pour des entiers m, x_1, y_1, z_1. Il s'ensuit que (20) tient. Comme dans le cas I nous arrivons à un absurde.

Cas III est tout à fait semblable au cas II.

Travaux cités

[1] W. Sierpiński, *Sur quelques problèmes non résolus d'arithmétique*, L'Enseignement Mathématique 5 (1959), pp. 221-235. Cf. aussi Acta Arithm. 6 (1961), p. 469-471.

[2] J. W. S. Cassels, *On a diophantine equation*, Acta Arith. 6 (1960), pp. 47-52.

Reçu par la Rédaction le 12. 3. 1961

ACTA ARITHMETICA
VII (1962)

Sur le nombre des diviseurs premiers de n

par

H. Delange (Paris)

1. Introduction

Soit $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier positif n, et soit $N(x, t)$ le nombre des n au plus égaux à x pour lesquels on a

$$\omega(n) \leqslant \log\log x + t\sqrt{\log\log x}$$

(x étant $> e$ et t quelconque).

Il résulte d'un théorème bien connu d'Erdös et Kac que, quand x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}N(x, t)$ tend vers

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du\,.$$

On peut se proposer d'évaluer la différence entre $\frac{1}{x}N(x, t)$ et sa limite. Dans cet ordre d'idées, le résultat suivant a été conjecturé par LeVêque et démontré par Renyi et Turán ([4] et [5]):

Théorème A. *On a quand x tend vers $+\infty$*

$$\frac{1}{x}N(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du + O\left[\frac{1}{\sqrt{\log\log x}}\right], \tag{1}$$

et ceci uniformément par rapport à t.

Nous nous proposons ici tout d'abord d'indiquer comment ceci peut se déduire du résultat suivant dû à Atle Selberg [6]:

z étant un nombre complexe quelconque, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\omega(n)} = xF(z)(\log x)^{z-1} + O[x(\log x)^{z-2}], \tag{2}$$

F étant la fonction entière définie par

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z)}\prod\left(1-\frac{1}{p}\right)^z\left(1+\frac{z}{p-1}\right),$$

où p parcourt l'ensemble des nombres premiers, et, quel que soit R positif, la formule a lieu uniformément pour $|z| \leqslant R$.

Nous montrerons ensuite qu'un calcul plus précis sur les mêmes bases permet d'établir le résultat suivant:

THÉORÈME B. *Il existe une suite de fonctions $\varphi_1(t, x)$, $\varphi_2(t, x)$, ..., $\varphi_r(t, x)$, ..., dont chacune est bornée pour t quelconque et $x > e$, telle que, quel que soit l'entier positif ν, quand x tend vers $+\infty$, on ait uniformément par rapport à t*

$$(3)\quad \frac{1}{x}N(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du + \sum_{r=1}^{\nu}\frac{\varphi_r(t, x)}{(\sqrt{\log\log x})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{\log\log x})^{\nu+1}}\right].$$

Il est clair que la suite des fonctions $\varphi_r(t, x)$ n'est pas déterminée de façon unique. Nous formerons une suite répondant à la question [1].

On arriverait à des résultats semblables en considérant, au lieu du nombre des diviseurs premiers de n, le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers, ou bien en considérant, au lieu du nombre des n au plus égaux à x pour lesquels on a

$$\omega(n) \leqslant \log\log x + t\sqrt{\log\log x},$$

le nombre des n au plus égaux à x *qui ne sont divisibles par aucun carré* > 1 et pour lesquels on a cette inégalité. Dans ce dernier cas, le terme $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du$ serait remplacé par le même terme multiplié par $6/\pi^2$.

Les démonstrations seraient basées sur deux autres formules d'Atle Selberg analogues à (2).

2. Préliminaires

2.1. Pour la démonstration du théorème A, nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

2.1.1. LEMME. 1. *Si l'on pose*

$$\log n! = (n+\tfrac{1}{2})\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \varepsilon_n,$$

on a $0 < \varepsilon_n < \dfrac{1}{12n}$ *pour tout* $n \geqslant 1$.

Ceci est bien connu.

Il est à noter que ceci entraîne

$$\log n! > n\log n - n, \qquad \text{d'où} \qquad n! > n^n e^{-n}.$$

[1] Nous avons déjà énoncé sans démonstration le résultat obtenu en prenant $\nu = 1$ dans (3). (Cf. [1]).

2.1.2. LEMME 2. *Soient $t_m, t_{m+1}, \ldots, t_q$ des nombres réels croissants, et soit f une fonction réelle à variation bornée sur l'intervalle $[t_m, t_q]$.*

Soit V la variation de f sur cet intervalle et supposons que toutes les différences $t_j - t_{j-1}$ soient au plus égales à δ.

Alors on a

$$\left|\sum_{j=m+1}^{q}(t_j - t_{j-1})f(t_j) - \int_{t_m}^{t_q} f(u)\,du\right| \leqslant V\delta,$$

et par suite

$$\left|\sum_{j=m+1}^{q}(t_j - t_{j-1})f(t_j)\right| \leqslant \int_{t_m}^{t_q} |f(u)|\,du + V\delta.$$

On obtient immédiatement ce résultat en écrivant

$$\sum_{j=m+1}^{q}(t_j - t_{j-1})f(t_j) - \int_{t_m}^{t_q} f(u)\,du = \sum_{j=m+1}^{q}\int_{t_{j-1}}^{t_j}[f(t_j) - f(u)]\,du.$$

Pour chaque j, on a pour tout u appartenant à l'intervalle $[t_{j-1}, t_j]$

$$|f(t_j) - f(u)| \leqslant v_j,$$

où v_j est la variation de f sur $[t_{j-1}, t_j]$, et ceci entraîne

$$\left|\int_{t_{j-1}}^{t_j}[f(t_j) - f(u)]\,du\right| \leqslant v_j(t_j - t_{j-1}) \leqslant v_j\delta.$$

2.2. Pour la démonstration du théorème B, nous aurons besoin en outre des deux lemmes suivants.

2.2.1. LEMME 3. *k étant un entier positif quelconque, on a pour n infini*

$$\log n! = (n+\tfrac{1}{2})\log n - n + \log\sqrt{2\pi} + \sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^{r-1}B_r}{2r(2r-1)}\cdot\frac{1}{n^{2r-1}} + O\left[\frac{1}{n^{2k+1}}\right],$$

où les B_r sont les nombres de Bernouilli.

Ceci est encore bien connu.

2.2.2. LEMME 4. *Soient f une fonction indéfiniment dérivable sur l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, a et b deux nombres réels, avec $a \neq 0$, et m et q deux entiers, avec $m < q$.*

Alors, quel que soit l'entier positif k, on a

$$\sum_{j=m+1}^{q} af(aj+b) = \int_{am+b}^{aq+b} f(u)\,du + \frac{a}{2}f(aq+b) - \frac{a}{2}f(am+b)$$
$$+ \sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^r B_r}{(2r)!}a^{2r}[f^{(2r-1)}(aq+b) - f^{(2r-1)}(am+b)]$$
$$- a^{2k+2}\int_{am+b}^{aq+b} f^{(2k+2)}(u)\,\psi_{2k+2}\left(\frac{u-b}{a}\right)du,$$

les B_r étant encore les nombres de Bernouilli et les ψ_r certaines fonctions continues périodiques de période 1.

On obtient immédiatement ce résultat en évaluant la somme $\sum_{j=m}^{q} f(aj+b)$ par application de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin à la fonction égale à $f(au+b)$.

3. Démonstration du théorème A

3.1. Comme, quel que soit $R>0$, la formule (2) a lieu uniformément pour $|z|\leqslant R$, on peut y faire $z=\exp\left\{\frac{\zeta}{\sqrt{\log\log x}}\right\}$, avec ζ complexe quelconque, et, quel que soit $\varrho>0$, la formule obtenue est valable uniformément pour $|\zeta|\leqslant\varrho$.

En multipliant par $\frac{1}{x}\exp\{-\zeta\sqrt{\log\log x}\}$, on voit que, quand x tend vers $+\infty$, l'expression

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\exp\left\{\zeta\frac{\omega(n)-\log\log x}{\sqrt{\log\log x}}\right\}$$

converge uniformément pour $|\zeta|\leqslant\varrho$ vers $e^{\zeta^2/2}$.

