ACTA ARITHMETICA
VII (1962)

Verallgemeinerung und Anwendungen eines Kusminschen Satzes

von

P. Szüsz (Budapest)

In der vorliegenden Arbeit werden durchweg folgende Bezeichnungen benutzt:

a bedeutet eine zwischen Null und Eins gelegene Irrationalzahl mit der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung

(1) $$a = [0;\, a_1, a_2, \ldots]$$

d.h. $a_1, a_2, \ldots$ bedeuten die Teilnenner der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung der Irrationalzahl a. Es wird gesetzt

(2) $$[0;\, a_1, a_2, \ldots, a_n] = \frac{A_n}{B_n}, \qquad (A_n, B_n) = 1\,,$$

d.h. es sind A_n bzw. B_n die Näherungszähler, bzw. Näherungsnenner von a. Ferner sei gesetzt

(3) $$\zeta_n = \zeta_n(a) = [a_n;\, a_{n+1}, \ldots]\,.$$

Es bezeichne $m_n(x)$ das Lebesguesche Maß der Menge der a, für die

(4) $$\frac{1}{\zeta_{n+1}} = [0;\, a_{n+1}, \ldots] \leqslant x$$

gilt, wobei x eine beliebige, zwischen Null und Eins gelegene reelle Zahl bedeutet.

Noch Gauß hat die Frage aufgeworfen, den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} m_n(x)$$

zu bestimmen. In einem Brief an Laplace schrieb er, es sei ihm gelungen, die Limesrelation

(5) $$\lim_{n\to\infty} m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2}$$

zu beweisen; sein Beweis wurde jedoch nicht veröffentlicht. (5) wurde zuerst von Kusmin [1] bewiesen, der schärfer sogar

(6) $$m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^{\sqrt{n}}) \qquad (q < 1)$$

bewies; ein Jahr später hat P. Lévy, ohne von der Kusminschen Arbeit gewußt zu haben, auf einem vom Kusminschen verschiedenen Wege

(7) $$m_n(x) = \frac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^n)$$

gezeigt. Aus (6), bzw. (7) haben P. Lévy [2] und A. Khintchine [3] verschiedene Schlüsse gezogen, u.a. die Existenz der Dichte der k mit $a_k = r$ für fast alle a, die Existenz von $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1, \ldots, a_n}$ für fast alle a, die von $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{B_n}$ für fast alle a bewiesen.

Unlängst habe ich [5] gezeigt, daß man aus dem Kusminschen Ansatz, der zu (6) führte, sehr einfach auch (7) beweisen kann; die im O-Glied auftretende Konstante q kann dabei wesentlich herabgedrückt werden.

S. Hartman hat die Frage aufgeworfen, ob unter den Näherungsnennern B_n fast aller a unendlich viele vorkommen, die durch eine gegebene Zahl r teilbar sind. In einer gemeinsamen Note [6] haben wir schärfer gezeigt, daß es unter den B_n fast aller a unendlich viele gibt, die einer beliebig gegebenen arithmetischen Progression angehören. Nun erhebt sich die Frage, die Verteilung der B_n fast aller a in den verschiedenen arithmetischen Progressionen mit der Differenz r zu bestimmen. Das Hauptresultat vorliegender Arbeit ergibt als Anwendung auch eine Antwort auf diese Frage.

Es bezeichne $m_n(k_1, k_2, x)$ das Maß der Menge der a, für die (4) gilt und außerdem die Kongruenzrelationen

(8) $$B_{n-1} \equiv k_1, \quad B_n \equiv k_2 \quad (\mathrm{mod}\, r)$$

bestehen. Dann lautet der Hauptsatz vorliegender Arbeit folgendermaßen:

Satz 1. *Es gilt*

(9) $$m_n(k_1, k_2, x) = \begin{cases} \big(c(r)\big)^{-1} \dfrac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^n), & \textit{falls} \quad (r, k_1, k_2) = 1, \\ 0 & \textit{sonst}, \end{cases}$$

wobei

(10) $$c(r) = \sum_{\substack{(k_1, k_2, r)=1 \\ 0 \leqslant k_1 < r,\, 0 \leqslant k_2 < r}} 1 = r^2 \prod_{p/r} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \qquad (p \ \textit{Prim})$$

bedeutet.

Die folgenden beiden Paragraphen enthalten den Beweis des Satzes 1. in etwas schärferer Form; im § 3. werden die bereits erwähnten Anwendungen gezeigt.

