ACTA ARITHMETICA
VII (1961)

К теории одного класса рядов Дирихле

Анна Вальфиш (Тбилиси)

В работе [12] автора доказывается общая теорема о разложении суммы вида $\sum_{l_n \leqslant x} c_n$, где $x > 0$, в ряд по гипербесселевым функциям, если соответствующий ряд Дирихле

$$Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n l_n^{-s}$$

подчиняется некоторым условиям, в частности $Z(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению того же вида, что $\zeta(s)$. Доказательство проводится методом Харди-Ландау ([3], § 4; см. также [8], § 4, [15], гл. X), с помощью которого этими авторами было дано более простое доказательство известного тождества Харди (Hardy [1]).

Из теоремы работы [12] в качестве частных случаев вытекают: 1) упомянутое тождество Харди, где $l_n = n$ и $c_n = r(n)$ — число представлений n в виде суммы двух квадратов; 2) тождество Вороного (Voronoï [10], Hardy [2]), где $l_n = n$ и $c_n = d(n)$ — число делителей n; 3) случаи, когда $Z(s)$ есть Дзетафункция действительного или мнимого квадратичного поля (A. Walfisz [13], (3.26) и (3.24) или [14], (10.3) и (10.1)).

В настоящей работе доказывается еще одна теорема того же вида (теорема 1) для некоторого класса рядов Дирихле, у которых $Z(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению того же вида, что Дзетафункция $Z_Q(s)$ Эпштейна, отвечающая положительной квадратичной форме Q. Из этой теоремы вытекает новый результат (теорема 2), когда Q есть бинарная форма с произвольными действительными коэффициентами, а параметры h_1, h_2, z_1, z_2 принимают произвольные действительные значения. Из теоремы 1 получаются также вышеуказанные три тождества.

В дальнейшем предполагается знакомство с предыдущей работой [12]. Обе работы составляют кандидатскую диссертацию автора.

§ 1. Теорема 1

Пусть заданы: бесконечная последовательность комплексных чисел $c_1, c_2, \ldots$ и последовательность монотонно возрастающих в бесконечность положительных чисел $0 < l_1 < l_2 < \ldots$

Пусть возможно будет этим последовательностям поставить в соответствие такие числа

$\beta > 0$; целое $\mu \geqslant 1$; действительные $\alpha_1, \ldots, \alpha_\mu$; положительные $\beta_1, \ldots, \beta_\mu$; целое $\nu \geqslant 1$; положительные $\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu$; $\delta_1, \ldots, \delta_\nu$; бесконечную последовательность комплексных чисел $e_1, e_2, \ldots$; последовательность монотонно возрастающих в бесконечность положительных чисел $0 < \lambda_1 < \ldots$;

что выполняются следующие условия:

I. *Ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{l_n^s} = Z(s)\,, \tag{1}$$

где $s = \sigma + it$ — *комплексная переменная, сходится абсолютно в полуплоскости* $\sigma > \beta$. *Функция* $Z(s)$ *регулярна в целой плоскости за исключением возможных полюсов на отрезке* $0 < s \leqslant \beta$.

II. *Ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^s = W(\beta - s) \tag{2}$$

для $\sigma < 0$ *абсолютно сходится. Функция* $W(s)$ *в точке* $s = 0$ *регулярна.*

III. *Пусть*

$$G(s) = \frac{\Gamma(\gamma_1 - \delta_1 s) \ldots \Gamma(\gamma_\nu - \delta_\nu s)}{\Gamma(\alpha_1 + \beta_1 s) \ldots \Gamma(\alpha_\mu + \beta_\mu s)}\,. \tag{3}$$

Тогда функция $G(s)$ *в точке* $s = 0$ *имеет нуль, а в точке* $s = \beta$ *полюс.*

IV. *Имеют место неравенства*

$$\alpha_1 + \beta\beta_1 > 0\,,\ \ldots,\ \alpha_\mu + \beta\beta_\mu > 0\,. \tag{4}$$

Далее, если

$$\gamma_1 + \ldots + \gamma_\nu - (\alpha_1 + \ldots + \alpha_\mu) + \frac{\mu - \nu}{2} = \eta\,, \qquad \frac{2\eta}{\beta} = H\,, \tag{5}$$