Il en résulte que, pour chaque entier positif k, le coefficient de ζ^k dans le développement en série entière de cette expression, soit

$$\frac{1}{k!\,x}\sum_{n\leqslant x}\left[\frac{\omega(n)-\log\log x}{\sqrt{\log\log x}}\right]^k,$$

tend vers le coefficient de ζ^k dans le développement en série entière de $e^{\zeta^2/2}$.

Autrement dit, en designant ce dernier coefficient par $\mu_k/k!$ on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x}[\omega(n)-\log\log x]^k=\mu_k x(\log\log x)^{k/2}+o[x(\log\log x)^{k/2}],$$

résultat qui peut d'ailleurs être établi élémentairement (voir [3] et [2]).

Il nous suffira en fait de savoir que, quel que soit l'entier positif k, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x}[\omega(n)-\log\log x]^k=O[x(\log\log x)^{k/2}].$$

3.1.1. On déduit immédiatement de là que, quels que soient α et σ positifs, le nombre des n au plus égaux à x pour lesquels

$$|\omega(n)-\log\log x|\geqslant(\log\log x)^{1/2+\alpha}$$

est

$$O\left[\frac{x}{(\log\log x)^{\sigma}}\right].$$

Pour cela, il suffit de prendre $k=2h$, avec h entier assez grand pour que $2h\alpha\geqslant\sigma$.

Ceci entraîne, que, quels que soient α et $\sigma>0$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\frac{1}{x}N[x,-(\log\log x)^{\alpha}]=O\left[\frac{1}{(\log\log x)^{\sigma}}\right]$$

et

$$\frac{1}{x}N[x,(\log\log x)^{\alpha}]=1-O\left[\frac{1}{(\log\log x)^{\sigma}}\right],$$

de sorte que l'on a uniformément pour $t\leqslant-(\log\log x)^{\alpha}$

$$\frac{1}{x}N(x,t)=O\left[\frac{1}{(\log\log x)^{\sigma}}\right],$$

et uniformément pour $t\geqslant(\log\log x)^{\alpha}$

$$\frac{1}{x}N(x,t)=1-O\left[\frac{1}{(\log\log x)^{\sigma}}\right].$$

3.1.2. En prenant $\sigma=\frac{1}{2}$ et tenant compte de ce que l'on a pour $T>0$

$$\int_T^{+\infty}e^{-u^2/2}du=\int_0^{+\infty}e^{-(T+v)^2/2}dv<\int_0^{+\infty}e^{-vT-T^2/2}dv=\frac{1}{T}e^{-T^2/2},$$

on déduit de là que, pour établir le théorème A, il suffit de montrer que, pour un $\alpha>0$, la formule (1) a lieu uniformément pour

$$|t|\leqslant(\log\log x)^{\alpha}.$$

3.2. Posons maintenant

$$P_x(z)=\sum_{n\leqslant x}z^{\omega(n)}$$

et

$$P_x(z)=xF(z)(\log x)^{z-1}+xQ_x(z)\qquad(x>e),$$

de sorte que P_x est un polynome et Q_x une fonction entière.

La formule (2) s'écrit alors

$$Q_x(z)=O[(\log x)^{z-2}].$$

Ceci ayant lieu uniformément pour $|z|\leqslant1$, il existe un x_0, que nous pouvons supposer $>e^e$ (de sorte que $\log\log x_0>1$), et un nombre positif K, tels que

$$|Q_x(z)|\leqslant K(\log x^{\Re z-2})\quad\text{pour}\quad|z|\leqslant1\text{ et }x\geqslant x_0.\tag{4}$$

3.3. Lorsque $x > e$ et $|t| \leqslant \sqrt{\log\log x}$, $N(x, t)$ est le coefficient de z^q, où q est la partie entière de

$$\log\log x + t\sqrt{\log\log x},$$

dans le développement en série entière de $P_x(z)/(1-z)$.

Par suite, $\frac{1}{x}N(x, t)$ est la somme des coefficients de z^q dans les développements en série entière de

$$\frac{(\log x)^{z-1}}{1-z}, \quad \frac{F(z)-1}{1-z}(\log x)^{z-1} \quad \text{et} \quad \frac{Q_x(z)}{1-z}.$$

En écrivant l pour $\log\log x$, le premier est

$$\sum_{j=0}^{q} \frac{l^j e^{-l}}{j!} = \sum_{j \leqslant l + t\sqrt{l}} \frac{l^j e^{-l}}{j!}.$$

Le second est

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{F(z)-1}{1-z} \cdot \frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}}\, dz,$$

où γ est une circonférence quelconque de centre O, car $(F(z)-1)/(1-z)$ est une fonction entière puisque $F(1) = 1$.

Le troisième est

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{Q_x(z)}{(1-z)z^{q+1}}\, dz,$$

ou γ' est une circonférence quelconque de centre O et de rayon < 1.

3.3.1. En prenant le rayon de γ égal à 1 et désignant par M le maximum de $\left|\frac{F(z)-1}{1-z}\right|$ sur γ, on voit que, pour $x > e$,

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{F(z)-1}{1-z} \cdot \frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}}\, dz\right| \leqslant \frac{M}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-l(1-\cos\theta)}\, d\theta.$$

Comme, pour $|\theta| \leqslant \pi$, $1 - \cos\theta \geqslant \frac{2}{\pi^2}\theta^2$, on voit que ceci est au plus égal à

$$\frac{M}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2l\theta^2/\pi^2}\, d\theta = \frac{1}{\sqrt{l}}\,\frac{M}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2u^2/\pi^2}\, du = \frac{K_1}{\sqrt{l}}.$$

3.3.2. En prenant le rayon de γ' égal à $1 - 1/l$ et utilisant (4), on voit que, si $x \geqslant x_0$ (de sorte que $l > 1$) et $t \leqslant \sqrt{l}$, on a

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma'} \frac{Q_x(z)}{(1-z)z^{q+1}}\, dz\right| \leqslant K_2 e^{-l}\sqrt{l},$$

avec

$$K_2 = \frac{Ke}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{l_0}\right)^{-2l_0}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2u^2/\pi^2}\, du, \quad \text{où} \quad l_0 = \log\log x_0.$$

En effet, on a pour $z = \left(1 - \frac{1}{l}\right)e^{i\theta}$, avec $|\theta| \leqslant \pi$,

$$|Q_x(z)| \leqslant K e^{l[\Re z - 2]} = K\exp\left[l\left(1 - \frac{1}{l}\right)\cos\theta - 2l\right]$$
$$\leqslant K\exp[1 - l - l(1 - \cos\theta)] \leqslant K\exp[1 - l - 2l\theta^2/\pi^2],$$

et par suite

$$\left|\frac{Q_x(z)}{(1-z)z^{q+1}}\right| \leqslant l\left(1 - \frac{1}{l}\right)^{-q-1} K\exp[1 - l - 2l\theta^2/\pi^2]$$
$$\leqslant K l e^{1-l}\left(1 - \frac{1}{l}\right)^{-2l-1} e^{-2l\theta^2/\pi^2},$$

puisque $q \leqslant l + t\sqrt{l} \leqslant 2l$.

On a donc

$$\left|\int_{\gamma'} \frac{Q_x(z)}{(1-z)z^{q+1}}\, dz\right| \leqslant K l e^{1-l}\left(1 - \frac{1}{l}\right)^{-2l-1}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-2l\theta^2/\pi^2}\left(1 - \frac{1}{l}\right) d\theta$$
$$\leqslant K l e^{1-l}\left(1 - \frac{1}{l}\right)^{-2l}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2l\theta^2/\pi^2}\, d\theta$$
$$= K e^{1-l}\sqrt{l}\left(1 - \frac{1}{l}\right)^{-2l}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2u^2/\pi^2}\, du.$$

Par ailleurs, $(1 - 1/l)^{-2l} \leqslant (1 - 1/l_0)^{-2l_0}$ puisque $l \geqslant l_0$ et que, comme on le voit immédiatement, $(1 - 1/u)^{-2u}$ est une fonction décroissante de u pour $u > 1$ ([2]).