§ 1. Ist $(k_1, k_2, r) > 1$, so sind $B_{n-1} \equiv k_1$ und $B_n \equiv k_2 (\mathrm{mod}\, r)$ unverträglich; aus $(k_1, k_2, r) = d > 1$ und $B_{n-1} \equiv k_1$, $B_n \equiv k_2 (\mathrm{mod}\, r)$ würde nämlich folgen d/B_{n-1}, d/B_n, entgegen der Tatsache, daß B_{n-1} und B_n relativ prim sind. Ist

$$(k_1, k_2, r) = 1,$$

so sind, wie man durch vollständige Induktion zeigt, die Kongruenzrelationen $B_{n-1} \equiv k_1$, $B_n \equiv k_2 (\mathrm{mod}\, r)$ erfüllbar.

Es sei k_1, k_2 ein Zahlenpaar ganzer Zahlen, mit

$$0 \leqslant k_1 < r, \qquad 0 \leqslant k_2 < r, \qquad (k_1, k_2, r) = 1.$$

Die Relationen

(1.1) $$B_{n-1} \equiv k_1, \qquad B_n \equiv k_2 \quad (\mathrm{mod}\, r)$$

und

(1.2) $$\frac{1}{\zeta_{n+1}} \leqslant x$$

sind offenbar dann und nur dann erfüllt, wenn für irgendein natürliches l die Relation

(1.3) $$\frac{1}{l+x} < \frac{1}{\zeta_n} \leqslant \frac{1}{l}$$

erfüllt ist und außerdem die Kongruenzen

(1.4) $$B_{n-1} \equiv k_1, \qquad B_{n-2} \equiv S(l) \quad (\mathrm{mod}\, r)$$

gelten, wobei $S(l)$ durch

(1.5) $$0 \leqslant S(l) < r, \qquad k_2 - lk_1 \equiv S(l) \quad (\mathrm{mod}\, r)$$

bestimmt ist. Wegen $\zeta_n = a_n + \dfrac{1}{\zeta_{n+1}}$ ist nämlich (1.2) dann und nur dann erfüllt, wenn (1.3) erfüllt ist und wegen $B_n = B_{n-1}a_n + B_{n-2}$ sind (1.4) und (1.1) äquivalent. Hieraus ergibt sich die rekurrente Formel

(1.6) $$m_n(k_1, k_2, x) = \sum_{l=1}^{\infty} \left\{ m_{n-1}\left(S(l), k_1, \frac{1}{l}\right) - m_{n-1}\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right) \right\}.$$

Für $r = 1$ war diese Formel schon Gauß bekannt; sie war der Ausgangspunkt für den Kusminschen Beweis von (7).

Differentiiert man (1.6) formal, so erhält man

(1.7) $$m'_n(k_1, k_2, x) = \sum_{l=1}^{\infty} m'_{n-1}\left(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\right) \frac{1}{(l+x)^2}.$$

Hieraus wird sofort ersichtlich, daß falls $m_{n-1}(k_1, k_2, x)$ für jedes Zahlenpaar k_1, k_2 stetig differentiierbar ist, so gilt dasselbe für $m_n(k_1, k_2, x)$; denn in diesem Falle ist die Reihe auf der rechten Seite von (1.7) gleichmäßig konvergent. Dasselbe gilt auch für die höheren Ableitungen. Man sieht nun leicht, daß $m_1(k_1, k_2, x)$ für jedes Zahlenpaar k_1, k_2 zweimal stetig differentiierbar ist; daher sind auch $m_2(k_1, k_2, x), \ldots$ zweimal stetig differentiierbar.

Man setze

$$g_n(k_1, k_2, x) = (1+x)\, m_n'(k_1, k_2, x)\,. \tag{1.8}$$

Dann transformiert sich (1.7) in

$$g_n(k_1, k_2, x) = \sum_{l=1}^{\infty} g_{n-1}\Big(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\Big) \frac{1+x}{(l+x)(l+1+x)}\,. \tag{1.9}$$

Im folgenden behandeln wir die obige rekurrente Formel; von der Anfangsfunktion $g_1(k_1, k_2, x)$ wird nur soviel vorausgesetzt, daß sie einmal stetig differentiierbar ist. Sie braucht also *nicht* mit $(1+x)\, m_1'(k_1, k_2, x)$ übereinzustimmen, wobei $m_1(k_1, k_2, x)$ die Bedeutung (4) und (8) hat. Zunächst zeige ich

$$g_n(k_1, k_2, x) = \begin{cases} c_1 + O(q^n)\,, & \text{falls} \quad (k_1, k_2, r) = 1\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases} \tag{1.10}$$

Hier hängt die Konstante c_1 weder vom Zahlenpaar k_1, k_2, noch von r ab. Die im O-Glied auftretende Konstante q hängt nun von r ab und ist immer kleiner, als 1. Setzt man noch voraus, daß $g_n(k_1, k_2, x)$ auch die „Normierungsvoraussetzungen"

$$m_n(k_1, k_2, 0) = 0, \qquad \sum_{k_1, k_2} m_n(k_1, k_2, 1) = 1 \tag{1.11}$$

erfüllt, wobei zwischen $m_n(k_1, k_2, x)$ und $g_n(k_1, k_2, x)$ die Beziehung (1.8) besteht, so erhält man für c_1^{-1} den Wert (10), weil ja $m_n(k_1, k_2, x)$ für jedes k_1, k_2 mit $(k_1, k_2, r) > 1$ identisch Null ist.

