it is found that

$$(7.7)\qquad (n+1)f_{n+1}(x) = (3n+1+4x)f_n(x)-(3n-1+4x)f_{n-1}(x)+(n-2)f_{n-2}(x).$$

If we put

$$u_n = n!\,f_n(x),$$

(7.7) becomes

$$(7.8)\qquad u_{n+1} = (3n+1+4x)u_n - n(3n-1+4x)u_{n-1} + n(n-1)(n-2)u_{n-2}.$$

In the second place for the polynomial

$$\varphi_n(x) = {}_2F_2(-n,\,1+\beta;\,1,\,1+\alpha;\,x)$$

it is shown that

$$(7.9)\qquad (n+1)(\alpha+n+1)\varphi_{n+1}(x) = \big(3n(n+1)+\alpha(2n+1)-(\beta+n+1)x\big)\varphi_n(x) - n(\alpha+3n-x)\varphi_{n-1}(x) + n(n-1)\varphi_{n-2}(x).$$

If we put

$$u_n = n!\,(\alpha+1)_n\varphi_n(x),$$

(7.9) becomes

$$(7.10)\qquad u_{n+1} = \big(3n(n+1)+\alpha(2n+1)-(\beta+n+1)x\big)u_n - n^2(\alpha+n)(\alpha+3n-x)u_n + n^2(n-1)^2(\alpha+n)(\alpha+n-1)u_{n-2}.$$

Clearly Theorem 5 is applicable to both (7.8) and (7.10).

References

[1] L. Carlitz, *Congruence properties of certain polynomial sequences*, Acta Arith. 6 (1960), pp. 149-158.

[2] — *Congruences connected with three-line latin rectangles*, Proc. Amer. Math. Soc. 4 (1953), pp. 9-11.

[3] — *Congruences for the number of n-gons formed by n lines*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), pp. 961-966.

[4] — *A special functional equation*, Riv. Math. Univ. Parma 7 (1956), pp. 211-233.

[5] A. Erdélyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher trancendental functions*, New York 1955.

[6] S. M. Kerawala, *The enumeration of the latin rectangles of depth three by means of a difference equation*, Bull. Calcutta Math. Soc. 33 (1941), pp. 119-127.

[7] E. D. Rainville, Special functions, New York 1960.

[8] J. Riordan, *An introduction to combinatorial analisis*, New York, 1958.

[9] — *A recurrence relation for three-line latin rectangles*, Amer. Math. Montly 59 (1952), pp. 159-162.

[10] R. Robinson, *A new absolute geometric constant?*, Amer. Math. Monthly 58 (1951), pp. 462-469.

Reçu par la Rédaction le 9. 3. 1961

ACTA ARITHMETICA
VII (1962)

Sur le problème de M. Werner Mnich

par

G. Sansone (Firenze) et J. W. S. Cassels (Cambridge)

Un de nous a donné récemment [2] une réponse négative au problème de M. Mnich (1): existent ils trois nombres rationnels u, v, w tels que

$$(1)\qquad u+v+w = uvw = 1.$$

La démonstration dans [2] utilise et la théorie quelque peu approfondie des points rationnels sur les courbes de genre un et les propriétés d'un corps de nombres algébriques de degré 3. Nous donnons ici une démonstration tout à fait élémentaire (2) qui n'utilise que les propriétés classiques du corps d'Eisenstein (c'est-à-dire du corps engendré par les racines cubiques d'unité).

Comme on vérifie sans peine (voir [1], [2]), la réponse négative au problème de M. Mnich équivaut à l'enoncé suivant:

Théorème. *Les seules solutions de l'équation*

$$(2)\qquad x^3+y^3+z^3 = xyz$$

en nombres rationnels sont les solutions banales, c'est-à-dire les solutions où $xyz = 0$.

Sans nuire à la generalité, nous supposons par absurde qu'il existe des entiers (x, y, z) tels que (2) tienne, et tels que

$$(3)\qquad xyz \neq 0, \quad 3 \nmid z.$$

Nous supposons aussi que $|xyz|$ est le plus petit possible, c'est-à-dire que

$$(4)\qquad |x_1y_1z_1| \geqslant |xyz|$$

pour toute solution entière (x_1, y_1, z_1) non banale de l'equation (2).