то

$$\beta_1 + \ldots + \beta_\mu = \delta_1 + \ldots + \delta_\nu = \frac{H}{2}\,, \tag{6}$$

$$\tfrac{1}{2} < \eta < \tfrac{3}{2}\,, \qquad \tfrac{5}{2} - \eta < H\,. \tag{7}$$

V. *Выполняется функциональное уравнение*

$$Z(s) = G(s)\, W(\beta - s)\,. \tag{8}$$

VI. *Для каждой фиксированной полосы* $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ *имеется такая постоянная* $\gamma = \gamma(\sigma_1, \sigma_2)$, *что*

$$Z(s) = O(e^{\gamma|t|})\,. \tag{9}$$

VII. *Пусть* $R_1(x)$ *обозначает сумму вычетов функции*

$$\frac{x^s}{s} W(s) \tag{10}$$

на отрезке $0 \leqslant s \leqslant \beta$.

Тогда

$$\sum_{\lambda_n \leqslant x} e_n \lambda_n^\beta = R_1(x) + o\left(x^{\frac{\eta + 1/2}{H}}\right). \tag{11}$$

Пусть кроме того $w > 0$,

$$L(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{\eta - 5/2}{H} - i\infty}^{\frac{\eta - 5/2}{H} + i\infty} \frac{G(s)}{s(s+1)(s+2)} w^{s+2} ds; \tag{12}$$

$$F(w) = L''(w);$$

(сходимость интеграла (12) и двукратная дифференцируемость функции $L(w)$ доказывается в [12], § 2, (2.19) и § 3, лемма 1); $R(x)$ — сумма вычетов функции

$$\frac{x^s}{s} Z(s)$$

на отрезке $0 \leqslant s \leqslant \beta$; X есть интервал вида $0 < x_1 \leqslant x \leqslant x_2$.

Число x называется l-целым, если имеется такое n, что $x = l_n$; x^* — такое l-целое, для индекса n которого $c_n \neq 0$. Далее, X_0 — интервал вида $x_1 \leqslant x \leqslant x_2$, к которому не принадлежит ни одно x^*. Наконец, обозначим

$$\sum_{l_n \leqslant x}{}' c_n = \tfrac{1}{2}\Big\{\sum_{l_n \leqslant x+0} c_n + \sum_{l_n \leqslant x-0} c_n\Big\}. \tag{13}$$

Числа x^* по своему определению являются точками разрыва (скачков) суммы коэффициентов. В этих точках по формуле (13) берется среднее значение.

Переходим к формулировке нашей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* I-VII. *Тогда имеет место тождество*

$$\sum_{l_n \leqslant x}{}' c_n - R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n F(\lambda_n x)\,, \tag{14}$$

причем ряд справа удовлетворяет следующим условиям:

1) *сходится для всех* $x > 0$;
2) *сходится равномерно в каждом интервале* X_0;
3) *сходится ограниченно в каждом интервале* X.

Замечание. Условия нашей теоремы составлены по аналогии с условиями O-теоремы Ландау [6]. Они, однако, более специальны. В частности наше требование $\eta < \frac{3}{2}$ (см. формулу (7)) введено для того, чтобы ряд в правой части тождества (14) сходился. Если $\eta \geqslant \frac{3}{2}$, этот ряд, вообще говоря расходится, но суммируем одним из методов Рисса (см. основную теорему работы [14]).

При доказательстве теоремы будут использованы некоторые результаты предыдущей работы [12]. Леммы 1-11 сохраняют силу и при наших условиях. Отсюда (лемма 12) теорема будет доказана, если показать, что ряд в правой части соотношения (14) удовлетворяет следующим четырем условиям:

$$(15)\quad \left|\begin{array}{l} \text{1) } \textit{сходится для всех } x>0; \\ \text{2) } \textit{сходится равномерно в каждом интервале } X_0; \\ \text{3) } \textit{для } x=x^* \textit{ сходится к среднему значению}; \\ \text{4) } \textit{сходится ограниченно в каждом интервале } X. \end{array}\right.$$

На основании леммы 8 достаточно проверить выполнение этих условий для ряда

$$(16)\qquad \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{\frac{\eta-1/2}{H}} \sin\{2(Q\lambda_n x)^{\frac{1}{H}} + j\},$$

где

$$(17)\qquad Q = \left(\frac{H}{2}\right)^H \prod_{n=1}^{\nu} \delta_n^{-\delta_n} \prod_{m=1}^{\mu} \beta_m^{-\beta_m},$$

$$(18)\qquad j = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\left\{a_1 + \ldots + a_\mu + \gamma_1 + \ldots + \gamma_\nu - \frac{\mu+\nu}{2} + 1\right\}.$$

Идея доказательства заключается в том, что мы леммы 14-16 применяем к специально подобранным новым параметрам и функциям. Для этого докажем следующую лемму.