Nun wende ich mich dem Beweis von (1.10) zu.

Man differentiiere (1.9). Man erhält

$$g_n'(k_1, k_2, x) = -\sum_{l=1}^{\infty} g_{n-1}'\Big(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\Big) \frac{1+x}{(l+x)^3(l+1+x)} + \sum_{l=1}^{\infty} g_{n-1}\Big(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\Big) \frac{l(l-1)-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2}\,, \tag{1.12}$$

oder, indem man von der rechten Seite die durch Differentiation der Identität $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1+x}{(l+x)(l+1+x)} \equiv 1$ beweisbare Gleichheit

$$\sum_{l=1}^{\infty} g_{n-1}\Big(S(1), k_1, \frac{1}{1+x}\Big) \frac{l(l-1)-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2} \equiv 0 \tag{1.13}$$

subtrahiert,

$$g_n'(k_1, k_2, x) = -\sum_{l=1}^{\infty} g_{n-1}'\Big(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\Big) \frac{1+x}{(l+x)^3(l+1+x)} - \sum_{l=2}^{\infty} \Big\{ g_{n-1}\Big(S(1), k_1, \frac{1}{1+x}\Big) - g_n\Big(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\Big) \Big\} \frac{l(l-1)-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2} = \Sigma_1 + \Sigma_2\,. \tag{1.14}$$

Die Differenz in den geschweiften Klammern Σ_2 zerlege ich in

$$\Big(g_{n-1}\Big(S(1), k_1, \frac{1}{1+x}\Big) - g_{n-1}\Big(S(1), k_1, \frac{1}{l+x}\Big)\Big) + \Big(g_{n-1}\Big(S(1), k_1, \frac{1}{l+x}\Big) - g_{n-1}\Big(S(l), k_1, \frac{1}{l+x}\Big)\Big) = D_{n-1}^{(1)} + D_{n-1}^{(2)}\,. \tag{1.15}$$

Man setze

$$\max_{k_1, k_2, t} |g_n'(k_1, k_2, t)| = M_n\,, \tag{1.16}$$

$$\max_{\substack{k_1, k_2, k_1', k_2', t \\ (k_1, k_2, r) = (k_1', k_2', r) = 1}} |g_n(k_1, k_2, t) - g_n(k_1', k_2', t)| = \delta_n\,. \tag{1.17}$$

Aus (1.15) folgt

$$|D_{n-1}^{(1)}| < \delta_{n-1}\,, \tag{1.18}$$

$$|D_{n-1}^{(1)}| = \frac{l-1}{(1+x)(l+x)} \Big| g_{n-1}'\Big(S(l), k_1, \frac{1}{\vartheta_l + x}\Big)\Big| \leqslant \frac{l-1}{(l+x)(l+1+x)} M_{n-1}\,, \tag{1.19}$$

wobei ϑ_l eine zwischen 1 und l gelegene reelle Zahl bedeutet. Setzt man dies in (1.14) ein, so erhält man

$$|g_n'(k_1, k_2, x)| \leqslant M_{n-1}\Big(\frac{1}{(1+x)^2(2+x)} + \frac{(1+x)^2(3+x) + |2-(1+x)^2|}{(1+x)(2+x)^3(3+x)^2} + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{l(l-1)^2 + (1+x)^2(2+x)}{(1+x)(l+x)^3(l+1+x)^2}\Big) + \delta_{n-1}\Big(\frac{|2-(1+x)^2|}{(2+x)^2(3+x)^2} + \sum_{l=3}^{\infty} \frac{l(l-1)-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2}\Big)\,. \tag{1.20}$$

Der erste Klammerausdruck kann auf die Gestalt

$$\frac{1}{(1+x)^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{c_l(x)(1+x)}{(l+x)(l+1+x)} \tag{1.21}$$

gebracht werden; eine elementare, wenn auch etwas mühsame Rechnung zeigt, daß die Summe ihren Maximalwert für $x=0$ annimmt; ferner gilt

$$\sum_{l=1}^{\infty}\frac{c_l(0)}{l(l+1)} = 2\zeta(3)-\zeta(2) = A\,. \tag{1.22}$$