3.3.3. On voit donc finalement que, pour établir le théorème A, *il suffit* de montrer que, pour *un* α positif et $\leqslant \frac{1}{2}$, lorsque l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t| \leqslant l^\alpha$

$$\sum_{j \leqslant l + t\sqrt{l}} \frac{l^j e^{-l}}{j!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du + O\left[\frac{1}{\sqrt{l}}\right].$$

En fait, nous montrerons que ceci a lieu pour α positif $< \frac{1}{6}$.

([2]) Pour $u > 1$, $\log\left[\left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-2u}\right] = 2\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{ju^{j-1}}$.

3.4. a étant ainsi fixé, si $l>1$ et $|t|\leqslant l^a$, on a

$$l+t\sqrt{l}>l-l^{2/3}.$$

Nous allons voir que, pour établir le résultat voulu, il suffit de montrer que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t|\leqslant l^a$

$$\sum_{l-l^{2/3}<j\leqslant l+t\sqrt{l}}\frac{l^je^{-l}}{j!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l^{1/6}}^{t}e^{-u^2/2}du+O\left[\frac{1}{\sqrt{l}}\right].$$

En effet, d'une part, on a pour tout $l>0$

$$\int_{-\infty}^{-l^{1/6}}e^{-u^2/2}du<l^{-1/6}e^{-l^{1/3}/2}.$$

D'autre part, si m est le plus grand entier au plus égal à $l-l^{2/3}$, on a dès que $l-l^{2/3}\geqslant 1$

$$\sum_{j\leqslant l-l^{2/3}}\frac{l^je^{-l}}{j!}\leqslant(m+1)\frac{l^me^{-l}}{m!}<\frac{(m+1)l^me^{m-l}}{m^m},$$

puisque chaque terme de la somme est supérieur au précédent et que $m!>m^me^{-m}$ d'après le lemme 1.

Or, quand l tend vers $+\infty$,

$$\log\left[\frac{(m+1)l^me^{m-l}}{m^m}\right]\sim-\frac{1}{2}l^{1/3},$$

car $m\sim l$, $l-m\sim l^{2/3}$ de sorte que $\dfrac{l-m}{l}\sim l^{-1/3}$, et

$$\log\left[\frac{l^me^{m-l}}{m^m}\right]=-m\log\frac{m}{l}+m-l$$
$$=-l\left\{\left[1-\frac{l-m}{l}\right]\log\left[1-\frac{l-m}{l}\right]+\frac{l-m}{l}\right\}.$$

3.5. Nous poserons maintenant, pour $l>0$ et $j\geqslant 0$,

$$j=l+t_j\sqrt{l},$$
$$\frac{l^je^{-l}}{j!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}e^{-t_j^2/2}[1+\eta_j]$$

et

$$\log(1+\eta_j)=\lambda_j.$$

3.5.1. Nous montrerons d'abord que, si $l\geqslant 8$ et $|t|\leqslant l^a$, on a

$$|\eta_j|\leqslant\frac{3}{\sqrt{l}}(1+|t_j|^3)\quad\text{pour}\quad l-l^{2/3}<j\leqslant l+t\sqrt{l}.\tag{5}$$

Notons en premier lieu que

$$l-l^{2/3}=l(1-l^{-1/3})\geqslant\frac{l}{2}>\frac{1}{2}\sqrt{l},$$

et par suite $j>\frac{1}{2}\sqrt{l}$.

D'autre part, $|t_j|\leqslant l^{1/6}$, et par suite

$$\frac{|t_j|^3}{\sqrt{l}}\leqslant 1\quad\text{et}\quad\frac{|t_j|}{\sqrt{l}}\leqslant l^{-1/3}\leqslant\frac{1}{2}.$$

Ensuite, comme $1+\eta_j=\sqrt{2\pi l}\,e^{-t_j^2/2}\dfrac{l^je^{-l}}{j!}$, on a

$$\lambda_j=-j\log\frac{j}{l}+j-l+\frac{t_j^2}{2}-\frac{1}{2}\log\frac{j}{l}-\left[\log j!-\left(j+\frac{1}{2}\right)\log j+j-\log\sqrt{2\pi}\right]$$
$$=-l\left[\frac{j}{l}\log\frac{j}{l}-\frac{j-l}{l}-\frac{t_j^2}{2l}\right]-\frac{1}{2}\log\frac{j}{l}-\left[\log j!-\left(j+\frac{1}{2}\right)\log j+j-\log\sqrt{2\pi}\right],$$

ce qui s'écrit

$$\lambda_j=-l\left[\left(1+\frac{t_j}{\sqrt{l}}\right)\log\left(1+\frac{t_j}{\sqrt{l}}\right)-\frac{t_j}{\sqrt{l}}-\frac{1}{2}\left(\frac{t_j}{\sqrt{l}}\right)^2\right]$$
$$-\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{t_j}{\sqrt{l}}\right)-\left[\log j!-\left(j+\frac{1}{2}\right)\log j+j-\log\sqrt{2\pi}\right].\tag{6}$$

En tenant compte de ce que, pour $|u|\leqslant\frac{1}{2}$,

$$\left|(1+u)\log(1+u)-u-\frac{u^2}{2}\right|\leqslant\frac{|u|^3}{3}\ (^3)$$

et

$$|\log(1+u)|\leqslant 2|u|,$$

et du lemme 1, on en déduit

$$|\lambda_j|\leqslant\frac{|t_j|^3}{3\sqrt{l}}+\frac{|t_j|}{\sqrt{l}}+\frac{1}{12j}\leqslant\frac{|t_j|^3}{3\sqrt{l}}+\frac{|t_j|}{\sqrt{l}}+\frac{1}{6\sqrt{l}}=\frac{1}{6\sqrt{l}}[2|t_j|^3+6|t_j|+1],$$

puisque $j>\frac{1}{2}\sqrt{l}$.

---

(3) Comme $(1+u)\log(1+u)-u-\frac{1}{2}u^2$ a pour dérivée $\log(1+u)-u$ on a pour $|u|<1$

$$(1+u)\log(1+u)-u-\tfrac{1}{2}u^2=\sum_{2}^{+\infty}\frac{(-1)^{j-1}u^{j+1}}{j(j+1)},$$

d'où

$$\left|(1+u)\log(1+u)-u-\frac{u^2}{2}\right|\leqslant\sum_{2}^{+\infty}\frac{|u|^{j+1}}{j(j+1)}\leqslant\sum_{2}^{+\infty}\frac{|u|^{j+1}}{6}=\frac{|u|^3}{6(1-|u|)}.$$

Ceci entraîne

$$|\lambda_j| \leqslant \frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6\sqrt{8}}<1\,,$$

et, comme, pour $|u|\leqslant 1$,

$$|e^u-1|\leqslant (e-1)|u|\leqslant 2|u|\,,$$

on en déduit

$$|\eta_j|\leqslant \frac{1}{3\sqrt{l}}[2|t_j|^3+6|t_j|+1]\,.$$

Maintenant, si $|t_j|>1$,

$$2|t_j|^3+6|t_j|+1<9|t_j|^3<9(1+|t_j|^3)\,,$$

et, si $|t_j|\leqslant 1$,

$$2|t_j|^3+6|t_j|+1\leqslant 9\leqslant 9(1+|t_j|^3)\,.$$

3.5.2. Ceci étant, supposons que $l\geqslant 8$ et $|t|\leqslant l^{\alpha}$, et désignons par q le plus grand entier $\leqslant l+t\sqrt{l}$ et, comme plus haut, par m le plus grand entier $\leqslant l-l^{2/3}$ (de sorte que $m\leqslant q$).

