R \leqslant s^i.$$

Sobald wir

$$z_K(lr^n) \geqslant z_K(\bar{\bar{l}}s^{i+h+1}r^n)-2 \tag{5}$$

bewiesen haben, geht alles so wie in a), denn -2 kann durch kleinere Wahl der Konstanten verschluckt werden. Um (5) zu beweisen, betrachten wir die Entwicklung von $\bar{\bar{l}}s^{i+h+1}r^n$:

$$d_g \ldots d_j \ldots d_{i+h+1}00 \ldots 0, \tag{6}$$

und setzen j für die kleinste Zahl, sodaß $d_j \neq 0$. Wenn wir nun Rr^n, $n < N$, von (6) abziehen, erhalten wir eine Zahl, die immer noch die Ziffern $d_g \ldots d_{j+1}$ besitzt. Wir verlieren daher höchstens zwei brave Ziffernpaare, und (5) ist bewiesen.

Hilfssatz 5. *Seien K, l natürlich, $l \geqslant s^K$. Dann ist*

$$\sum_{r=0}^{N-1}\prod_{k=K+1}^{\infty}|\cos(\pi r^nl/s^k)| \leqslant 2N^{1-\alpha_{20}}. \tag{7}$$

Beweis. Hat x ein braves Ziffernpaar $c_{k-1}c_{k-2}$, dann ist $|\cos(\pi x/s^k)| \leqslant |\cos(\pi/s^2)| = \alpha_{21} < 1$. Nach Hilfssatz 4 sind alle bis auf höchstens $N^{1-\alpha_{14}}$ Glieder der Summe (7) höchstens gleich $\alpha_{21}{}^{\alpha_{15}\log N} < N^{-\alpha_{22}}$. Man erhält daher die Schranke $N^{1-\alpha_{14}} + N^{1-\alpha_{22}} < 2N^{1-\alpha_{20}}$ für diese Summe.

3. Konstruktion einer Menge σ. Sei $s_1, s_2, \ldots$ eine Folge ganzer Zahlen größer als 2, sodaß $s_m \leqslant ms_1$. Wir setzen

$$\langle m\rangle = \{e^{\sqrt{m}} + 2s_1m^3\}, \qquad \langle m; x\rangle = \{\langle m\rangle/\log x\}$$

für natürliche m, x wobei $x > 1$. Man findet

$$x^{\langle m;x\rangle - 1} < e^{\langle m\rangle} \leqslant x^{\langle m;x\rangle}, \tag{8}$$

$$\langle m+1\rangle - \langle m\rangle \geqslant 6s_1m^2. \tag{9}$$

Wir schreiben $h(m)$ für die kleinste Zahl h, sodaß

$$m \not\equiv 0 \pmod{2^h}.$$

Schließlich führen wir die Abkürzungen $s(m) = s_{h(m)}$, $a_m = \langle m; s(m)\rangle$, $b_m = \langle m+1; s(m)\rangle$ ein. Ist $n \geqslant m$, $s = s(m)$, dann ist

$$\begin{aligned} (10)\quad \langle n+2; s\rangle + \langle n; s\rangle - 2\langle n+1; s\rangle &\geqslant \big(2s_1((n+2)^3 + n^3 - 2(n+1)^3)/\log s\big) - 4 \\ &\geqslant \big(2s_1(6n+6)/s_1n\big) - 4 > 0. \end{aligned}$$

Ist λ reell, dann schreiben wir $\eta_m(\lambda)$ für die kleinste der Zahlen

$$\eta = gs(m)^{-a_m}, \qquad g \text{ ganz},$$

welche $\lambda \leqslant \eta$ befriedigen. Wir setzen $\sigma_m(\lambda)$ für die Menge der Zahlen

$$\eta_m(\lambda) + c^{s(m)}_{a_m+1}s(m)^{-a_m-1} + \ldots + c^{s(m)}_{b_m-2}s(m)^{-b_m+2} \tag{11}$$

mit Koeffizienten $c_i^{s(m)}$ gleich 0 oder 1.