Nun betrachte ich den zweiten Klammerausdruck in (1.20). Es gilt wegen (1.13)

$$\begin{aligned}(1.23)\quad & \frac{|2-(1+x)^2|}{(2+x)^2(3+x)^2}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l(l-1)-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2} \\ &= \sum_{l=2}^{\infty}\frac{l(l-1)-(1+x)^2}{(l+x)^2(l+1+x)^2}+\frac{|2-(1+x)^2|-\big(2-(1+x)^2\big)}{(2+x)^2(3+x)^2} \\ &= \frac{1}{(2+x)^2}\left(1+\frac{|2-(1+x)^2|-\big(2-(1+x)^2\big)}{(3+x)^2}\right) \leqslant \frac{1}{(2+x)^2}\cdot\frac{5}{4}\,.\end{aligned}$$

Setzt man (1.21), (1.22) und (1.23) in (1.20) ein, so erhält man

$$|g_n'(k_1,k_2,x)| \leqslant M_{n-1}\frac{A}{(1+x)^2}+\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{(2+x)^2}\delta_{n-1}\,. \tag{1.24}$$

Setzt man dies mit n-1 statt n wieder in (1.14) ein, so erhält man mit Rücksicht auf (1.19)

$$\begin{aligned}(1.25)\quad |g_n'(k_1,k_2,x)| \leqslant{} & M_{n-2}A\left(\frac{1}{(2+x)^3}+\frac{(3+x)(1+x)^2+|2-(1+x)^2|}{(1+x)(2+x)(3+x)^4}+\right. \\ & \left.+\sum_{l=3}^{\infty}\frac{l(l-1)^2+(2+x)(1+x)^2}{(1+x)(l+x)(l+1+x)^4}\right)+\frac{5}{4}\delta_{n-2}\left(\frac{(1+x)^2(3+x)-|2-(1+x)^2|}{(1+x)(2+x)(3+x)^4(5+2x)^2}+\right. \\ & \left.+\sum_{l=3}^{\infty}\frac{l(l-1)+(2+x)(1+x)^2}{(1+x)(l+x)(l+1+x)^2(2l+1+2x)^2}\right)+\frac{5}{4}\cdot\frac{\delta_{n-1}}{(2+x)^2}\,.\end{aligned}$$

Nun sieht man wieder, daß die rechte Seite von (1.25) ihren Maximalwert für $x=0$ annimmt. So erhält man wegen der aus (1.9) folgenden Ungleichung $\delta_{n-1}\leqslant\delta_{n-2}$

$$\begin{aligned}M_n &\leqslant M_{n-2}A\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l(l-1)^2+2}{l(l+1)^4}+\frac{5}{4}\delta_{n-2}\left(\frac{1}{4}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{l(l-1)^2+2}{l(l+1)^2(2l+1)^2}\right) \\ &= M_{n-2}A\big(7+2\zeta(4)-6\zeta(3)-\zeta(2)\big)+\frac{5}{4}\left(\frac{45-13\zeta(2)}{4}-8\log 2\right)\delta_{n-2}\,,\end{aligned}$$

also, indem man

$$c_2 = A\big(7+2\zeta(4)-6\zeta(3)-\zeta(2)\big)\,,\qquad c_3=\frac{5}{4}\left(\frac{45-13\zeta(2)}{4}-8\log 2\right)$$

setzt,

$$M_n \leqslant c_2M_{n-2}+c_3\delta_{n-2} < c_2'M_{n-4}+c_3'\delta_{n-4}\quad\text{mit}\quad c_2'+c_3'<1\,. \tag{1.26}$$

Kann ich noch

$$\delta_n < c_4M_{n-4}+c_5\delta_{n-4} \tag{1.27}$$

zeigen mit

$$c_4+c_5<1\,, \tag{1.28}$$

so kann ich durch vollständige Induktion

$$M_n = O(q^n)\quad\text{und}\quad \delta_n = O(q^n)$$

beweisen, womit auch unser Satz 1. bewiesen werden wird. Der Beweis von (1.27) und (1.28) soll im nächsten Paragraphen durchgeführt werden.

§ 2. Es bedeute

$$M_n = \max_{\substack{k_1,k_2,t\\(k_1,k_2,r)=1}} g_n(k_1,k_2,t)\,,\qquad m_n=\min_{\substack{k_1,k_2,t\\(k_1,k_2,r)=1}} g_n(k_1,k_2,t)\,. \tag{2.1}$$

Offenbar gilt

$$M_n-m_n=\delta_n \tag{2.2}$$

wobei δ_n die Bedeutung (1.17) hat.