Si $m\leqslant q-1$, on a

$$\sum_{l-l^{2/3}<j\leqslant l+t\sqrt{l}}\frac{l^je^{-l}}{j!}=\sum_{j=m+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}e^{-t_j^2/2}[1+\eta_j]\,,$$

d'où

$$\sum_{l-l^{2/3}<j\leqslant l+t\sqrt{l}}\frac{l^je^{-l}}{j!}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l^{1/6}}^{t}e^{-u^2/2}du=A+B+C\,,$$

avec

$$A=\sum_{m+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}e^{-t_j^2/2}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_m}^{t_q}e^{-u^2/2}du\,,$$

$$B=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_m}^{-l^{1/6}}e^{-u^2/2}du-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{t_q}^{t}e^{-u^2/2}du\,,$$

et

$$C=\sum_{m+1}^{q}\frac{\eta_je^{-t_j^2/2}}{\sqrt{2\pi l}}\,.$$

Comme $t_j-t_{j-1}=1/\sqrt{l}$ et comme la variation de $e^{-u^2/2}/\sqrt{2\pi}$ sur l'intervalle $[t_m,t_q]$ est inférieure à $2/\sqrt{2\pi}$, il résulte du lemme 2 que

$$|A|\leqslant\frac{2}{\sqrt{2\pi l}}\,.$$

Comme $0\leqslant -l^{1/6}-t_m<1/\sqrt{l}$ et $0\leqslant t-t_q<1/\sqrt{l}$, on a

$$|B|\leqslant\frac{2}{\sqrt{2\pi l}}\,.$$

Enfin, d'après (5) on a

$$|C|\leqslant\frac{3}{\sqrt{2\pi l}}\sum_{m+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{l}}[1+|t_j|^3]e^{-t_j^2/2}\,,$$

d'où, d'après le lemme 2,

$$|C|\leqslant\frac{3}{\sqrt{2\pi l}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|u|^3)e^{-u^2/2}du+\frac{\Omega}{\sqrt{l}}\right]$$

$$\leqslant\frac{3}{\sqrt{2\pi l}}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}(1+|u|^3)e^{-u^2/2}du+\frac{\Omega}{\sqrt{8}}\right]=\frac{K_3}{\sqrt{2\pi l}}\,,$$

Ω étant la variation de $(1+|u|^3)e^{-u^2/2}$ sur $]-\infty,+\infty[$.

En définitive,

$$\left|\sum_{l-l^{2/3}<j\leqslant l+t\sqrt{l}}\frac{l^je^{-l}}{j!}-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-l^{1/6}}^{t}e^{-u^2/2}du\right|\leqslant\frac{4+K_3}{\sqrt{2\pi l}}\,.$$

Si $m=q$, le $\sum$ est nul et l'inégalité a encore lieu car $t-(-l^{1/6})<1/\sqrt{l}$.

La démonstration du théorème A est ainsi achevée.

4. Démonstration du théorème B

Pour démontrer le théorème B, nous procéderons de la façon suivante:

Ayant fixé un nombre positif α inférieur à $\frac{1}{12}$, nous formerons d'abord une suite de fonctions réelles $\varphi_1(t,x),\varphi_2(t,x),\ldots,\varphi_r(t,x),\ldots,$ définies pour t réel quelconque et $x>e$, telle que, lorsque x tend vers $+\infty$, quel que soit l'entier positif ν, la relation (3) ait lieu uniformément pour

$$|t|\leqslant(\log\log x)^{\alpha}\,.$$

Puis nous constaterons qu'en fait cette relation a lieu uniformément par rapport à t, sans restriction.

4.1. Si l'on tient compte de ce qui a été dit aux paragraphes 3.3 et 3.3.2, on voit que, pour obtenir une suite de fonctions $\varphi_r(t,x)$, définies pour t réel quelconque et $x>e$, telle que (3) ait lieu uniformément pour

$$|t|\leqslant(\log\log x)^{\alpha}\,,$$

il suffit de trouver une suite de fonctions $\Phi_r(t, l)$, définies pour t réel quelconque et $l>0$, telle que, lorsque l tend vers $+\infty$, quel que soit l'entier positif ν, on ait uniformément pour $|t| \leqslant l^{\alpha}$

$$\sum_{j \leqslant l+t\sqrt{l}} \frac{l^j e^{-l}}{j!} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{F(z)-1}{1-z}\cdot\frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}}\,dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du + \sum_{r=1}^{\nu}\frac{\Phi_r(t, l)}{(\sqrt{l})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right], \tag{7}$$

où q est, comme nous le supposerons dans toute la suite, le plus grand entier $\leqslant l+t\sqrt{l}$ (de sorte que q est fonction de t et de l), et γ la circonférence $|z|=1$.

On peut alors prendre

$$\varphi_r(t, x) = \Phi_r(t, \log\log x).$$

4.2. Définissons d'abord deux suites de polynomes à une variable $R_1, R_2, \ldots, R_r, \ldots$ et $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_r, \ldots$ par

$$R_1(t) = \frac{t^3}{6} - \frac{t}{2}$$

et, pour $r \geqslant 2$,

$$R_r(t) = \frac{(-1)^{r-1}}{(r+1)(r+2)}t^{r+2} + \frac{(-1)^r}{2r}t^r + \sum_{1\leqslant h\leqslant (r+2)/4}\frac{(-1)^{r+h-1}B_h}{2h(2h-1)}\binom{r-2h}{r+2-4h}t^{r+2-4h},$$

$B_1, B_2, \ldots$ étant les nombres de Bernouilli, puis

$$S_0(t) = 1$$

et, pour $r \geqslant 1$,

$$S_r(t) = \text{coefficient de } u^r \text{ dans } \sum_{h=1}^{r}\frac{1}{h!}\left[\sum_{k=1}^{r}R_k(t)\,u^k\right]^h.$$

Nous définirons ensuite les suites de fonctions $T_0, T_1, T_2, \ldots, T_r, \ldots$ et $U_0, U_1, U_2, \ldots, U_r, \ldots$ par

$$T_r(t) = \frac{S_r(t)}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2},$$

puis

$$U_0(t) = \int_{-\infty}^{t} T_0(u)\,du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du,$$

$$U_1(t) = \int_{-\infty}^{t} T_1(u)\,du + \tfrac{1}{2}T_0(t),$$

et, pour $r \geqslant 2$,

$$U_r(t) = \int_{-\infty}^{t} T_r(u)\,du + \tfrac{1}{2}T_{r-1}(t) + \sum_{1\leqslant h\leqslant r/2}\frac{(-1)^h B_h}{(2h)!}T_{r-2h}^{(2h-1)}(t).$$

4.2.1. On voit immédiatement que les polynomes R_r et S_r sont pairs lorsque r est pair, et impairs lorsque r est impair.

Il en résulte que $U_r(t)$ est le produit de $e^{-t^2/2}$ par un polynome en t lorsque r est impair, et une expression de cette forme augmentée d'un terme

$$a_r\int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}du,$$

ou a_r est une constante, lorsque r est pair $\geqslant 2$.

4.3. Nous utiliserons encore les notations indiquées au paragraphe 3.5.

Nous allons montrer que, quel que soit l'entier positif ν, lorsque l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t| \leqslant l^{\alpha}$

$$\sum_{j\leqslant l+t\sqrt{l}}\frac{l^j e^{-l}}{j!} = \sum_{r=0}^{\nu}\frac{U_r(t_q)}{(\sqrt{l})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right]. \tag{8}$$

4.3.1. Soit N un entier $\geqslant \dfrac{6\nu+13}{20}$ $\left(\text{de sorte que } 4N-2 \geqslant \dfrac{6\nu+3}{5} > \nu\right)$.