Лемма I. *Пусть*

$$(19)\qquad c_n' = e_n \lambda_n^{\beta}, \qquad l_n' = \lambda_n \qquad (n=1,2,\ldots);$$

$$(20)\qquad a_n' = \gamma_n - \beta\delta_n, \qquad \beta_n' = \delta_n \qquad (n=1,\ldots,\nu);$$

$$(21)\qquad \gamma_m' = a_m + \beta\beta_m, \qquad \delta_m' = \beta_m \qquad (m=1,\ldots,\mu).$$

Тогда выполняются условия I-III, V, VI *предыдущей работы, где параметры*

$$(22)\qquad e_n,\ l_n,\ \beta,\ \mu,\ \nu,\ a_m,\ \beta_m,\ \gamma_n,\ \delta_n,\ r,\ \omega$$

заменены через

$$(23)\qquad c_n',\ l_n',\ \beta,\ \nu,\ \mu,\ a_n',\ \beta_n',\ \gamma_m',\ \delta_m',\ 1,\ 1.$$

При этой замене функции $Z(s)$, $G(s)$, $R(x)$, $P(x)$ *переходят в* $W(s)$, $G_1(s)$, $R_1(x)$, $P_1(x)$ (см. ниже формулы (26) и (31)); *числа* H, η, Q, j *сохраняют свои значения.*

Доказательство. Заметим прежде всего, что числа β_n', δ_m' положительны в силу (20), (21). Положительность чисел γ_m' следует из (21) и (4).

Из условия II и формулы (19) следует, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n'}{l_n'^s} = \sum_{n=1}^{\infty} e_n \lambda_n^{\beta-s} = W(s)$$

сходится абсолютно в полуплоскости $\sigma > \beta$, откуда функция $W(s)$ там регулярна.

Покажем теперь, что функция $W(s)$ регулярна для $\sigma < 0$. В силу (8)

$$(24)\qquad W(s) = \frac{Z(\beta-s)}{G(\beta-s)}.$$

Функция $Z(\beta-s)$ для $\sigma<0$ регулярна по условию I. С другой стороны, согласно (3),

$$(25)\qquad \frac{1}{G(\beta-s)} = \frac{\Gamma\big(a_1+\beta_1(\beta-s)\big)\ldots\Gamma\big(a_\mu+\beta_\mu(\beta-s)\big)}{\Gamma\big(\gamma_1-\delta_1(\beta-s)\big)\ldots\Gamma\big(\gamma_\nu-\delta_\nu(\beta-s)\big)}.$$

Здесь в силу неравенств (4) правая часть регулярна для $\sigma<0$, а потому и функция $W(s)$ там регулярна.

Остается рассмотреть поведение функции $W(s)$ в полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant \beta$. По формулам (24), (25) и условию I функция $W(s)$ может иметь полюса только на действительной оси, т. е. на отрезке $0 \leqslant s \leqslant \beta$. Но по условию II она регулярна в точке $s=0$. Этим проверено выполнение условия I предыдущей работы.

Пусть

$$(26)\qquad G_1(s) = \frac{\Gamma(\gamma_1'-\delta_1's)\ldots\Gamma(\gamma_\mu'-\delta_\mu's)}{\Gamma(a_1'+\beta_1's)\ldots\Gamma(a_\nu'+\beta_\nu's)}.$$

Тогда в силу (20), (21) и (25)

$$(27)\qquad G_1(s) = \frac{1}{G(\beta-s)},$$

откуда по условию III функция $G_1(s)$ в точке $s=0$ имеет нуль. Этим проверено выполнение условия II предыдущей работы, причем функция $G(s)$ переходит в $G_1(s)$.