Durch wiederholte Anwendung von (1.9) ergibt sich

$$\begin{aligned}(2.3)\quad & g_n(k_1,k_2,x) \\ &= \sum_{l,l_1,l_2,l_3=1}^{\infty} f_l(x)f_{l_1}(u_l)f_{l_2}(u_{l,l_1})f_{l_3}(u_{l,l_1,l_2})\,g_{n-4}\left(S(l_3),\,S(l_2),\,\frac{1}{c_3+u_{l,l_1,l_2}}\right),\end{aligned}$$

wobei zur Abkürzung

$$f_l(t)=\frac{1+t}{(l+t)(l+1+t)}\,,\quad u_l=\frac{1}{l+x}\,,\quad u_{l,l_1}=\frac{1}{l_1+u_l}\,,\quad u_{l,l_1,l_2}=\frac{1}{l_2+u_{l,l_1}} \tag{2.4}$$

gesetzt wurde, während $S(l_1)$, $S(l_2)$ und $S(l_3)$ durch

$$\left.\begin{aligned} S(l) &= k_2-lk_1 \\ S(l_1) &\equiv k_1-l_1S(l) \\ S(l_2) &\equiv S(l)-l_2S(l_1) \\ S(l_3) &\equiv S(l_1)-l_3S(l_2)\end{aligned}\right\}\pmod r\,,\qquad 0\leqslant S(l_2),\,S(l_3)<r \tag{2.5}$$

definiert sind.

Hilfssatz 2.1. *Es sei*

$$(k_1, k_2, r) = (k', k'', r) = 1 . \tag{2.6}$$

Dann hat das Kongruenzsystem

$$\left.\begin{aligned} S(l) - l_2 S(l_1) &\equiv k' \\ S(l_1) - l_3 k' &\equiv k'' \end{aligned}\right\} \pmod{r} \tag{2.7}$$

in l, l_1, l_2 und l_3 stets eine Lösung.

Beweis. Zunächst sei r eine Potenz der Primzahl p. Dann unterscheide ich zwei Fälle, je nach dem

$$\text{a)}\ p \mid k_1 \qquad \text{oder} \qquad \text{b)}\ p \nmid k_1$$

gilt.

Gilt a), so ist wegen (2.6)

$$(k_2, p) = 1 .$$

Daher läßt sich durch geeignete Wahl von l_1 erreichen, daß $S(l_1)$ einer bieliebigen Kongruenzklasse $(\mathrm{mod}\, r)$ angehört.

Nun ist ebenfalls wegen (2.6) entweder $(p, k') = 1$ oder $(p, k'') = 1$ (oder beides). Gilt $(p, k') = 1$, so bestimme man l_1 so, daß $(S(l_1), p) = 1$ gelte, dann l_2 so, daß die erste Kongruenz (2.7) erfüllt, dann l_3 so, daß auch die zweite Kongruenz (2.7) erfüllt sei sei, was wegen $(k', p) = 1$ stets möglich ist. Gilt $(k'', p) = 1$, so bestimme man l_1 so, daß $S(l_1) \equiv k'' (\mathrm{mod}\, r)$ sei; dann bestimme man l_2 so, daß die erste Kongruenz von (2.7) erfüllt werde, was wegen $(k'', p) = 1$ möglich ist. Schließlich setze man für l_3 ein Vielfaches von r. Damit ist der Fall a) erledigt.

Gilt b), so führt eine völlig analoge überlegung zum Ziel. Damit ist unser Hilfssatz 2.1. für den Fall bewiesen, wenn r eine Primzahlpotenz ist. Nehmen wir an, er sei für jede Zahl r' der Gestalt

$$r' = p_1^{a_1} \dots p_{n-1}^{a_{n-1}}$$

bewiesen und wir betrachten nun ein r mit

$$p_1^{a_1} \dots p_n^{a_n} . \tag{2.8}$$

Es sei l', l_1', l_2', l_3' ein Lösungssystem von (2.5) mit r' statt r, wobei wir $S(l_2')$, bzw $S(l_3')$ die Werte k', bzw k'' vorschreiben; k_1, k_2 und k', k'' sind den Beschränkungen $(k_1, k_2, r) = (k', k'', r) = 1$ unterworfen. Dann ist für beliebige ganze $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auch

$$l' + \lambda r', \quad l_1' + \lambda_1 r', \quad l_2' + \lambda_2 r', \quad l_3' + \lambda_3 r' \tag{2.9}$$

eine Lösung desselben Kongruenzsystems. Kann ich $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ so wählen, daß (2.5) nicht nur mit den Modul r', sondern auch mit $p_n^{a_n}$ erfüllt sei,

so bin ich fertig. Setzt man in (2.5) für l, l_1, l_2, l_3 die Werte (2.9) ein, und ersetzt man das dortige r durch $p_n^{a_n}$, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} \sigma(\lambda) &\equiv k_2 - l' k_1 - \lambda k_1 r' \\ \sigma(\lambda_1) &\equiv k_1 - (l_1' + \lambda_1 r')\sigma(\lambda) \\ \sigma(\lambda_2) &\equiv \sigma(\lambda) - (l_2' + \lambda_2 r')\sigma(\lambda_1) \\ \sigma(\lambda_3) &\equiv \sigma(\lambda_1) - (l_3' + \lambda_3 r')\sigma(\lambda_2) \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\, p_n^{a_n}) \tag{2.10}$$

wobei $\sigma(\lambda_i) = S(l_i)$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ gesetzt wurde; zwischen den λ_i und l_i besteht die Beziehung (2.9).