On voit d'abord que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $l-l^{7/12} < j \leqslant l+l^{7/12}$

$$\lambda_j = \sum_{r=1}^{4N-2}\frac{R_r(t_j)}{(\sqrt{l})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right]. \tag{9}$$

En effet, si $l>0$ et $l-l^{7/12} < j \leqslant l+l^{7/12}$, on a $|t_j| \leqslant l^{1/12}$, d'où

$$\left|\frac{t_j}{\sqrt{l}}\right| \leqslant l^{-5/12} = \left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)^{5/6}.$$

Alors, si l'on tient compte de ce que, k étant un entier positif quelconque, on a pour u tendant vers zéro

$$\log(1+u) = \sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^{r-1}}{r}u^r + O[u^{k+1}]$$

et

$$(1+u)\log(1+u) - u - \frac{u^2}{2} = \sum_{r=1}^{k}\frac{(-1)^r}{(r+1)(r+2)}u^{r+2} + O[u^{k+3}],$$

on voit que, lorsque l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $l-l^{7/12} < j \leqslant l+l^{7/12}$

$$\log\left(1+\frac{t_j}{\sqrt{l}}\right) = \sum_{r=1}^{4N-2} \frac{(-1)^{r-1}}{r}\cdot\frac{t_j^r}{(\sqrt{l})^r} + O\left[\left(\frac{1}{\sqrt{l}}\right)^{\frac56(4N-1)}\right],$$

d'où

(10) $$\log\left(1+\frac{t_j}{\sqrt l}\right) = \sum_{r=1}^{4N-2}\frac{(-1)^{r-1}t_j^r}{r}\cdot\frac{1}{(\sqrt l)^r}+O\left[\frac{1}{(\sqrt l)^{\nu+1}}\right],$$

puisque $\frac56(4N-1)\geqslant \nu+\frac43>\nu+1$, et

$$\left(1+\frac{t_j}{\sqrt l}\right)\log\left(1+\frac{t_j}{\sqrt l}\right)-\frac{t_j}{\sqrt l}-\frac12\left(\frac{t_j}{\sqrt l}\right)^2 = \sum_{r=1}^{4N-2}\frac{(-1)^r}{(r+1)(r+2)}\cdot\frac{t_j^{r+2}}{(\sqrt l)^{r+2}}+O\left[\left(\frac1{\sqrt l}\right)^{\frac56(4N+1)}\right],$$

ou

$$l\left[\left(1+\frac{t_j}{\sqrt l}\right)\log\left(1+\frac{t_j}{\sqrt l}\right)-\frac{t_j}{\sqrt l}-\frac12\left(\frac{t_j}{\sqrt l}\right)^2\right] = \sum_{r=1}^{4N-2}\frac{(-1)^r t_j^{r+2}}{(r+1)(r+2)}\cdot\frac{1}{(\sqrt l)^r}+O\left[\left(\frac1{\sqrt l}\right)^{\frac56(4N+1)-2}\right],$$

ce qui donne

(11) $$l\left[\left(1+\frac{t_j}{\sqrt l}\right)\log\left(1+\frac{t_j}{\sqrt l}\right)-\frac{t_j}{\sqrt l}-\frac12\left(\frac{t_j}{\sqrt l}\right)^2\right] = \sum_{r=1}^{4N-2}\frac{(-1)^r t_j^{r+2}}{(r+1)(r+2)}\cdot\frac{1}{(\sqrt l)^r}+O\left[\frac{1}{(\sqrt l)^{\nu+1}}\right],$$

puisque $\frac56(4N+1)-2\geqslant\nu+1$.

D'après le lemme 3, on a aussi, uniformément pour $l-l^{7/12}<j\leqslant l+l^{7/12}$,

$$\log j! -(j+\tfrac12)\log j + j - \log\sqrt{2\pi} = \sum_{h=1}^N \frac{(-1)^{h-1}B_h}{2h(2h-1)}\cdot\frac{1}{j^{2h-1}}+O\left[\frac1{j^{2N+1}}\right] = \sum_{h=1}^N \frac{(-1)^{h-1}B_h}{2h(2h-1)}\cdot\frac{1}{j^{2h-1}}+O\left[\frac1{(\sqrt l)^{\nu+1}}\right],$$

puisque, quand $l\geqslant 8$, $j\geqslant l-l^{2/3}=l(1-l^{-1/3})\geqslant\frac12 l$, et que $2(2N+1)\geqslant\frac13(6\nu+23)>\nu+1$.

Mais

$$\frac1{j^{2h-1}}=\frac1{(l+t_j\sqrt l)^{2h-1}}=\frac1{(\sqrt l)^{4h-2}}\left(1+\frac{t_j}{\sqrt l}\right)^{-(2h-1)}$$

et, comme, quand u tend vers zéro,

$$(1+u)^{-(2h-1)}=\sum_{k=0}^{4(N-h)}(-1)^k\binom{2h-2+k}{k}u^k+O[u^{4(N-h)+1}],$$

on voit que, pour chaque $h\leqslant N$, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $l-l^{7/12}<j\leqslant l+l^{7/12}$

$$\frac1{j^{2h-1}} = \sum_{k=0}^{4(N-h)}(-1)^k\binom{2h-2+k}{k}\frac{t_j^k}{(\sqrt l)^{4h-2+k}}+O\left[\left(\frac1{\sqrt l}\right)^{\frac56[4(N-h)+1]+4h-2}\right] = \sum_{k=0}^{4(N-h)}(-1)^k\binom{2h-2+k}{k}\frac{t_j^k}{(\sqrt l)^{4h-2+k}}+O\left[\frac1{(\sqrt l)^{\nu+1}}\right],$$

puisque $\frac56[4(N-h)+1]+4h-2\geqslant\nu+1+\frac23 h>\nu+1$.

On obtient donc

(12) $$\log j!-(j+\tfrac12)\log j+j-\log\sqrt{2\pi} = \sum_{h=1}^N\frac{(-1)^hB_h}{2h(2h-1)}\sum_{k=0}^{4(N-h)}(-1)^k\binom{2h-2+k}{k}\frac{t_j^k}{(\sqrt l)^{4h-2+k}}+O\left[\frac1{(\sqrt l)^{\nu+1}}\right].$$

En tenant compte de (6), les relations (10), (11) et (12) donnent (9).

4.3.2. Quand $l-l^{7/12}<j\leqslant l+l^{7/12}$ on a $|t_j|\leqslant l^{1/12}$, et par suite $|t_j|\leqslant l^{1/6}$ si $l\geqslant 1$.

Le calcul fait au paragraphe 3.5.1 montre donc que, quand $l\geqslant 8$ et $l-l^{7/12}<j\leqslant l+l^{7/12}$,

$$|\lambda_j|\leqslant\frac1{6\sqrt l}[2|t_j|^3+6|t_j|+1],$$

d'où l'on déduit

(13) $$|\lambda_j|\leqslant\frac1{6\sqrt l}[2l^{1/4}+6l^{1/12}+1]\leqslant\frac{3}{2(\sqrt l)^{1/2}},$$

car $l^{1/12}<l^{1/4}$ et $1<l^{1/4}$.

Compte tenu de (9), ceci montre que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $l-l^{7/12}<j\leqslant l+l^{7/12}$

(14) $$\sum_{r=1}^{4N-2}\frac{R_r(t_j)}{(\sqrt l)^r}=O\left[\frac1{(\sqrt l)^{1/2}}\right]=O[1].$$

Il résulte de (13) que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $l-l^{7/12}<j\leqslant l+l^{7/12}$

$$1+\eta_j=e^{\lambda_j}=1+\sum_{h=1}^{2\nu+1}\frac{\lambda_j^h}{h!}+O\left[\frac1{(\sqrt l)^{\nu+1}}\right],$$

et, en tenant compte de (9) et de (14), ceci donne

$$1+\eta_j = 1+\sum_{h=1}^{2\nu+1}\frac{1}{h!}\Big[\sum_{k=1}^{4N-2}\frac{R_k(t_j)}{(\sqrt{l})^k}\Big]^h + O\Big[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\Big],$$

ce qui peut s'écrire

$$1+\eta_j = \sum_{r=0}^{(2\nu+1)(4N-2)}\frac{S_r^*(t_j)}{(\sqrt{l})^r} + O\Big[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\Big],$$

où les S_r^* sont des polynomes.

On voit d'ailleurs que, *pour* $r \leqslant \nu$, $S_r^* = S_r$.

En multipliant par $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi l}}e^{-t_j^2/2}$, on voit finalement que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $l-l^{7/12} < j \leqslant l+l^{7/12}$

$$(15)\qquad \frac{l^j e^{-l}}{j!} = \sum_{r=0}^{(2\nu+1)(4N-2)}\frac{T_r^*(t_j)}{(\sqrt{l})^{r+1}} + O\Big[\frac{e^{-t_j^2/2}}{(\sqrt{l})^{\nu+2}}\Big],$$

où $T_r^*(t) = \dfrac{S_r^*(t)}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$, de sorte que, *pour* $r \leqslant \nu$,

$$T_r^*(t) = T_r(t)\,.$$

4.3.3. Il existe un $L > 0$ tel que, quand $l \geqslant L$, on a $l^{7/12} - l^{a+1/2} \geqslant 2$.

Si l'on désigne par m le plus grand entier $\leqslant l-l^{7/12}$ (de sorte que m est fonction de l seul) ([4]), on voit que, quand $l \geqslant L$ et $|t| \leqslant l^a$, on a $q \geqslant m+1$, puisque $l+t\sqrt{l}-(l-l^{7/12}) \geqslant 2$, et les j qui satisfont à $l-l^{7/12} < j \leqslant l+t\sqrt{l}$ sont ceux qui vont de $m+1$ à q.