Sei nun $\xi_0 = 0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ eine Folge reeller Zahlen, für die

$$\xi_m \in \sigma_m(\xi_{m-1}) \qquad (m = 1, 2, \ldots) \tag{12}$$

ist. Es gelten die Ungleichungen

$$\xi_{m-1} \leqslant \eta_m(\xi_{m-1}) \leqslant \xi_m \leqslant \eta_m(\xi_{m-1}) + s(m)^{-a_m} \leqslant \xi_{m-1} + 2s(m)^{-a_m}.$$

Durch mehrmalige Anwendung von (8) erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{u=m+1}^{\infty} s(u)^{-a_u} &\leqslant \sum_{u=m+1}^{\infty} e^{-\langle u\rangle} \leqslant e^{-\langle m+1\rangle}(1 + e^{-2} + e^{-4} + \ldots) \\ &< \tfrac{3}{2}e^{-\langle m+1\rangle} < \tfrac{3}{2}s(m)^{-b_m+1} \leqslant \tfrac{1}{2}s(m)^{-b_m+2}. \end{aligned}$$

Die Folge $\{\xi_m\}$ hat daher einen Grenzwert ξ, der

$$\xi_m \leqslant \xi < \xi_m + s(m)^{-b_m+2} \tag{13}$$

erfüllt.

Die Menge der auf diese Weise erhaltbaren Zahlen ξ bezeichnen wir mit σ. Es besteht eine eineindeutige Zuordnung zwischen Folgen

$$c^{s(1)}_{a_1+1}, \ldots, c^{s(1)}_{b_1-2}, c^{s(2)}_{a_2+1}, \ldots, c^{s(2)}_{b_2-2}, c^{s(3)}_{a_3+1}, \ldots \tag{14}$$

von Ziffern 0 oder 1 und Zahlen ξ aus σ: Es ist klar, wie wir jeder Folge (14) eine Folge $\{\xi_m\}$ und eine Zahl ξ aus σ zuordnen. Zur Eineindeutigkeit genügt der Nachweis, daß die so konstruierte Zahl ξ die Ziffern

$$c^{s(m)}_{a_m+1} \ldots c^{s(m)}_{b_m-2} \tag{15}$$

in der Entwicklung

$$\xi = [\xi] + 0\cdot c_1^s c_2^s \ldots$$

zur Basis $s = s(m)$ hat. Dies folgt aber aus (13) und aus der Tatsache, daß die Entwicklung von ξ_m zur Basis $s(m)$ mit den Ziffern (15) abbricht.

Hilfssatz 6. *Jede Zahl aus σ ist anormal zu jeder der Basen $s_1, s_2, \ldots$*

Beweis. Sei h fest und $s = s_h$. Sei q so groß, daß

$$(2/s)^q < 2^{-h}. \tag{16}$$

Ist $\xi \in \sigma$ und $h(m) = h$, dann sind die Ziffern (15) in der Entwicklung von ξ zur Basis s gleich 0 oder 1. Zu einer Zahl M mit $h(M) = h$ gibt es mindestens

$$\sum_{\substack{m\leqslant M\\ h(m)=h}} (b_m - a_m - 1 - q) \tag{17}$$

q-Blöcke $c_{i+1}^s \ldots c_{i+q}^s$ von Ziffern 0 oder 1 in der Entwicklung von ξ, sodaß $i+q \leqslant b_M - 2$. Nun ist $h(m) = h$ genau dann, wenn $m \equiv 2^{h-1} \pmod{2^h}$. Insbesonders ist $s(2^{h-1}) = s_h$. Ist $h(m) = h$ und $m > 2^{h-1}$, dann gilt

$$\begin{aligned} b_m - a_m - 1 - q &= \langle m+1; s\rangle - \langle m; s\rangle - 1 - q \\ &\geqslant 2^{-h} \sum_{j=m-2^h+1}^{m} (\langle j+1; s\rangle - \langle j; s\rangle - 1 - q), \end{aligned}$$

da $\langle m+1; s\rangle - \langle m; s\rangle$ infolge (10) für $m > 2^{h-1}$ eine wachsende Funktion in m ist. Die Summe (17) ist also mindestens gleich

$$2^{-h}\big(\langle M+1; s\rangle - \langle 2^{h-1}+1; s\rangle - M(1+q)\big) = 2^{-h}b_M\big(1 + o(M)\big).$$

Wäre nun ξ normal zur Basis $s = s_h$, dann wäre die Anzahl der q-Blöcke mit Ziffern 0 oder 1 und Indizes kleiner als b_M asymptotisch gleich $(2/s)^q b_M$. Infolge (16) ist dies unmöglich.

