ACTA ARITHMETICA
VII (1962)

Über das Verhalten der Riemannschen ζ-Funktion und einiger verwandter Funktionen, in der Nähe der Geraden $\sigma = 1$

von

W. Staś (Poznań)

1. L. Schoenfeld hat den folgenden Satz bewiesen [3]:

Sei $t \geqslant c$, $1-b \leqslant \sigma < 1$, wo c, b geeignete numerische Konstanten bedeuten. Dann gilt für die Riemannsche ζ-Funktion die Abschätzung:

$$(1.1)\qquad |\zeta(\sigma+it)| \leqslant \beta t^{\frac{\sqrt{2}}{3}(1-\sigma)^{3/2}\log^{1/2}\frac{1}{1-\sigma}}\log t\,, \qquad t \geqslant c_1\,.$$

Der Koeffizient β hängt von σ ab.

Es zeigt sich, daß β im Fall (1.1) den Wert

$$(1.2)\qquad \beta = \exp\left\{\frac{c_2}{(1-\sigma)^{1/2}\log^{1/2}\frac{1}{1-\sigma}}\log^2\frac{c_3}{(1-\sigma)^{1/2}\log^{1/2}\frac{1}{1-\sigma}}\right\}$$

hat. In der vorliegenden Arbeit, bekomme ich eine Verschärfung von (1.1), (1.2) und finde gleichzeitig die ähnlichen Abschätzungen, für einige anderen zahlentheoretischen Funktionen. Beim Beweis wird ein neuer Ergebnis von Vinogradoff ausgenutzt [5]. In Bezug auf gewisse Anwendungen, scheint mein Resultat nützlich zu sein (Siehe [4], Satz XXXVIII).

In werde die folgenden Sätze zeigen:

Satz I. *Sei*

$$(1.3)\qquad 1-\frac{1}{2^{13}} \leqslant \sigma \leqslant 1\,, \qquad t \geqslant 3\,.$$

Dann gilt

$$(1.4)\qquad |\zeta(\sigma+it)| \leqslant c_4 t^{2^{15}(1-\sigma)^{3/2}}\log^{5/2} t\,,$$

und c_4 ist eine numerische Konstante.

Sei $k \geqslant 1$ ganz, χ ein Charakter $\operatorname{mod} k$ und $L(s, \chi)$ die zugehörige Dirichletsche L-Funktion. In diesem Fall gilt der analoge Satz.

Satz II. *Für* (1.3) *gilt*

$$|L(\sigma+it,\chi)| \leqslant c_6 k^{1/2^{18}} t^{216(1-\sigma)^{3/2}} \log^{5/2} t \,. \tag{1.5}$$

Bezeichnen wir weiter mit K einen beliebigen quadratischen Zahlkörper, und mit $\zeta_k(s)$ die Dedekindsche Funktion von K. Sei d die Diskriminante des Körpers K. Man hat auch in diesem Fall:

Satz III. *Wenn* (1.3) *gesetzt wird, gilt die folgende Abschätzung*:

$$|\zeta_k(\sigma+it)| \leqslant c_6 |d|^{1+1/2^{18}} t^{216(1-\sigma)^{3/2}} \log^5 t \,. \tag{1.6}$$

2. Dem Beweis dieser Sätze schicken wir einige bekannten Tatsachen voraus.

I. *Sei* $l \geqslant 7$,

$$P \geqslant e^{5000\cdot(8l)^2}, \tag{2.1}$$

$$P^{l-1} \leqslant t < P^l, \tag{2.2}$$

$$P < P' \leqslant 2P-1 \,. \tag{2.3}$$

Dann gilt mit $s = \sigma+it$

$$S = \Bigl|\sum_{P<n\leqslant P'} \frac{1}{(n+w)^s}\Bigr| \leqslant 1{,}04 P^{1-\sigma-\varrho}, \qquad 0 < w \leqslant 1 \tag{2.4}$$

mit

$$\varrho = \varrho(l) = \frac{1}{653\,000\cdot(8l)^2} \,. \tag{2.5}$$

(Siehe [5]).

II. *Bei ganzem* g, *mit* $6 \leqslant g \leqslant \log\log t$, *ist für* $1-1/2^{g-1} \leqslant \sigma \leqslant 1$,

$$\Bigl|\sum_{t^{2/g}<n\leqslant t^2} \frac{1}{(n+w)^s}\Bigr| < c_7 \tag{2.6}$$

(Siehe [2], Lemma 3.4, Seite 270).