Nun läßt sich völlig analog zum Fall, wenn r eine Primzahlpotenz ist, zeigen, daß falls $(k_1, k_2, r) = (k', k'', r) = 1$ wobei r die Bedeutung (2.8) hat, so ist

$$\left.\begin{aligned} \sigma(\lambda_2) &\equiv k_1 \\ \sigma(\lambda_3) &\equiv k_2 \end{aligned}\right\} (\mathrm{mod}\, p_n^{a_n}) \tag{2.11}$$

lösbar. Damit ist unsere vollständige Induktion bezüglich der Anzahl der verschiedenen Primfaktoren von r vollendet und so auch unser Hilfssatz 2.1 bewiesen.

Hilfssatz 2.1 besagt, daß in der vierfachen Summe (2.3) unter den Parametern $S(l_3)$, $S(l_2)$ sämtliche Zahlenpaare k', k'' vorkommen, für die $(k', k'', r) = 1$ ist. Nun brauche ich eine untere Abschätzung des Beitrages dieser Glieder in der Summe

$$\sum_{l, l_1, l_2, l_3 = 1}^{\infty} f_l(x) f_{l_1}(n_l) f_{l_2}(n_{l,l_1}) f_{l_3}(n_{l,l_1,l_2}) \equiv 1 . \tag{2.12}$$

Diese wird im nachsten Hilfssatz hergeleitet.

Hilfssatz 2.2. *In der Reihe*

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1+x}{(l+x)(l+1+x)} \equiv 1$$

ist der Beitrag derjenigen Glieder, die einer beliebigen arithmetischen Progression mit der Differenz r angehoren, grosser, als c_6/r^2. Hieraus folgt sofort

$$\sum_{\substack{l, l_1, l_2, l_3 = 1 \\ l \equiv l',\, l_1 \equiv l_1',\, l_2 \equiv l_2',\, l_3 \equiv l_3' (\mathrm{mod}\, r)}}^{\infty} f_l(x) f_{l_1}(k_l) f_{l_2}(k_{l,l_1}) f_{l_3}(k_{l,l_1,l_2}) \geqslant \frac{c_6^4}{r^8} = c_7 , \tag{2.13}$$

wobei l', l_1', l_2', l_3' beliebige, aber festgelegte nichtnegative ganze Zahlen sind, die $r-1$ nicht übertreffen.

Beweis. Es ist

$$\sum_{\substack{l=1 \\ l \equiv l' (\mathrm{mod}\, r)}}^{\infty} \frac{1+x}{(l+x)(l+1+x)} > \sum_{l \equiv l_1 (\mathrm{mod}\, r)} \frac{1}{(l+1)(l+2)} > \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2r^2 l^2} = \frac{c_6}{r^2} .$$

Nun betrachte ich die vierfache Summe (2.3); natürlich wird stets $(k_1, k_2, r) = 1$ vorausgesetzt. Das auf der rechten Seite von (2.3) auftretende Zahlenpaar $S(l_3), S(l_2)$ hängt offenbar nur von $k_1, k_2, l, l_1, l_2, l_3$ ab, also, da k_1 und k_2 festgelegt sind, nur von den l; $S(l_3)$ und $S(l_2)$ können beide nur die Werte $0, 1, \ldots, r-1$ annehmen und sind nach r periodische Funktionen von l, l_1, l_2, l_3.

Hilfssatz 2.1 besagt, dass unter den $S(l_3), S(l_2)$ jedes Zahlenpaar k', k'' vorkommt, fur welches $(k', k'', r) = 1$ gilt; gilt $S(l_3), S(l_2) = k', k''$ für irgendein wertsystem, l', l_1', l_2', l_3', so gilt dasselbe für $l_i + \lambda_i r$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ mit ganzen λ_i. Daher ist der Beitrag B der Glieder, in der Reihe

$$\sum_{l, l_1, l_2, l_3 = 1}^{\infty} f_l(x) f_{l_1}(k_l) f_{l_2}(k_{l,l_1}) f_{l_3}(k_{l,l_1,l_2}),$$

für die $S(l_3), S(l_2) = k', k''$ gilt, wegen Hilfssatz 2.1 grösser, als c_7.

Es sei nun k', k'' ein Zahlenpaar, für welches $g_{n-4}(k', k'', t)$ mit irgendeinem $t = t_{n-4}$ das Minimum der g_{n-4} erreicht, d.h. für welches mit geeignetem $t = t_{n-4}$ die Relation

$$g_{n-4}(k', k'', t) = m_{n-4} \tag{2.14}$$

gilt. Die vierfache Summe auf der rechten Seite von (2.3) zerlege ich in zwei Teile. Der erste, der mit Σ_1 bezeichnet werden möge, enthält die Glieder mit $S(l_3), S(l_2) \neq k', k''$ der zweite Teil Σ_2 die übrigen.