D'autre part, quand $l \geqslant 1$, si $|t| \leqslant l^a$ et $l-l^{7/12} < j \leqslant l+t\sqrt{l}$, on a $l-l^{7/12} < j \leqslant l+l^{7/12}$.

Par suite, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément (15) pour $|t| \leqslant l^a$ et $l-l^{7/12} < j \leqslant l+t\sqrt{l}$.

On voit donc que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformèment pour $|t| \leqslant l^a$

$$\sum_{l-l^{7/12}<j\leqslant l+t\sqrt{l}}\frac{l^j e^{-l}}{j!} = \sum_{r=0}^{(2\nu+1)(4N-2)}\frac{1}{(\sqrt{l})^r}\sum_{j=m+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{l}}T_r^*(t_j) + O\Big[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\sum_{j=m+1}^{q}\frac{e^{-t_j^2/2}}{\sqrt{l}}\Big].$$

Mais le lemme 2 montre que l'on a uniformément pour $|t| \leqslant l^a$

$$\sum_{j=m+1}^{q}\frac{e^{-t_j^2/2}}{\sqrt{l}} = O[1]$$

([4]) m n'a donc plus ici la même signification qu'aux paragraphes 3.4 et 3.5.2.

et, pour chaque r,

$$\sum_{j=m+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{l}}T_r^*(t_j) = O[1]\,.$$

Alors, comme, pour $r \leqslant \nu$, $T_r^* = T_r$, on obtient

$$(16)\qquad \sum_{l-l^{7/12}<j\leqslant l+t\sqrt{l}}\frac{l^j e^{-l}}{j!} = \sum_{r=0}^{\nu}\frac{1}{(\sqrt{l})^r}\sum_{j=m+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{l}}T_r(t_j) + O\Big[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\Big].$$

Maintenant, le lemme 4 permet d'écrire pour chaque r

$$\sum_{j=m+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{l}}T_r(t_j) = \int_{t_m}^{t_q}T_r(u)\,du + \frac{1}{2\sqrt{l}}T_r(t_q) - \frac{1}{2\sqrt{l}}T_r(t_m) + \sum_{h=1}^{k}\frac{(-1)^h B_h}{(2h)!}T_r^{(2h-1)}(t_q)\frac{1}{(\sqrt{l})^{2h}} - \sum_{h=1}^{k}\frac{(-1)^h B_h}{(2h)!}T_r^{(2h-1)}(t_m)\frac{1}{(\sqrt{l})^{2h}} - \frac{1}{(\sqrt{l})^{2k+2}}\cdot\int_{t_m}^{t_q}T_r^{(2k+2)}(u)\,\psi_{2k+2}(l+u\sqrt{l})\,du\,,$$

l'entier positif k étant choisi de manière que $2k \geqslant \nu-1$.

Comme la fonction ψ_{2k+2} est bornée et $T_r^{(2k+2)}(u)$ est le produit de $e^{-u^2/2}$ par un polynome en u, le dernier terme est majoré en module par le produit de $\dfrac{1}{(\sqrt{l})^{2k+2}}$ par une constante.

Du fait que $T_r(t)$ et ses dérivées sont des produits de polynomes en t par $e^{-t^2/2}$ et que, pour l infini, $t_m \sim -l^{1/12}$, les termes autres que les intégrales qui contiennent t_m, lesquels ne dépendent que de l, tendent vers zéro plus vite que toute puissance de $1/\sqrt{l}$ lorsque l tend vers $+\infty$.

De plus, chacune des dérivées de T_r étant bornée, les termes correspondant à $h > \frac{1}{2}(\nu-r)$ dans le premier $\sum$ du second membre sont uniformément $O\Big[\dfrac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1-r}}\Big]$.

De même, dans la formule correspondant à $r = \nu$, le terme $\dfrac{1}{2\sqrt{l}}T_\nu(t_q)$ est uniformément $O[1/\sqrt{l}]$.

Enfin

$$\int_{t_m}^{t_q}T_r(u)\,du = \int_{-\infty}^{t_q}T_r(u)\,du - \int_{-\infty}^{t_m}T_r(u)\,du\,,$$

et l'on voit que $\int_{-\infty}^{t_m}T_r(u)\,du$, qui ne dépend que de l, tend vers zéro plus vite que toute puissance de $1/\sqrt{l}$ quand l tend vers $+\infty$.

Finalement, on voit que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t|\leqslant l^{\alpha}$

$$\sum_{j=m+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{l}}T_{\nu}(t_j)=\int_{-\infty}^{t_q}T_{\nu}(u)\,du+O\left[\frac{1}{\sqrt{l}}\right]$$

et, pour $0\leqslant r<\nu$,

$$\sum_{j=m+1}^{q}\frac{1}{\sqrt{l}}T_r(t_j)=\int_{-\infty}^{t_q}T_r(u)\,du+\frac{1}{2\sqrt{l}}T_r(t_q)+$$
$$+\sum_{h\leqslant(\nu-r)/2}\frac{(-1)^hB_h}{(2h)!}T_r^{(2h-1)}(t_q)\frac{1}{(\sqrt{l})^{2h}}+O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1-r}}\right].$$

En reportant ces expressions dans (16), on obtient

$$\sum_{l-l^{7/12}<j\leqslant l+t\sqrt{l}}\frac{l^je^{-l}}{j!}=\sum_{r=0}^{\nu}\frac{U_r(t_q)}{(\sqrt{l})^r}+O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right].$$

Comme un calcul semblable à celui qui a été fait au paragraphe 3.4 montre que

$$\sum_{j\leqslant l-l^{7/12}}\frac{l^je^{-l}}{j!}$$

tend vers zéro plus vite que toute puissance de $1/\sqrt{l}$ lorsque l tend vers $+\infty$, on déduit de là que l'on a bien (8).

4.4. On peut déduire de (8) que toutes les constants a_r considérées au paragraphe 4.2.1 sont nulles, de sorte que, *pour $r\geqslant 1$, $U_r(t)$ est toujours le produit de $e^{-t^2/2}$ par un polynome en t.*

En effet, en supposant qu'il n'en soit pas ainsi, désignons par r_0 le plus petit r pour lequel $a_r\neq 0$.

En prenant $\nu=r_0$ et faisant $t=l^{\alpha}$ dans (8), on trouverait que, quand l tend vers $+\infty$,

$$\sum_{j\leqslant l+l^{\alpha+1/2}}\frac{l^je^{-l}}{j!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{l^{\alpha}}e^{-u^2/2}du+\frac{a_{r_0}\sqrt{2\pi}}{(\sqrt{l})^{r_0}}+O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{r_0+1}}\right],$$

puisque, comme $t_q>t-1/\sqrt{l}$, si $t=l^{\alpha}$, t_q tend vers $+\infty$ avec l.