Далее, согласно (5)-(7), (20) и (21)

$$(28)\qquad \beta_1'+\ldots+\beta_\nu' = \delta_1'+\ldots+\delta_\mu';$$

$$(29)\qquad \beta_1'+\ldots+\beta_\nu' = \frac{H}{2};$$

$$(30)\qquad \gamma_1'+\ldots+\gamma_\mu' - (a_1'+\ldots+a_\nu') + \frac{\nu-\mu}{2} = \eta.$$

Отсюда для новых параметров выполнено условие III предыдущей теоремы, причем H и η сохраняют свои значения.

Как известно, в каждой фиксированной полосе $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$ равномерно

$$\lim_{|t|\to\infty} \frac{|\Gamma(s)|}{e^{-\frac{\pi}{2}|t|}|t|^{\sigma-\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi}$$

(см. напр. [4], § 218 или [7], теор. 161). Поэтому на основании (26), (28)-(30) там равномерно

$$G_1(s) = O(|t|^{\eta-H\sigma})$$

(см. также Ландау [6], форм. (20)). В соединении с условием VI и соотношениями (24), (27), это дает выполнение условия V предыдущей работы для функции $W(s)$.

Пусть

$$\mathrm{P}_1(x) = \sum_{l'_n\leqslant x} c'_n - R_1(x)\,, \tag{31}$$

где $R_1(x)$ определено на основе условия VII. Тогда в силу (19) и (11)

$$\mathrm{P}_1(x) = \sum_{\lambda_n\leqslant x} e_n\lambda_n^{\beta} - R_1(x) = o(x^{\frac{\eta+1/2}{H}})\,. \tag{32}$$

Этим проверено выполнение VI условия предыдущей работы, причем функции $R(x)$ и $\mathrm{P}(x)$ переходят в $R_1(x)$ и $\mathrm{P}_1(x)$. Мы уже показали, что числа η и H сохраняют свои значения. Далее в силу (17), (18), (20), (21) и (6) также Q и j не изменяются. Лемма доказана.

Все условия предыдущей работы кроме IV выполнены при наших новых параметрах в смысле леммы I. Условие IV используется только при доказательстве леммы 9.

Введем дополнительно к параметрам (23) следующие два

$$e'_n = c_n l_n^{-\beta}\,, \qquad \lambda'_n = l_n\,. \tag{33}$$

Тогда согласно (24), (27), (33) и условию I ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} e'_n\lambda'^{s}_n$$

для $\sigma < 0$ абсолютно сходится и там имеет место тождество

$$G_1(s)\sum_{n=1}^{\infty} e'_n\lambda'^{s}_n = W(s)\,.$$

Отсюда и лемма 9 в новых параметрах выполнена. Поэтому леммы 1-16 справедливы для параметров (23) и (33). Сформулируем часть леммы 14 и леммы 15-16 в новых параметрах. Для этого введем две функции:

$$N_1(x) = \int_0^x \mathrm{P}_1(y)\,dy\,, \tag{34}$$

$$g_0(x) = x^{-\frac{\eta+1/2}{H}}\sin\{2(Qx)^{\frac{1}{H}}+j\}\,.$$

Тогда будем иметь следующие три леммы.

Лемма II. *Для $x \geqslant 1$ имеет место оценка*

$$N_1(x) = O(x^{\frac{\eta-3/2}{H}+1})\,. \tag{35}$$

Лемма III. *Интеграл*

$$\int_1^{\infty} N_1(y)\,g''_0(xy)\,dy \tag{36}$$

1) *сходится для каждого $x > 0$;*
2) *равномерно сходится в каждом интервале X_0 к непрерывной функции;*
3) *сходится к среднему значению для $x = x^*$.*

Для $Y > 1$ интеграл

$$\int_1^{Y} N_1(y)\,g''_0(xy)\,dy \tag{37}$$

в каждом интервале X равномерно ограничен относительно x и Y.