III. *Für* $1/2 \leqslant \sigma \leqslant 2$, $t \geqslant 3$ *gilt*

$$\Bigl|\zeta(s,\omega) - \sum_{n=0}^{[t^2]} \frac{1}{(n+\omega)^s}\Bigr| < c_8 \,. \tag{2.7}$$

(Siehe [2], Lemma 3.5, Seite 271).

3. Sei $\zeta(s,w)$, $0 < w \leqslant 1$, die Hurwitzsche Funktion. Es gilt das folgende

Lemma 1. *Für*

$$1-\frac{1}{2^{13}} \leqslant \sigma < 1, \qquad t > \exp\frac{c_9}{(1-\sigma)^{3/2}} \tag{3.1}$$

gilt

$$|\zeta(s,w) - w^{-s}| \leqslant \frac{c_{10}}{1-\sigma} t^{215(1-\sigma)^{3/2}} \log t \,. \tag{3.2}$$

Beweis. Ich nutze beim Beweis eine Idee von L. Schoenfeld aus (vergl. [3]). Bezeichnen wir mit $k(\nu)$, $\nu = 1-\sigma$ eine ganzzahlige Funktion. Es sei $k(\nu) \geqslant 7$. Es bezeichne weiter

$$\lambda(\nu) = \max\left\{0, \frac{\nu-\varrho(7)}{6}, \frac{\nu-\varrho(8)}{7}, \ldots, \frac{\nu-\varrho\bigl(k(\nu)\bigr)}{k(\nu)-1}\right\}.$$

Wir wenden jetzt die Vinogradoffsche Abschätzung (2.4), mit $l = 7, 8, \ldots, k(\nu)$, an.

Schreiben wir zuvor (2.2) in der Form

$$t^{1/l} < P \leqslant t^{1/(l-1)} \,.$$

Wenn wir t so groß nehmen, daß

$$t \geqslant e^{5000\cdot(8l)^2 l}, \qquad l \geqslant 7 \tag{3.3}$$

ist, dann ist (2.1) sicherlich erfüllt. Wir haben nämlich wegen (3.3)

$$P > t^{1/l} \geqslant e^{5000\cdot(8l)^2} \,.$$

Es folgt daraus

$$S \leqslant 1{,}04\, P^{\nu-\varrho(7)} \leqslant 1{,}04\, t^{(\nu-\varrho(7))/6},$$

$$t^{1/7} < P \leqslant t^{1/6}, \qquad t \geqslant e^{5000(8\cdot7)^2\cdot7} = c_{11};$$

$$S \leqslant 1{,}04\, P^{\nu-\varrho(8)} \leqslant 1{,}04\, t^{(\nu-\varrho(8))/7},$$

$$t^{1/8} < P \leqslant t^{1/7}, \qquad t \geqslant e^{1000(8\cdot8)^2\cdot8} = c_{12};$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

und endlich

$$S \leqslant 1{,}04\, P^{\nu-\varrho(K(\nu))} \leqslant 1{,}04\, t^{\nu-\varrho(K(\nu))/K(\nu)-1},$$

$$t^{1/K(\nu)} < P \leqslant t^{1/K(\nu)-1}, \qquad t \geqslant e^{5000(8K(\nu))^2 K(\nu)} \,.$$

Für

$$t^{1/K(\nu)} \leqslant P < t^{1/6}, \tag{3.4}$$

$$t \geqslant e^{5000(8K(\nu))^2 K(\nu)}, \tag{3.5}$$

hat man nun gleichmäßig

$$S \leqslant 1{,}04\, t^{\lambda(\nu)} \,. \tag{3.6}$$

Für

$$1 \leqslant P \leqslant t^{1/K(\nu)},$$

ergibt sich einfach wegen (2.3)

$$S \leqslant \sum_{P\leqslant n\leqslant P'} \frac{1}{(n+w)^\sigma} \leqslant \frac{2^\nu}{\nu} t^{\nu/K(\nu)} \,. \tag{3.7}$$