4. Konstruktion einer Zahl ξ. Sei eine den Bedingungen unseres Satzes genügende Klasseneinteilung R, S gegeben. Da der Satz im letzten Abschnitt für $R = \emptyset$ bewiesen wurde, dürfen wir $R \neq \emptyset$ annehmen. Sei $r_1, r_2, \ldots$ eine Folge von Zahlen aus R, sodaß jedes $r \in R$ mit mindestens einem r_i äquivalent ist. Ähnlich sei $s_1, s_2, \ldots$ eine Folge von Zahlen aus S, wobei wir noch $s_i > 2$ voraussetzen. Es wird genügen, eine Zahl ξ zu konstruieren, die normal ist zu den Basen $r_1, r_2, \ldots$, jedoch nicht normal zu den Basen $s_1, s_2, \ldots$

$\beta_i, \gamma_i, \delta_i$ werden positive Konstante bedeuten, die nur von den Folgen $r_1, r_2, \ldots$ und $s_1, s_2, \ldots$ abhängen. Insbesonders sei $\beta_{ij} = a_{20}(r_i, s_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$, wobei a_{20} die Konstanten aus Hilfssatz 5 bedeutet, $\beta_k = \min\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant k} \beta_{ij}$, $\gamma_k = \max(r_1, \ldots, r_k, s_1, \ldots, s_k)$. Man darf $\beta_k < 1/2$ annehmen. Wir setzen $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(k)$ für die größte ganze Zahl φ, die

$$\varphi \leqslant \varphi(k-1)+1, \qquad \beta_\varphi \geqslant \beta_1 k^{-1/4}, \qquad \gamma_\varphi \leqslant \gamma_1 k$$

leistet. Dann ist $\varphi(1), \varphi(2), \ldots$ eine wachsende Folge natürlicher Zahlen, in der jede natürliche Zahl vorkommt. Setzen wir $r_i' = r_{\varphi(i)}$, $s_i' = s_{\varphi(i)}$, dann haben die r_i' und s_i' dieselben Eigenschaften wie die r_i und s_i, sowie außerdem $\beta_k' \geqslant \beta_1' k^{-1/4}$, $\gamma_k' \leqslant \gamma_1' k$. Man darf daher annehmen, die ursprünglichen Folgen erfüllen

$$\beta_k \geqslant \beta_1 k^{-1/4}, \qquad \gamma_k \leqslant \gamma_1 k \,. \tag{18}$$

Wir konstruieren nun eine Folge $\xi_0 = 0, \xi_1, \ldots$ durch Induktion: Bei gegebenem ξ_{m-1} sei ξ_m diejenige Zahl in $\sigma_m(\xi_{m-1})$, für die die Funktion

$$A_m(x) = \sum_{\substack{t=-m \\ t\neq 0}}^{m} \sum_{i=1}^{m} \Big| \sum_{j=\langle m; r_i\rangle+1}^{\langle m+1; r_i\rangle} e(r_i^j t x) \Big|^2 \tag{19}$$

den kleinstmöglichen Wert annimmt. (Gibt es mehrere solche Zahlen, dann sei ξ_m etwa die kleinste). Unsere Folge erfüllt (12) und hat daher einen Grenzwert ξ, der zu keiner der Basen $s_1, s_2, \ldots$ normal ist.

HILFSSATZ 7. $A_m(\xi) \leqslant \delta_1 m^2 (\langle m+1\rangle - \langle m\rangle)^{2-\beta_m}$.

Beweis. $A_m(x)$ ist gleich

$$\sum_{\substack{t=-m \\ t\neq 0}}^{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=\langle m; r_i\rangle+1}^{\langle m+1; r_i\rangle} \sum_{g=\langle m; r_i\rangle+1}^{\langle m+1; r_i\rangle} e\big((r_i^j - r_i^g) t x\big) \,. \tag{20}$$

Wir schreiben $B_m(x)$ für denjenigen Teil der Summe, für den entweder $|j-g| < m$ oder j oder g mindestens gleich $\langle m+1; r_i\rangle - m$ ist, und wir schreiben $C_m(x)$ für den restlichen Teil. Man erhält die triviale Abschätzung

$$\begin{aligned} B_m(x) &\leqslant 10 m^2 \sum_{i=1}^{m} (\langle m+1; r_i\rangle - \langle m; r_i\rangle) \\ &\leqslant \delta_2 m^3 (\langle m+1\rangle - \langle m\rangle) \\ &\leqslant \delta_3 m^2 (\langle m+1\rangle - \langle m\rangle)^{2-\beta_m} \end{aligned} \tag{21}$$

infolge (9). Bezeichnen wir den Mittelwert einer Funktion $f(x)$ in $\sigma_m(\xi_{m-1})$ mit μf, dann ist $A_m(\xi_m) \leqslant \mu A_m$ und daher

$$\begin{aligned} A_m(\xi) &= B_m(\xi) + C_m(\xi) - B_m(\xi_m) - C_m(\xi_m) + A_m(\xi_m) \\ &\leqslant B_m(\xi) - B_m(\xi_m) + \mu B_m + C_m(\xi) - C_m(\xi_m) + \mu C_m \,. \end{aligned}$$