Лемма IV. *Пусть производная функции $f(y)$ непрерывна для $y \geqslant 1$. Тогда имеет место формула суммирования*

$$\sum_{1\leqslant l'_n\leqslant Y} c'_n f(l'_n) = \mathrm{P}_1(Y)f(Y) - \int_1^Y \mathrm{P}_1(y)f'(y)\,dy + \int_1^Y R'_1(y)f(y)\,dy + \Big\{R_1(1) - \sum_{l'_n<1} c'_n\Big\}f(1)\,, \tag{38}$$

где $Y \geqslant 1$.

С помощью лемм II-IV мы теперь установим, что ряд (16) выполняет наши условия (15).

Применив тождество (38) к функции

$$f(y) = g_0(xy) = (xy)^{-\frac{\eta+1/2}{H}}\sin\{2(Qxy)^{\frac{1}{H}}+j\}\,, \tag{39}$$

получим в силу (19) и (5)

$$x^{-\frac{\eta+1/2}{H}}\sum_{1\leqslant\lambda_n\leqslant Y} e_n\lambda_n^{\frac{\eta-1/2}{H}}\sin\{2(Q\lambda_n x)^{\frac{1}{H}}+j\} \tag{40}$$
$$= \mathrm{P}_1(Y)f(Y) - \int_1^Y \mathrm{P}_1(y)f'(y)\,dy + \int_1^Y R'_1(y)f(y)\,dy + \Big\{R_1(1) - \sum_{l'_n<1} c'_n\Big\}f(1)\,.$$

Согласно (32) и (39) в каждом интервале X равномерно $\mathrm{P}_1(Y)f(Y) = o(1)$. Интегрируя по частям, получим в силу (34)

$$\int_1^Y \mathrm{P}_1(y)f'(y)\,dy = N_1(Y)f'(Y) - N_1(1)f'(1) - \int_1^Y N_1(y)f''(y)\,dy\,. \tag{41}$$

Выражения

$$N_1(1)f'(1) \quad \text{и} \quad \Big\{R_1(1)-\sum_{l'_n<1} c'_n\Big\} f(1)$$

не зависят от y и являются непрерывными функциями от x.

Согласно (39)

$$f'(y) = -\frac{\eta+1/2}{H}(xy)^{-\frac{\eta+1/2}{H}-1} x\sin\{2(Qxy)^{\frac{1}{H}}+j\}$$
$$+(xy)^{-\frac{\eta+1/2}{H}}\cos\{2(Qxy)^{\frac{1}{H}}+j\}\,\frac{2}{H}(Qxy)^{\frac{1}{H}-1}Qx\,,$$

т. е. в каждом интервале X равномерно

$$f'(Y) = O(Y^{-\frac{\eta-1/2}{H}-1})\,.$$

Из (35) следует, что в каждом интервале X равномерно

(42) $$N_1(Y)f'(Y) = O(Y^{-\frac{1}{H}})\,.$$

Интеграл

(43) $$\int_1^Y N_1(y)f''(y)\,dy$$

в правой части соотношения (41) по формуле (39) есть произведение x^2 на интеграл (37). Поэтому по лемме III в каждом интервале X интеграл (43) ограничен равномерно относительно x и Y и его предел при $Y\to\infty$ удовлетворяет требованиям 1)-3) этой леммы. Отсюда согласно (41) и (42) интеграл в левой части соотношения (41) в каждом интервале X ограничен равномерно относительно x и Y, а его предел при $Y\to\infty$ тоже удовлетворяет требованиям 1)-3).

Перейдем к интегралу

(44) $$\int_1^Y R'_1(y)f(y)\,dy$$

в правой части формулы (40). Здесь по условию VII, $R'_1(y)$ есть сумма вычетов функции

(45) $$y^{s-1}W(s)$$

на отрезке $0\leqslant s\leqslant\beta$.

Пусть максимальный порядок полюса функции $W(s)$ в промежутке $0<s\leqslant\beta$ будет q. Тогда если $s=s_0$—полюс, то вычет функции (45) в этой точке имеет вид

(46) $$y^{s_0-1}D(\log y)\,,$$

где $D(\log y)$ есть многочлен от $\log y$ порядка не выше $q-1$. Отсюда $R'_1(y)$ —сумма конечного числа членов вида (46). Поэтому согласно (39) интеграл (44) есть конечная сумма выражений вида

$$a_m x^{-\frac{\eta+1/2}{H}}\int_1^Y y^{s_0-1-\frac{\eta+1/2}{H}}\log^m y\sin\{2(Qxy)^{\frac{1}{H}}+j\}\,dy\,,$$

т. е. вида

(47) $$b_m x^{-\frac{\eta+1/2}{H}}\int_1^{Y^{\frac{1}{H}}} y^{Hs_0-\eta-3/2}\log^m y\sin\{2(Qx)^{\frac{1}{H}}y+j\}\,dy\,,$$

где a_m, b_m—постоянные $(0\leqslant m\leqslant q-1)$.