Bei der Annahme:

$$\lambda(\nu) \leqslant \frac{\nu}{K(\nu)}, \tag{3.8}$$

für

$$1 \leqslant P \leqslant t^{1/6}, \tag{3.9}$$

wegen (3.6) und (3.7) folgt dann für (3.5)

$$S \leqslant \frac{2^\nu}{\nu} t^{\nu/K(\nu)}. \tag{3.10}$$

Das Intervall $[1, t^{1/6}]$ teilen wir auf $O(\log t)$ Teilintervalle $[P, P']$ mit (2.3). Bei (3.5) folgt daraus

$$\Big|\sum_{1\leqslant n\leqslant t^{1/6}} (n+w)^{-s}\Big| \leqslant c_{13}\frac{2^\nu}{\nu} t^{\nu/K(\nu)}\log t. \tag{3.11}$$

Aus (2.6) und (2.7), wenn nur $\nu \leqslant \frac{1}{2^{11}}$ ist, bekommt man

$$\Big|\zeta(s, w) - \sum_{n=0}^{[t^{1/6}]} (n+w)^{-s}\Big| \leqslant c_{14}, \qquad t \geqslant c_{15}. \tag{3.12}$$

Durch Addition von (3.11) und (3.12) folgt

$$|\zeta(s, w) - w^{-s}| \leqslant c_{16}\frac{2^\nu}{\nu} t^{\nu/K(\nu)}\log t, \tag{3.13}$$

wenn nur

$$\nu \leqslant \frac{1}{2^{11}}, \qquad t \geqslant \max\{e^{5000\cdot 8^2\cdot (K(\nu))^3}, c_{15}\} \tag{3.14}$$

erfüllt ist.

Wir suchen jetzt das größte mögliche $K(\nu)$. Die Bedingung (3.8) ist mit

$$\nu l + K(\nu)\varrho(l) \geqslant \nu\{K(\nu)+1\} \tag{3.15}$$

$l = 7, 8, \ldots, K(\nu)$ gleichwertig.

Für $l \leqslant K(\nu)$ hat man

$$\nu l + K(\nu)\varrho(l) = \nu l + \frac{K(\nu)}{653\cdot 10^3\cdot (8l)^2} \underset{\text{def.}}{=} \varphi(l). \tag{3.16}$$

Die Funktion $\varphi(l)$ erreicht sein Minimum bei

$$l_0 = \left(\frac{2K(\nu)}{A\nu}\right)^{1/3}, \tag{3.17}$$

$$A = 653\cdot 10^3\cdot 8^2. \tag{3.18}$$

Wir haben also aus (3.16) und (3.17)

$$\varphi(l_0) = \nu\left(\frac{2K(\nu)}{A\nu}\right)^{1/3} + \frac{K(\nu)}{A\left(\frac{2K(\nu)}{A\nu}\right)^{2/3}} = B\nu^{2/3}(K(\nu))^{1/3}$$

und

$$B = \frac{3}{2^{2/3}A^{1/3}}. \tag{3.19}$$

Nach (3.16) folgt also die Abschätzung:

$$\nu l + K(\nu)\varrho(l) \geqslant B\nu^{2/3}(K(\nu))^{1/3}. \tag{3.20}$$

Diese Abschätzung ist von l unabhängig. Die Bedingung (3.15) ist sicher erfüllt, wenn sogar

$$B\nu^{2/3}(K(\nu))^{1/3} \geqslant \nu\{K(\nu)+1\} \tag{3.21}$$

gesetzt wird. Schreiben wir weiter (3.21) in der Form

$$\frac{K(\nu)}{\{K(\nu)+1\}^3} \geqslant \frac{\nu}{B^3}, \tag{3.22}$$

und definieren

$$K(\nu) = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{B^{3/2}}{\nu^{1/2}}\right]. \tag{3.23}$$

Mit

$$\nu < \frac{1}{2^8}, \tag{3.24}$$

was man leicht zeigen kann, erfüllt (3.23) die Ungleichung (3.22).

Wenn wir voraussetzen daß sogar,

$$\nu < \frac{1}{2^{13}} \tag{3.25}$$

ist, dann mit (3.18), (3.19) folgt einfach

$$\frac{\nu}{K(\nu)} \leqslant 2^{15}\nu^{3/2}. \tag{3.26}$$

Aus (3.23), (3.13), (3.14) und (3.26) folgt unser Lemma 1.