En tenant compte de ce que

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{l^je^{-l}}{j!}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-u^2/2}du=1,$$

on déduirait de là que, quand l tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{l^{\alpha}}^{+\infty}e^{-u^2/2}du-\sum_{j>l+l^{\alpha+1/2}}\frac{l^je^{-l}}{j!}\sim\frac{a_{r_0}\sqrt{2\pi}}{(\sqrt{l})^{r_0}},$$

ce qui ne peut avoir lieu, car $\int_{l^{\alpha}}^{+\infty}e^{-u^2/2}du$ tend vers zéro plus vite que toute puissance de $1/\sqrt{l}$ et on va voir qu'il en est de même de

$$\sum_{j>l+l^{\alpha+1/2}}\frac{l^je^{-l}}{j!}.$$

En effet, si $l>1$ et $0<t\leqslant l^{\alpha}$, on a pour $j\geqslant q$

$$\frac{l^{j+1}e^{-l}}{(j+1)!}=\frac{l^je^{-l}}{j!}\cdot\frac{l}{j+1}<\frac{l^je^{-l}}{j!}\cdot\frac{l}{l+t\sqrt{l}},$$

et il en résulte que

$$\sum_{j>l+t\sqrt{l}}\frac{l^je^{-l}}{j!}<\sum_{j=q}^{+\infty}\frac{l^je^{-l}}{j!}<\frac{2l^{1/2}}{t}\cdot\frac{l^qe^{-l}}{q!},$$

puisque

$$\frac{1}{1-\dfrac{l}{l+t\sqrt{l}}}=\frac{l+t\sqrt{l}}{t\sqrt{l}}<\frac{2l}{t\sqrt{l}}.$$

En prenant $t=l^{\alpha}$, on obtient

$$\sum_{j>l+l^{\alpha+1/2}}\frac{l^je^{-l}}{j!}<2l^{1/2-\alpha}\cdot\frac{l^qe^{-l}}{q!}<2l^{1/2-\alpha}\cdot\frac{l^qe^{q-l}}{q^q},$$

puisque $q!>q^qe^{-q}$ d'après le lemme 1.

Mais un calcul semblable à celui qui a été fait au paragraphe 3.4 montre que, quand l tend vers $+\infty$,

$$\log\left[2l^{1/2-\alpha}\cdot\frac{l^qe^{q-l}}{q^q}\right]\sim-\frac{1}{2}l^{2\alpha}.$$

4.5. Définissons maintenant les nombres réels $b_r^{(k)}$ pour r et $k\geqslant 0$ par

$$(e^u-1)^k=\sum_{r=0}^{+\infty}b_r^{(k)}u^r,$$

puis les fonctions $V_{r,k}$, pour $r\geqslant 1$ et $k\geqslant 0$, par

$$V_{r,k}(t)=\sum_{h=0}^{r-1}(-1)^{h+k}b_h^{(k)}T_{r-h-1}^{(h)}(t)$$

(étant entendu que la dérivée d'ordre zéro d'une fonction est cette fonction elle même).

Ensuite, à partir des fonctions $V_{r,k}$ et de la fonction F qui figure dans la formule (2) d'Atle Selberg, nous définirons la suite des fonctions $W_1, W_2, \ldots, W_r, \ldots$ par

$$W_r(t) = \sum_{k=0}^{r-1} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} F^{(k+1)}(1) V_{r,k}(t) .$$

4.5.1. On voit immédiatement que $b_r^{(k)} = 0$ pour $r < k$, de sorte que l'on a

$$V_{r,k}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad r \leqslant k , \\ \displaystyle\sum_{h=k}^{r-1} (-1)^{h+k} b_h^{(k)} T_{r-h-1}^{(h)}(t) & \text{si} \quad r > k . \end{cases}$$

On voit aussi que, pour $r > k$, $V_{r,k}(t)$ est le produit de $e^{-t^2/2}$ par un polynome en t.

Il en résulte que, *pour chaque r, $W_r(t)$ est le produit de $e^{-t^2/2}$ par un polynome en t.*

4.5.2. Il nous sera utile de remarquer que, pour $k \geqslant 1$ et $h \geqslant 0$

$$(17) \qquad \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^h = (-1)^k h!\, b_h^{(k)} .$$

Cela résulte immédiatement de ce que $(-1)^k b_h^{(k)}$ est le coefficient de u^h dans le développement en série entière de

$$(-1)^k (e^u - 1)^k = (1 - e^u)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} e^{ju} .$$

4.6. Nous allons montrer que, quel que soit l'entier positif ν, lorsque l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t| \leqslant l^a$

$$(18) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z) - 1}{1 - z} \cdot \frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}}\, dz = \sum_{r=1}^{\nu} \frac{W_r(t_q)}{(\sqrt{l})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right] .$$

4.6.1. Désignons par $c_k(l, t)$ le coefficient de z^q dans le développement en série entière de $(1-z)^k e^{l(z-1)}$.

Alors, on va voir que, pour chaque $k \geqslant 0$, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t| \leqslant l^a$

$$(19) \qquad c_k(l, t) = \sum_{r=1}^{\nu} \frac{V_{r,k}(t_q)}{(\sqrt{l})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right] .$$

En effet, tout d'abord, chacune des fonctions T_r^* étant bornée, la formule (15) montre que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $l - l^{7/12} < h \leqslant l + l^{7/12}$

$$\frac{l^h e^{-l}}{h!} = \sum_{r=0}^{\nu-1} \frac{T_r^*(t_h)}{(\sqrt{l})^{r+1}} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right] ,$$

ou, en tenant compte de ce que, pour $r \leqslant \nu$, $T_r^* = T_r$,

$$(20) \qquad \frac{l^h e^{-l}}{h!} = \sum_{r=1}^{\nu} \frac{T_{r-1}(t_h)}{(\sqrt{l})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right] .$$

Maintenant, on a $c_0(l, t) = \dfrac{l^q e^{-l}}{q!}$.

Comme, dès que l est au moins égal au L considéré au paragraphe 4.3.3, on a certainement $l - l^{7/12} < q \leqslant l + l^{7/12}$ quand $|t| \leqslant l^a$, (20) montre que, lorsque l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t| \leqslant l^a$

$$\frac{l^q e^{-l}}{q!} = \sum_{r=1}^{\nu} \frac{T_{r-1}(t_q)}{(\sqrt{l})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right] = \sum_{r=1}^{\nu} \frac{V_{r,0}(t_q)}{(\sqrt{l})^r} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right] ,$$

puisque, comme on le voit immédiatement, $V_{r,0} = T_{r-1}$.

La formule (19) est donc établie pour $k = 0$.

Pour $k > 0$, on a

$$c_k(l, t) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \frac{l^{q-j} e^{-l}}{(q-j)!} .$$

Mais, si l est au moins égal à un certain nombre positif L', $l^{7/12} - l^{a+1/2} \geqslant k+1$ et l'on a certainement

$$l - l^{7/12} < q - j \leqslant l + l^{7/12} \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant j \leqslant k$$

quand $|t| \leqslant l^a$, puisqu' alors

$$l - l^{7/12} + k + 1 \leqslant l + t\sqrt{l} \leqslant l + l^{7/12} .$$

(20) montre alors que, pour chaque j satisfaisant à $0 \leqslant j \leqslant k$, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t| \leqslant l^a$

$$\frac{l^{q-j} e^{-l}}{(q-j)!} = \sum_{s=1}^{\nu} \frac{T_{s-1}(t_{q-j})}{(\sqrt{l})^s} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right] .$$

Par suite, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t| \leqslant l^a$

$$(21) \qquad c_k(l, t) = \sum_{s=1}^{\nu} \frac{1}{(\sqrt{l})^s} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} T_{s-1}(t_{q-j}) + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right] .$$

Comme $t_{q-j} = t_q - j/\sqrt{l}$, et comme chacune des dérivées de T_{s-1} est bornée, on voit en appliquant la formule de Taylor, ou celle des accroissements finis, que, pour chaque s satisfaisant à $1 \leqslant s \leqslant \nu$ et chaque j satisfaisant à $0 \leqslant j \leqslant k$, on a uniformément

$$T_{s-1}(q-j) = \sum_{h=0}^{\nu-s} \frac{(-1)^h}{h!} T_{s-1}^{(h)}(t_q) \frac{j^h}{(\sqrt{l})^h} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1-s}}\right] .$$

Par suite, pour chaque s satisfaisant à $1 \leqslant s \leqslant \nu$, on a uniformément

$$\sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} T_{s-1}(q-j)$$
$$= \sum_{h=0}^{\nu-s} \frac{(-1)^h}{h!\,(\sqrt{l})^h} T_{s-1}^{(h)}(t_q) \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^h + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1-s}}\right]$$
$$= \sum_{h=0}^{\nu-s} (-1)^{h+k} b_h^{(k)} T_{s-1}^{(h)}(t_q) \frac{1}{(\sqrt{l})^h} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1-s}}\right],$$

d'après (17).

En reportant ces valeurs dans (21), on obtient (19).