Es bedeute B den Beitrag derjeningen Glieder in (2.12), für deren Indizes l, l_1, l_2, l_3 die Beziehung

$$S(l_3) = k', \quad S(l_2) = k''$$

besteht, d.h. den Beitrag von arithmetischen Progressionen mit der Differenz r in l, l_1, l_2, l_3 in der vierfachen Reihe (2.12). Dann gilt wegen (2.13)

$$g_n(k_1, k_2, x) < M_{n-4}(1-B) + m_{n-4}B + \\ + \sum_{\substack{l, l_1, l_2, l_3 = 1 \\ S(l_3) = k', S(l_2) = k''}}^{\infty} f_l(x) f_{l_1}(k_l) f_{l_2}(k_{l,l_1}) f_{l_3}(k_{l,l_1,l_2}) \times \\ \times \left| g_{n-4}\left(k', k'', \frac{1}{l_3 + k_{l,l_1,l_2}}\right) - g_{n-4}(k', k'', t) \right|,$$

also, indem man auf den Ausdruck $\left| g_{n-4}\left(k', k'', \frac{1}{l_3 + k_{l,l_1,l_2}}\right) - g_{n-4}(k', k'', t) \right|$ den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anwendet,

$$g_n(k_1, k_2, x) < M_{n-4}(1-B) + m_{n-4}B + Bc_8 M_{n-4}, \tag{2.15}$$

wobei c_8 nur von r abhängen kann, aber jedenfalls kleiner ist, als 1. Aus (2.15) folgt wegen der aus (1.9) folgenden Ungleichung $m_n > m_{n-4}$

$$M_n - m_n < (1-B)(M_{n-4} - m_{n-4}) + c_8 B M_{n-4}$$

also

$$\delta_n < (1-B)\delta_{n-4} + c_8 B M_{n-4},$$

womit wegen Hilfssatz 2.2 (1.27) mit (1.28) bewiesen ist.

Damit ist (1.10), also auch unser Satz 1. bewiesen.

§ 3. Nun seien einige Anwendungen des Satzes 1. erwähnt.

Satz 3.1. *Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_l$ gegeben es bezeichne*

$$m_n(a_1, a_2, \ldots, a_l; k_1, k_2, x)$$

das Mass der α deren Kettenbruchentwicklung m it $a_1, \ldots, a_l$ beginnt und fur welche die Relationen (4) *und* (8) *gelten; $m(a_1, \ldots, a_l)$ sei das Mass der α deren Kettenbruchentwicklung mit $a_1, \ldots, a_l$ beginnt. Dann gilt*

$$\frac{m_n(a_1 \ldots a_l;\, k_1, k_2, x)}{m(a_1 \ldots a_l)} = \begin{cases} \dfrac{1}{c(r)} \cdot \dfrac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^{n-l}), \\ \qquad\qquad \textit{falls} \quad (k_1, k_2, r) = 1, \\ 0 \quad \textit{sonst}, \end{cases} \tag{3.1}$$

wobei $c(r)$ die Bedeutung (10) *hat; bezeichnet $m_{n';n}(k_1', k_2', k_1, k_2, x)$ das Maß der α, für die $B_{n'-1} \equiv k_1'$, $B_{n'} \equiv k_2' \pmod{r}$,* (4) *und* (8) *gelten, $n' < n$ so gilt*

$$\frac{m_{n',n}(k_1', k_2', k_1, k_2, x)}{m_{n'}(k_1', k_2', 1)} = \begin{cases} \dfrac{1}{c(r)} \cdot \dfrac{\log(1+x)}{\log 2} + O(q^{n-n'}) \\ \quad \textit{falls} \quad (k_1', k_2', r) = (k_1, k_2, r) = 1; \\ 0 \quad \textit{sonst}. \end{cases} \tag{3.2}$$

Beweis. Die Ableitungen nach x der Funktionen auf der linken Seite von (3.1), bzw. (3.2) erfüllen sämtliche Voraussetzungen für das Bestehen von (1.10) und auch die „Normierungsvoraussetzungen" (1.11). Hieraus folgt die Behauptung.

Satz 3.2. *Es sei $f(k_1, k_2, l)$ eine in den ganzen Veränderlichen k_1 und k_2 nach r periodische Funktion, die für jedes natürliche l definiert ist und der Ungleichung*

$$|f(k_1, k_2, l)| < c\, l^{1/2-\delta} \tag{3.3}$$

genügt, wobei δ irgendeine positive Zahl ist. Dann gilt für fast alle α

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} f(B_{l-1}, B_l, a_l) = \frac{1}{c(r)} \sum_{(k_1, k_2, r) = 1} \sum_{l=1}^{\infty} f(k_1, k_2, l) \frac{\log \dfrac{(l+1)^2}{l(l+2)}}{\log 2}, \tag{3.4}$$

wobei $c(r)$ die Bedeutung (1.10) *hat.*

Beweis. Folgt aus (3.2) durch wörtliche Wiederholung des Khintchineschen Beweises [3] (wiedergegeben auch im Büchlein [4], S. 89-95).