Lemma 2. *Für*

$$1 - \frac{c_{16}}{\log^{2/3} t} \leqslant \sigma \leqslant 1, \qquad t \geqslant 3 \tag{3.27}$$

gilt die Abschätzung

$$|\zeta(s, w) - w^{-s}| \leqslant c_{17}\log t. \tag{3.28}$$

Beweis. Zum Beweis, genügt es nach [2] Satz 3.1, Seite 271, $\sigma < 1$ anzunehmen. Ferner genügt es zu beweisen, daß $\zeta(s, w) - w^{-s}$ für genügend großes t unterhalb der Schranke (3.28) bleibt und nach (2.7) genügt es, dies für $\sum_{n\leqslant t^2} (n+w)^{-s}$ nachzuweisen.

Wir unterteilen diese Summe

$$\sum_{n\leqslant t^2} = \sum_{n\leqslant P_0} + \sum_{P_0 < n \leqslant P_1} + \sum_{P_1 < n \leqslant t^2} \tag{3.29}$$

wobei noch P_0 und P_1 bestimmt werden muß. P_0 ist mit der Anwendungsmöglichkeit der Abschätzung (2.4) verbunden.

Schreiben wir (2.2) in der Form

$$l = \left[\frac{\log t}{\log P}\right] + 1\,, \qquad l \geqslant 7 \tag{3.30}$$

und setzen dies in (2.1) ein. Man hat dann

$$P \geqslant \exp\left\{5000\cdot 8^2\left(\left[\frac{\log t}{\log P}\right]+1\right)^2\right\}. \tag{3.31}$$

Die Bedingung (3.31) ist aber für

$$\log P \geqslant 2\cdot 8\sqrt{5000}\,\log^{2/3} t\,, \qquad t \geqslant c_{18} \tag{3.32}$$

sicherlich erfüllt. Wir haben nämlich unter (3.32)

$$5000\cdot 8^2\left(\left[\frac{\log t}{\log P}\right]+1\right)^2 \leqslant 5000\cdot 8^2\left(\frac{\log t}{2\cdot 8\cdot\sqrt{5000}\,\log^{2/3} t}+1\right)^2 \leqslant \log^{2/3} t \leqslant \log P\,.$$

Wir können also

$$P_0 = e^{2\cdot 8\sqrt{5000}\,\log^{2/3} t} \tag{3.33}$$

setzen. Man hat für $0 < \sigma_1 \leqslant \sigma < 1$,

$$\left|\sum_{n\leqslant P_0}\frac{1}{(n+w)^s}\right| \leqslant \sum_{n\leqslant P_0} n^{-\sigma_1} \leqslant 1 + \frac{P_0^{1-\sigma_1}}{1-\sigma_1}\,.$$

Mit

$$\sigma_1 = 1 - \frac{c_{17}}{\log^{2/3} t}\,,$$

ergibt sich nach (3.33)

$$\left|\sum_{n\leqslant P_0}\frac{1}{(n+w)^s}\right| \leqslant c_{20}\log^{2/3} t\,, \qquad t \geqslant c_{21}\,. \tag{3.34}$$

Aus (2.6) mit $g = 6$, und

$$P_1 = t^{1/3}$$

folgt für $1 - \frac{1}{2^5} \leqslant \sigma \leqslant 1\,, \quad t \geqslant c_{22}$

$$\left|\sum_{P_1<n\leqslant t^2}\frac{1}{(n+w)^s}\right| \leqslant c_{23}\,. \tag{3.35}$$

Damit haben wir die Abschätzung der ersten und dritten Summe in (3.29) durchgeführt. Auf die noch verbleibende Summe über $P_0 < n \leqslant P_1$, ist der Vinogradoffsche Satz (2.4) anwendbar wegen (3.33). Aus (2.4), (2.5) und (2.2) hat man

$$S = \left|\sum_{P<n\leqslant P'}\frac{1}{(n+w)^s}\right| \leqslant 1{,}04\, P^{1-\sigma} e^{-\frac{\log P}{653\,000(8l)^2}}$$

$$\leqslant 1{,}04\exp\left\{\left(\frac{1}{l-1}(1-\sigma) - \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{l^3}\right)\log t\right\}$$

mit

$$A = 653\,000\cdot 8^2\,.$$

Für $l \geqslant 7$ ist aber $\frac{1{,}2}{l} > \frac{1}{l-1}$.