Posons

$$(5)\qquad \begin{cases} \gamma = 3x+3y+z, \\ \sigma = 3\varepsilon x+3\bar{\varepsilon}y+z, \\ \bar{\sigma} = 3\bar{\varepsilon}x+3\varepsilon y+z, \end{cases}$$

(1) Pour l'histoire de ce problème, voir [1].

(2) M. Sansone a trouvé la démonstration et l'a soumise à la Rédaction des Acta Arithmetica au mois de novembre, 1960. M. Cassels y a rapporté quelques simplifications. Les auteurs tiennent à remercier M. A. Schinzel de ses précieuses suggestions.

où

$$\varepsilon^3 = 1\,, \qquad \varepsilon \neq 1\,, \qquad \varepsilon\bar{\varepsilon} = 1\,. \tag{6}$$

Soit l le plus grand facteur commun (dans le corps d'Eisenstein) des nombres γ, σ, $\bar{\sigma}$. Le nombre l est un entier rationnel parce que

$$\gamma = \bar{\gamma}\,, \qquad (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \nmid \sigma \tag{7}$$

(en conséquence de (3)). L'équation (1) entraîne

$$26(\gamma_1 + \sigma_1 + \bar{\sigma}_1)^3 = -27\gamma_1\sigma_1\bar{\sigma}_1\,, \tag{8}$$

où

$$\gamma = l\gamma_1\,, \qquad \sigma = l\sigma_1\,, \qquad \bar{\sigma} = l\bar{\sigma}_1\,. \tag{9}$$

Par (3), nous avons

$$\bar{\gamma}_1 = \gamma_1\,, \qquad (\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \nmid \gamma_1\sigma_1\bar{\sigma}_1\,. \tag{10}$$

D'après la factorisation dans le corps d'Eisenstein, il n'existe que 9 ($= 3 \times 3$) possibilités:

I.

$$\begin{cases} \gamma_1 = 26\alpha^3\,, \\ \sigma_1 = -\varepsilon^j\beta^3\,, \qquad (j = 0,\ \pm 1)\,, \\ \bar{\sigma}_1 = -\bar{\varepsilon}^j\bar{\beta}^3\,, \end{cases} \tag{11}$$

$$26\alpha^3 - \varepsilon^j\beta^3 - \bar{\varepsilon}^j\bar{\beta}^3 = -3\alpha\beta\bar{\beta}\,; \tag{12}$$

II.

$$\begin{cases} \gamma_1 = 2\alpha^3\,, \\ \sigma_1 = \varepsilon^j(3\varepsilon - 1)\beta^3\,, \qquad (j = 0,\ \pm 1)\,, \\ \bar{\sigma}_1 = \bar{\varepsilon}^j(3\bar{\varepsilon} - 1)\bar{\beta}^3\,, \end{cases} \tag{13}$$

$$2\alpha^3 + \varepsilon^j(3\varepsilon - 1)\beta^3 + \bar{\varepsilon}^j(3\bar{\varepsilon} - 1)\bar{\beta}^3 = -3\alpha\beta\bar{\beta}\,. \tag{14}$$

III. Semblable à II sauf qu'on remplace $3\varepsilon - 1$ par $3\bar{\varepsilon} - 1$ et reciproquement.

Dans chaque cas nous avons

$$(\varepsilon - \bar{\varepsilon}) \nmid \alpha\beta\bar{\beta}\,. \tag{15}$$

Cas I. Selon (15) nous avons

$$\begin{gathered} \beta^3 \equiv \bar{\beta}^3 \equiv \pm 1 \pmod 9\,, \\ \alpha^3 \equiv \pm 1 \pmod 9\,, \\ 3\alpha\beta\bar{\beta} \not\equiv 0 \pmod 9\,. \end{gathered} \tag{16}$$

Ainsi l'equation (12) entraîne

$$j = 0\,. \tag{17}$$

Soient A, B, C des entiers rationnels tels que

$$\begin{aligned} 3\alpha &= A + B + C\,, \\ 3\beta &= A + B\varepsilon + C\bar{\varepsilon}\,, \\ 3\bar{\beta} &= A + B\bar{\varepsilon} + C\varepsilon\,. \end{aligned} \tag{18}$$