В силу (5) и (7)

$$Hs_0-\eta-3/2\leqslant H\beta-\eta-3/2=\eta-3/2<0\,.$$

Отсюда в промежутке $1\leqslant y\leqslant Y^{\frac{1}{H}}$ функция $y^{Hs_0-\eta-3/2}\log^m y$ монотонно убывает для $y>y_0$, где y_0 зависит только от s_0. Поэтому, применяя вторую теорему о среднем к интегралу (47), получим, что при $Y\to\infty$ он сходится равномерно в каждом интервале X к непрерывной функции от x. Таким образом интеграл (44) равномерно ограничен в каждом интервале X и его предел при $Y\to\infty$ удовлетворяет условиям 1)-3) леммы III.

Из предыдущего вытекает, что правая часть равенства (40) при $Y\to\infty$ стремится к пределу для каждого x, причем равномерно в каждом интервале X_0, а для $x=x^*$—к среднему значению. Кроме того она равномерно ограничена в каждом интервале X. Отсюда левая часть, а потому и ряд (16), обладают теми же свойствами.

Теорема доказана.

§ 2. Применение теоремы 1 к Дзетафункции Эпштейна (теорема 2)

Теорема 2. 1) *Пусть*

(48) $$Q(v_1,v_2)=a_{11}v_1^2+2a_{12}v_1v_2+a_{22}v_2^2$$

—положительная бинарная квадратичная форма с произвольными действительными коэффициентами; $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2$ — ее детерминант; h_1, h_2, z_1, z_2 —произвольные действительные постоянные; $l_1, l_2, \ldots$ расположенные в возрастающем порядке различные положительные среди чисел $Q(v_1+z_1, v_2+z_2)$, где v_1, v_2 пробегают все системы целых чисел;

(49) $$c_n=\sum_{\substack{v_1,v_2\\ Q(v_1+z_1,v_2+z_2)=l_n}} e^{2\pi i(h_1v_1+h_2v_2)}\,.$$

2) *Пусть*

(50) $$\bar{Q}(v_1,v_2)=\frac{1}{D}Q(v_2,-v_1)$$

—обратная форма к Q; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ расположенные в возрастающем порядке различные положительные среди чисел $\pi^2\bar{Q}(v_1+h_1, v_2+h_2)$;

$$(51)\qquad \bar{c}_n = \sum_{\substack{v_1, v_2 \\ \pi^2\bar{Q}(v_1+h_1, v_2+h_2)=\lambda_n}} e^{-2\pi i(z_1v_1+z_2v_2)} .$$

Пусть, далее,

$$(52)\qquad \varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{для целых } h_1, h_2, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$(53)\qquad \delta = \begin{cases} 1 & \text{для целых } z_1, z_2, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$(54)\qquad E = e^{-2\pi i(z_1h_1+z_2h_2)} .$$

3) $J_1(w)$ обозначает бесселевую функцию первого рода, а сумма $\sum'_{l_n\leqslant x} c_n$ определена по формуле (13).

Тогда имеет место тождество

$$(55)\qquad \sum_{l_n\leqslant x}{}' c_n = \pi D^{-1/2}\varepsilon x - \delta E + \pi D^{-1/2}Ex^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{c}_n}{\lambda_n^{1/2}}J_1\{2(\lambda_n x)^{1/2}\} ,$$

причем ряд в правой части сходится для всех $x>0$; ограниченно сходится в любом замкнутом интервале $0<x_1\leqslant x\leqslant x_2$; равномерно сходится в любом таком интервале, свободном от скачков левой части.

Доказательство. Проверим выполнение условий I-VII теоремы 1, пользуясь при этом свойствами бинарных Дзетафункций Эпштейна (см. напр. [5], 464-467).