Die ersten drei Summanden rechts werden durch (21) abgeschätzt. Für die anderen Summanden brauchen wir die für $m \geqslant \delta_4$ geltende Ungleichung

$$r^{\langle m+1; r\rangle - m} m\, s(m)^{-\langle m+1; s(m)\rangle + 2} \leqslant e^{\langle m+1\rangle} r^{1-m} m\, e^{-\langle m+1\rangle} s^2(m) \leqslant 2^{1-m} m\, s^2(m) \leqslant 1/2 \,.$$

Wir setzen $L_g = (r^g - 1) r^{\langle m+1; r\rangle - m - g} t(\xi - \xi_m)$ und bemerken, daß $|L_g| \leqslant r^{\langle m+1; r\rangle - m} m\, s(m)^{-\langle m+1; s(m)\rangle + 2} \leqslant 1/2$. Der Teil des Ausdruckes für $C_m(\xi) - C_m(\xi_m)$, für den t und $r_i = r$ in (20) fest bleiben, ist höchstens gleich

$$\begin{aligned} &2 \sum_{g=1}^{\langle m+1; r\rangle - \langle m; r\rangle - m} \; \sum_{j=1}^{\langle m+1; r\rangle - \langle m; r\rangle - m - g} |e(L_g r^{-j}) - 1| \\ &\qquad \leqslant 2 \sum_{g=1}^{\langle m+1; r\rangle - \langle m; r\rangle - m} \; \sum_{j=1}^{\infty} r^{-j} < 2(\langle m+1; r\rangle - \langle m; r\rangle) \,. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise wie bei der Abschätzung von $B_m(x)$ erhalten wir daher

$$C_m(\xi) - C_m(\xi_m) \leqslant \delta_5 m^2 (\langle m+1\rangle - \langle m\rangle)^{2-\beta_m} \,.$$

Schreiben wir $f(x)$ für die Funktion $e(tx)$, dann gilt

$$|\mu f| = \big|e\big(t\eta_m(\xi_{m-1})\big)\big| \prod_{k=a_m+1}^{b_m-2} \Big|\Big(1 + e\big(ts(m)^{-k}\big)\Big)/2\Big| = \prod_{k=a_m+1}^{b_m-2} \Big|\cos\big(\pi t s(m)^{-k}\big)\Big| \,,$$

und man erhält

$$|\mu C_m| \leqslant 2 \sum_{\substack{t=-m \\ t\neq 0}}^{m} \sum_{i=1}^{m} \sum_{g=m}^{\langle m+1; r_i\rangle - \langle m; r_i\rangle - m} \; \sum_{j=1}^{\langle m+1; r_i\rangle - \langle m; r_i\rangle - m - g} \; \prod_{k=a_m+1}^{b_m-2} \Big|\cos\big(\pi (r^g - 1) r^{\langle m; r_i\rangle} r^j t s(m)^{-k}\big)\Big| \,. \tag{22}$$

Halten wir nun t, $r_i = r$ und g fest, und schreiben wir $L = (r^g - 1) r^{\langle m; r\rangle} t$, dann ist die innere Summe gleich

$$\sum_{j=1}^{\langle m+1; r\rangle - \langle m; r\rangle - m - g} \; \sum_{k=a_m+1}^{b_m-2} |\cos(\pi L r^j / s^k)| \,. \tag{23}$$

Nun ist $Lr^j/s^{\langle m+1;\, s(m)\rangle-2} \leqslant r^{\langle m+1;\, r\rangle - m} s^{-\langle m+1;\, s(m)\rangle+2} \leqslant 1/2$ und daher

$$\prod_{k=b_m-1}^{\infty} |\cos(\pi L r^j/s^k)| \geqslant \prod_{k=1}^{\infty} |\cos(\pi/2^{k+1})| = \delta_6 > 0 .$$

Die Summe (23) ist daher höchstens gleich

$$\delta_7 \sum_{j=1}^{\langle m+1;\, r\rangle - \langle m;\, r\rangle - m - g} \prod_{k=a_m+1}^{\infty} |\cos(\pi L r^j/s^k)| .$$

Infolge $|L| \geqslant (r^m-1) r^{\langle m;\, r\rangle} \geqslant (2^m-1) e^{\langle m\rangle} > (2^m-1) s(m)^{\langle m;\, s(m)\rangle - 1} = s^{a_m+1}(2^m-1)s^{-2} > s^{a_m+1}$ für $m > \delta_4$, dürfen wir Hilfssatz 5 anwenden und sehen, daß (23) höchstens gleich

$$2\delta_7(\langle m+1;\, r\rangle - \langle m;\, r\rangle)^{1-\alpha_{20}(r,s)}$$

ist.