4.6.2. Maintenant, on peut écrire

$$F(z)-1 = \sum_{h=1}^{\nu} \frac{F^{(h)}(1)}{h!} (z-1)^h + (z-1)^{\nu+1} G_\nu(z),$$

où G_ν est une fonction entière.

Ceci donne

$$\frac{F(z)-1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^{k+1} F^{(k+1)}(1)}{(k+1)!} (1-z)^k + (-1)^{\nu+1} (1-z)^\nu G_\nu(z),$$

d'où

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)-1}{1-z} \cdot \frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}} dz = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^{k+1} F^{(k+1)}(1)}{(k+1)!} \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1-z)^k e^{l(z-1)}}{z^{q+1}} dz +$$
$$+ (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (1-z)^\nu G_\nu(z) \frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}} dz,$$

c'est à dire

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)-1}{1-z} \cdot \frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}} dz$$
$$= \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^{k+1} F^{(k+1)}(1)}{(k+1)!} c_k(t, l) + (-1)^{\nu+1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (1-z)^\nu G_\nu(z) \frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}} dz.$$

Si M_ν est la maximum de $|G_\nu(z)|$ pour $|z| = 1$, le dernier terme est de module au plus égal à

$$\frac{M_\nu}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |1-e^{i\theta}|^\nu e^{-l(1-\cos\theta)} d\theta \leqslant \frac{M_\nu}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |\theta|^\nu e^{-2l\theta^2/\pi^2} d\theta$$
$$\leqslant \frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}} \cdot \frac{M_\nu}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |u|^\nu e^{-2u^2/\pi^2} du.$$

Par conséquent, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément par rapport à t

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)-1}{1-z} \cdot \frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}} dz = \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{(-1)^{k+1} F^{(k+1)}(1)}{(k+1)!} c_k(t, l) + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right].$$

En utilisant (19), on en déduit que, lorsque l tend vers $+\infty$, on a bien uniformément (18) pour $|t| \leqslant l^a$.

4.7. Définissons maintenant une suite de fonctions $X_1, X_2, \ldots, X_r, \ldots$ par

$$X_0(t) = U_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du$$

et, pour $r \geqslant 1$,

$$X_r(t) = U_r(t) + W_r(t).$$

4.7.1. On voit que, *pour chaque $r \geqslant 1$, $X_r(t)$ est le produit de $e^{-t^2/2}$ par un polynome en t.*

De plus, (8) et (18) montrent que, quel soit l'entier positif ν, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément pour $|t| \leqslant l^a$

$$(22) \qquad \sum_{j \leqslant l + t\sqrt{l}} \frac{l^j e^{-l}}{j!} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F(z)-1}{1-z} \cdot \frac{e^{l(z-1)}}{z^{q+1}} dz = \sum_{s=0}^{\nu} \frac{X_s(t_q)}{(\sqrt{l})^s} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1}}\right].$$

4.8. Définissons maintenant la suite de fonctions de deux variables $\Phi_1(t, l), \Phi_2(t, l), \ldots, \Phi_r(t, l), \ldots$, pour t quelconque et $l > 0$, par

$$\Phi_r(t, l) = X_r(t) + \sum_{h=1}^{r} \frac{(-1)^h}{h!} X_{r-h}^{(h)}(t) \left[g\left(l + t\sqrt{l}\right)\right]^h,$$

où $g(u)$ est l'excés de u sur le plus grand entier qui lui est au plus égal.

Puis définissons la suite des fonctions $\varphi_1(t, x), \varphi_2(t, x), \ldots, \varphi_r(t, x), \ldots$, pour t quelconque et $x > e$, par

$$\varphi_r(t, x) = \Phi_r(t, \log\log x).$$

4.8.1. Comme $\left|g\left(l + t\sqrt{l}\right)\right| < 1$, on voit que, pour chaque $r \geqslant 1$, $\Phi_r(t, l)$ est majoré en module, indépendamment de l, par le produit de $e^{-t^2/2}$ par un polynome en t, et par suite $\varphi_r(t, x)$ est majoré en module, indépendamment de x, par la même expression.

Ceci entraîne évidemment que chacune des fonctions $\varphi_r(t, x)$ est bornée pour t quelconque et $x > e$.

4.8.2. Soit maintenant ν un entier positif quelconque.

Pour $s < \nu$, la formule de Taylor montre, en tentant compte de ce que la fonction $X_s^{(\nu+1-s)}$ est bornée et de ce que l'on a $0 \leqslant t - t_q < 1/\sqrt{l}$, que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément par rapport à t

$$X_s(t_q) = X_s(t) + \sum_{h=1}^{\nu-s} \frac{X_s^{(h)}(t)}{h!}(t_q - t)^h + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1-s}}\right]$$

$$= X_s(t) + \sum_{h=1}^{\nu-s} \frac{(-1)^h}{h!} X_s^{(h)}(t) \frac{\left[g\left(l + t\sqrt{l}\right)\right]^h}{(\sqrt{l})^h} + O\left[\frac{1}{(\sqrt{l})^{\nu+1-s}}\right],$$

car

$$t_q - t = -\frac{1}{\sqrt{l}}\left[l + t\sqrt{l} - \left(l + t_q\sqrt{l}\right)\right] = -\frac{1}{\sqrt{l}}\left[l + t\sqrt{l} - q\right] = -\frac{g\left[l + t\sqrt{l}\right]}{\sqrt{l}}.$$

De même, la fonction X'_ν étant bornée, la formule des accroissements finis montre que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément par rapport à t

$$X_\nu(t_q) = X_\nu(t) + O\left[\frac{1}{\sqrt{l}}\right].$$

En reportant ces expressions dans (22) et tenant compte de ce que

$$X_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du,$$

on voit que, quand l tend vers $+\infty$, on a uniformément (7) pour $|t| \leqslant l^a$.

Alors, d'après ce qui a été dit au paragraphe 4.1, lorsque x tend vers $+\infty$, (3) a lieu uniformément pour

$$|t| \leqslant (\log\log x)^a.$$

4.8.3. En tenant compte de ce qui a été dit au paragraphe 3.1.1 et du fait que, pour chaque r, $\varphi_r(t, x)$ est majoré en module, indépendamment de x par le produit de $e^{-t^2/2}$ par un polynome en t, on voit que (3) a aussi lieu uniformément pour $t > (\log\log x)^a$ et pour $t < -(\log\log x)^a$.

La démonstration du théorème B est ainsi achevée.

4.9. Le calcul effectif de $\varphi_r(t, x)$ est évidemment d'autant plus long que r est plus grand.

On trouve aisément

$$\varphi_1(t, x) = \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{2}{3} - F'(1) - \frac{t^2}{6} - g\left(\log\log x + t\sqrt{\log\log x}\right)\right].$$

Il est facile de voir que l'on a pour chaque $r \geqslant 1$

$$\varphi_r(t, x) = e^{-t^2/2}\left\{A_{r,0}(t) + \sum_{h=1}^{r} A_{r,h}(t)\left[g\left(\log\log x + t\sqrt{\log\log x}\right)\right]^h\right\},$$

$A_{r,h}$ étant, pour $0 \leqslant h \leqslant r$ un polynome de degré $3r - 2h - 1$ et de même parité que l'entier $3r - 2h - 1$.

Travaux cités

[1] H. Delange, *Sur des formules dues a Atle Selberg*, Bulletin des Sciences Mathématiques (2) 83 (1959), pp. 101-111.

[2] — *Sur un théorème d'Erdös et Kac*, Bulletin de l'Académie Royale de Belgique, Classe des Sciences, (5) 42 (1956), pp. 130-144.

[3] H. Halberstam, *On the distribution of additive number theoretic functions*, Journ. London Math. Soc. 30 (1955), pp. 43-53.

[4] W. J. LeVêque, *On the size of certain number-theoretic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 66 (1949), pp. 440-463.

[5] A. Rényi and P. Turán, *On a theorem of Erdös-Kac*, Acta Arith. 4 (1958), pp. 71-84.

[6] A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, Journ. Indiana Math. Soc. 18 (1954), pp. 83-87.

Reçu par la Rédaction le 22. 3. 1961