De l'équation (12) découle

$$ABC = (A + B + C)^3$$

et par conséquent

$$A = mx_1^3\,, \qquad B = my_1^3\,, \qquad C = mz_1^3 \tag{19}$$

pour des entiers rationnels m, x_1, y_1, z_1 tels que

$$x_1^3 + y_1^3 + z_1^3 = x_1y_1z_1\,. \tag{20}$$

On déduit facilement de $x_1y_1z_1 = 0$ que $xyz = 0$, ce que contredit notre hypothèse. Il s'ensuit que (x_1, y_1, z_1) est une solution non banale de (2) et par conséquent (4) est valable.

Or, nous avons

$$\begin{aligned} |z| &= \left|\frac{\gamma + \sigma + \bar{\sigma}}{3}\right| \\ &= |l|\left|\frac{\gamma_1\sigma_1\bar{\sigma}_1}{26}\right|^{1/3} && \text{(par (8))} \\ &= |l|\,|\alpha\beta\bar{\beta}| && \text{(par (11))} \\ &= \frac{|l|}{27}|A + B + C|\,|A + \varepsilon B + \bar{\varepsilon}C|\,|A + \bar{\varepsilon}B + \varepsilon C| && \text{(par (18))}. \end{aligned}$$

Vu les equations auxquelles satisfont les entiers A, B et C, ces entiers sont distincts deux à deux et $A + B + C \neq 0$. Nous avons donc

$$|z| \geqslant \tfrac{1}{27}(|A| + |B| + |C|) > \tfrac{1}{9}|ABC|^{1/3} \geqslant \tfrac{1}{9}|x_1y_1z_1|\,. \tag{21}$$

Par (4) et (21) nous avons

$$|xy| < 9\,. \tag{22}$$

Nous sommes arrivés a un absurde, parce que l'équation (2) n'a évidemment que des solutions banales qui satisfont à (22).

Cas II. De même que dans le cas I, il faut que (17) soit valable. Posons encore (18). Il résulte que

$$A^2C + B^2A + C^2B = ABC$$

et par conséquence

$$A = mx_1^2y_1\,, \qquad B = my_1^2z_1\,, \qquad C = mz_1^2x_1\,,$$

pour des entiers m, x_1, y_1, z_1. Il s'ensuit que (20) tient. Comme dans le cas I nous arrivons à un absurde.

Cas III est tout à fait semblable au cas II.

Travaux cités

[1] W. Sierpiński, *Sur quelques problèmes non résolus d'arithmétique*, L'Enseignement Mathématique 5 (1959), pp. 221-235. Cf. aussi Acta Arithm. 6 (1961), p. 469-471.

[2] J. W. S. Cassels, *On a diophantine equation*, Acta Arith. 6 (1960), pp. 47-52.

Reçu par la Rédaction le 12. 3. 1961

ACTA ARITHMETICA
VII (1962)

Sur le nombre des diviseurs premiers de n

par

H. Delange (Paris)

1. Introduction

Soit $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier positif n, et soit $N(x, t)$ le nombre des n au plus égaux à x pour lesquels on a

$$\omega(n) \leqslant \log\log x + t\sqrt{\log\log x}$$

(x étant $> e$ et t quelconque).

Il résulte d'un théorème bien connu d'Erdös et Kac que, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}N(x, t)$ tend vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du\,.$$

On peut se proposer d'évaluer la différence entre $\frac{1}{x}N(x, t)$ et sa limite. Dans cet ordre d'idées, le résultat suivant a été conjecturé par LeVêque et démontré par Renyi et Turán ([4] et [5]):

Théorème A. *On a quand x tend vers $+\infty$*

$$\frac{1}{x}N(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du + O\left[\frac{1}{\sqrt{\log\log x}}\right], \tag{1}$$

et ceci uniformément par rapport à t.

Nous nous proposons ici tout d'abord d'indiquer comment ceci peut se déduire du résultat suivant dû à Atle Selberg [6]:

z étant un nombre complexe quelconque, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)} = xF(z)(\log x)^{z-1} + O[x(\log x)^{z-2}], \tag{2}$$

F étant la fonction entière définie par

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)^z\left(1+\frac{z}{p-1}\right),$$