Wir haben also

$$S \leqslant 1{,}04\, e^{1,2\left((1-\sigma)\frac{1}{l} - \frac{1}{1,2A}\frac{1}{l^3}\right)\log t}.$$

Die Funktion $(1-\sigma)x - \frac{1}{1{,}2A}x^3$ hat nun bei $x = \sqrt{\frac{A}{3}}(1-\sigma)^{1/2}$ den Maximalwert

$$\frac{2\sqrt{A}}{3\sqrt{3}}(1-\sigma)^{3/2}\,. \tag{3.36}$$

Man hat also

$$S \leqslant 1{,}04\, e^{0,8\sqrt{\frac{A}{3}}(1-\sigma)^{3/2}\log t}, \tag{3.37}$$

und endlich mit (3.27)

$$S = \left|\sum_{P<n\leqslant P'}\frac{1}{(n+w)^s}\right| \leqslant c_{24}\,, \qquad t \geqslant c_{25}\,. \tag{3.38}$$

Teilen wir jetzt die zweite Summe aus (3.29), in Teilsummen der Form $[P, P']$, $P < P' \leqslant 2P-1$ wobei man offenbar mit $O(\log t)$ Teilsummen auskommt und wenden (3.38) auf jede Teilsumme an. Es ergibt sich somit,

$$\left|\sum_{P_0<n\leqslant P'}\frac{1}{(n+w)^s}\right| \leqslant c_{25}\log t\,, \qquad t \geqslant c_{26}\,. \tag{3.39}$$

Aus (3.29), (3.34) und (3.39) bekommt man schliesslich

$$\left|\sum_{n\leqslant t^2}\frac{1}{(n+w)^s}\right| \leqslant c_{27}\log t\,, \qquad t \geqslant c_{28}\,.$$

Damit ist unser Lemma vollständig bewiesen.

4. Aus den Lemmas 1 und 2, folgt unmittelbar mit $w = 1$, unser Satz I. Um den Satz II zu beweisen, genügt es $k \geqslant 2$ voraussetzen. Denn der Fall $k = 1$ ist schon im Satz I enthalten.

Man hat wie bekannt

$$L(s,\chi) = k^{-s}\sum_{m=1}^{k}\chi(m)\left\{\zeta\left(s, \frac{m}{k}\right) - \left(\frac{m}{k}\right)^{-s}\right\} + \sum_{m=1}^{k}\chi(m)m^{-s}\,.$$

Daraus wegen (3.1), (3.2) und (3.27), (3.28) folgt der Satz II.

Um den Satz III zu beweisen, müßen wir noch einige Tatsachen aus der Theorie der Dedekindschen ζ-Funktionen in quadratischen Zahlkörpern, in Betracht ziehen.

Sei K ein beliebiger quadratischer Zahlkörper, $\zeta_k(s)$ die Dedekindsche ζ-Funktion von K und sei d die Diskriminante des Körpers K.

Es ist bekannt ([1] Seite 99), daß

$$\zeta_k(s) = \zeta(s) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{n}\right) \frac{1}{n^s}, \tag{4.1}$$

wo $\zeta(s)$ die Riemannsche ζ-Funktion bezeichnet. $\left(\frac{d}{n}\right)$ bedeutet die Verallgemeinerung des Legendre-Jacobischen Symbols

Bei fixem d, ist aber $\left(\frac{d}{n}\right)$ ein Charakter $\chi_1 \bmod |d|$. Nach (4.1) hat man nun

$$\zeta_k(s) = \zeta(s) L(s, \chi_1) . \tag{4.2}$$

Wir wenden jetzt auf (4.2) die Sätze I, II. Daraus folgt einfach der Satz III.

Literaturverzeichnis

[1] E. Landau, *Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion*, Crelle Journal (1903), B. 125.

[2] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin (1957).

[3] L. Schoenfeld, *The order of the Zeta function near the line* $\sigma = 1$, Research Conference on the Theory of Numbers, Pasadena California (1955), S. 69-72. (Duke Math. J. 24 (1957), S. 601-609).

[4] P. Turán, *Eine Neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

[5] И. М. Виноградов, *Новая оценка функции* $\zeta(1+it)$, Известия Академии Наук СССР, Серия Математическая 22 (1958), S. 161-4.

Reçu par la Rédaction le 22. 3. 1961