Man erhält somit

$$\mu C_m \leqslant \delta_8 m^2(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle)^{2-\beta_m} ,$$

und infolge der ähnlichen Ungleichungen für B_m und $C_m(\xi) - C_m(\xi_m)$ ergibt sich Hilfssatz 7.

Hilfssatz 8. *ξ ist normal zu jeder der Basen $r_1, r_2, \ldots$*

Beweis. Seien $r = r_h$ und $t \neq 0$ fest. Sei $m \geqslant h$, $m \geqslant |t|$. Aus Hilfssatz 7 folgt

$$\Big| \sum_{j=\langle m;\, r\rangle}^{\langle m+1;\, r\rangle} e(r^j t \xi) \Big| \leqslant \delta_9 m(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle)^{1-\beta_m/2} .$$

Wir bilden

$$\sum\nolimits_M = \sum_{m=1}^{M-1} m(\langle m+1\rangle - \langle m\rangle)^{1-\beta_m/2} \leqslant M \sum_{m=1}^{M-1} (\langle m+1\rangle - \langle m\rangle)^{1-\beta_M/2} .$$

Unter Benützung der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{M} a_i^\varepsilon \leqslant M\Big(\sum a_i/M\Big)^\varepsilon < M\Big(\sum a_i\Big)^\varepsilon$$

erhalten wir

$$\sum\nolimits_M \leqslant M^2 \langle M\rangle^{1-\beta_M/2} = O(M^2 e^{\sqrt{M}(1-\delta_{10}M^{-1/4})}) = o(\langle M\rangle) = o(\langle M;\, r\rangle) .$$

Da $\langle M+1;\, r\rangle - \langle M;\, r\rangle = o(\langle M;\, r\rangle)$, ist

$$\sum_{j=1}^{N} e(r^j t \xi) = o(N) .$$

Dies ist für jedes ganze $t \neq 0$ richtig. Nach Weyl's Kriterium ist daher die Folge $\xi, \xi r, \xi r^2, \ldots$ gleichverteilt modulo 1, und folglich ist ξ normal zur Basis r.

5. Schlußbemerkungen. Wir stellen zunächst fest, daß man mit etwas mehr Mühe Konstanten $\alpha_{20}(r, s)$ aus Hilfssatz 5 explizit berechnen könnte, und daß dann ξ eine eindeutig definierte Zahl ist. Um einzusehen, daß $M(R, S)$ kontinuierliche Mächtigkeit hat, konstruieren wir kontinuierlich viele Folgen $\xi_0 = 0$, $\xi_1, \ldots$ folgendermaßen: Bei gegebenem ξ_{m-1} sei ξ_m eine Zahl in $\sigma_m(\xi_{m-1})$, für die $A_m(x)$ den kleinsten oder zweitkleinsten Wert annimmt. Jeder Grenzwert einer solchen Folge ist in $M(R, S)$.

Für leeres S kann unsere Konstruktion so abgeändert werden: Wir wählen eine Folge natürlicher Zahlen $s(1), s(2), \ldots$ größer als 2, sodaß $s(m) \leqslant ms(1)$, und daß es zu jedem r ein $m_0(r)$ gibt, sodaß $r \not\sim s(m)$ für $m \geqslant m_0$. Unter Benützung dieser Folge $\{s(m)\}$ konstruieren wir eine Menge σ so wie in § 3. Um ξ zu konstruieren, benützen wir anstatt $A_m(x)$ eine modifizierte Funktion $A'_m(x)$, in der die Summe

$$\sum_{i=1}^{m} \quad \text{durch} \quad \sum_{\substack{r_i,\, i \leqslant m \\ m_0(r_i) \leqslant m}}$$

ersetzt ist. Da nun $r_i \not\sim s(m)$, kann $A'_m(\xi)$ ähnlich abgeschätzt werden wie $A_m(\xi)$ in § 4, und ξ ist absolut normal.

Literaturverzeichnis

[1] J. W. S. Cassels, *On a problem of Steinhaus about normal numbers*, Colloque. Math. 7 (1959), S. 95-101.

[2] W. M. Schmidt, *On normal numbers*, Pac. J. Math. 10 (1960), S. 661-672.

Reçu par la Rédaction le 5. 11. 1961