Aus (3.2) können verschiedene Verallgemeinerungen von Khintchineschen [3] und P. Lévyschen [2] Resultaten hergeleitet werden; es sei jedoch nur noch ein einziger Spezialfall hervorgehoben, der mir besonders interessant zu sein scheint und dereinen Satz von S. Hartman und mir [6] verschärft.

Man setze

$$f(k_1, k_2, l) = \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad k_1, k_2 \equiv u, v \ (\mathrm{mod}\, r) \ \text{mit einem festgelegten Zahlenpaar} \ u, v\,((u, v, r) = 1), \\ 0 & \text{sonst}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Dann schließt man aus (3.4) daß die Dichte der Zahlen l mit

$$B_{l-1} \equiv u\,, \qquad B_l \equiv v \ (\mathrm{mod}\, r)\,, \qquad (u, v, r) = 1$$

fürst fast alle a gleich $c(r)^{-1}$ ist. Summiert man noch über u (mit $(u, v, r) = 1$), so erhält man

SATZ 3.3. *Es gilt für fast alle a*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{\substack{l \leqslant n \\ B_l \equiv v \,(\mathrm{mod}\, r)}} 1 = c(r)^{-1} \sum_{\substack{0 \leqslant u < r \\ (u,v,r)=1}} 1 = \frac{r}{c(r)} \cdot \frac{\varphi\big((v, r)\big)}{(v, r)}. \tag{3.6}$$

Mit (3.6) wird die Dichte der l mit $B_l \equiv v \ (\mathrm{mod}\, r)$ in der Kettenbruchentwicklung fast aller a bestimmt.

Literaturverzeichnis

[1] R. O. Kusmin, *Sur un problème de Gauss*, Atti Congr. Intern. Bologne 6 (1928), S. 83-89.

[2] P. Lévy, *Sur les lois de probabilité dont dépendent les quotients complets et incomplets d'une fraction continue*, Bull. Soc. Math. France 57 (1929), S. 178-194.

[3] A. Khintchine, *Metrische Kettenbruchprobleme*, Comp. Math. 1 (1935), S. 361-382.

[4] A. Khnitchine, *Kettenbrüche*, Leipzig 1956.

[5] P. Szüsz, *Über einen Kusminschen Satz*, Erscheint in den Acta Math. Acad. Sci. Hung.

[6] S. Hartman, P. Szüsz, *On congruence classes of denominators of convergents*, Acta Arithm. 6 (1960), S. 179-184.

BUDAPEST, FORSCHUNGSINSTITUT FÜR MATHEMATIK DER UNGARISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 18. 2. 1961

ACTA ARITHMETICA
VII (1962)

A note on a theorem of Hardy and Littlewood

by

S. KNAPOWSKI and W. STAŚ (Poznań)

1. In this paper we shall be concerned with the behaviour of the function

$$F(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \{\Lambda(n) - 1\} e^{-ny}, \qquad y > 0\,,$$

which is, in essentials, Abel-mean formed from series $\sum_n \{\Lambda(n) - 1\}$.

Hardy and Littlewood proved [3], on starting from the formula of Cahen [1] and Mellin [5]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa - i\infty}^{\varkappa + i\infty} \Gamma(s) y^{-s} ds = e^{-y} \qquad (\varkappa > 0\,, \ \mathrm{re}\, y > 0)\,, \tag{1.1}$$

that, on the Riemann hypothesis,

$$F(y) = O\Big(\frac{1}{y^{1/2}}\Big)\,, \qquad F(y) = \Omega_{\pm}\Big(\frac{1}{y^{1/2}}\Big)$$

as $y \to 0$ through positive values.

In the present paper we are going to show that one may dispense with the Riemann hypothesis in the, at least slightly weaker, Ω-estimation of $F(y)$ and, what is more, in place of the above ineffective estimation, will supply an explicit one.

The result is

THEOREM. *For $0 < \delta < c_1$ (¹) we have*

$$\max_{\delta \leqslant y \leqslant 1} |F(y)| > \frac{1}{\delta^{1/2}} \cdot \exp\left(-4 \frac{\log \frac{1}{\delta}}{\log\log \frac{1}{\delta}} \log\log\log \frac{1}{\delta}\right). \tag{1.2}$$

In the proof we shall apply the method of Turán, namely will use the following modification [4] of Turán's Satz X [8]:

(¹) $c_1, c_2, \ldots$ denote positive, numerically calculable constants.