Условие I). Ряд

$$Z_Q(s) = Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{l_n^s} = \sum_{\substack{v_1, v_2=-\infty \\ Q(v_1+z_1, v_2+z_2)>0}}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(h_1v_1+h_2v_2)}}{\{Q(v_1+z_1, v_2+z_2)\}^s}$$

сходится абсолютно для $\sigma>1$. Поэтому $\beta=1$. Далее, представимая им функция $Z(s)$ регулярна во всей плоскости за исключением полюса первого порядка в точке $s=1$ с вычетом $\pi D^{-1/2}\varepsilon$; в том случае, когда $\varepsilon=0$, функция $Z(s)$ регулярна и в точке $s=1$. Заметим, кстати, что $Z(0)=-\delta E$. Поэтому в нашем случае

$$(56)\qquad R(x) = \pi D^{-1/2}\varepsilon x - \delta E .$$

Условие II). Ряд

$$(57)\qquad Z_{\bar{Q}}(s) = \bar{Z}(s) = \sum_{\substack{v_1, v_2=-\infty \\ \bar{Q}(v_1+h_1, v_2+h_2)>0}}^{\infty}\frac{e^{-2\pi i(z_1v_1+z_2v_2)}}{\{\bar{Q}(v_1+h_1, v_2+h_2)\}^s} = \pi^{2s}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{c}_n}{\lambda_n^s}$$

также абсолютно сходится для $\sigma>1$. Представимая им функция $\bar{Z}(s)$ регулярна во всей плоскости за исключением полюса первого порядка в точке $s=1$ с вычетом $\pi D^{1/2}\delta$. При $\delta=0$ функция $\bar{Z}(s)$ регулярна и в точке $s=1$. Кроме того

$$(58)\qquad \bar{Z}(o) = -\varepsilon E^{-1} .$$

Пусть

$$(59)\qquad e_n = \pi D^{-1/2}E\lambda_n^{-1}\bar{c}_n .$$

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}e_n\lambda_n^s = W(1-s)$$

сходится абсолютно для $\sigma<0$, так как в силу (59) и (57)

$$(60)\qquad W(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty}e_n\lambda_n^s = \pi D^{-1/2}E\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\bar{c}_n}{\lambda_n^{1-s}} = \pi^{2s-1}D^{-1/2}E\bar{Z}(1-s) .$$

Отсюда по принципу аналитического продолжения во всей плоскости s имеем

$$(61)\qquad W(s) = \pi^{1-2s}D^{-1/2}E\bar{Z}(s) .$$

Поэтому функция $W(s)$ регулярна во всей плоскости за исключением полюса первого порядка в точке $s=1$ с вычетом δE. Кроме того согласно (61) и (58) имеем $W(0)=-\pi D^{-1/2}\varepsilon$. Таким образом в нашем случае

$$(62)\qquad R_1(x) = \delta Ex - \pi D^{-1/2}\varepsilon .$$

Условие III). Пусть $\mu=\nu=1$, $\alpha_1=0$, $\beta_1=\gamma_1=\delta_1=1$, следовательно

$$(63)\qquad G(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)} .$$

Тогда функция $G(s)$ в точке $s=0$ имеет нуль, а в точке $s=1$ полюс.

Условие IV). Поскольку $\beta=1$, то

$$(64)\qquad \alpha_1+\beta\beta_1=1 , \quad \eta=\gamma_1-\alpha_1=1 , \quad H=2 ,$$

т. е. условия (4)-(7) выполнены.

Условие V). Из функционального уравнения

$$Z(s) = \pi^{2s-1}D^{-1/2}E\frac{\Gamma(1-s)}{\Gamma(s)}\bar{Z}(1-s)$$

([5], (25)) в силу (63) и (60) следует

$$Z(s) = G(s)W(1-s) = G(s)W(\beta-s) .$$

Условие VI). В каждой фиксированной полосе $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$ равномерно

$$Z(s) = O(e^{2|t|}) .$$

Условие VII). Согласно (59), (62) и (64) соотношение (11) принимает вид

$$\pi D^{-1/2} E \sum_{\lambda_n \leqslant x} \bar{c}_n = \delta E x + o(x^{3/4}) . \tag{65}$$

Покажем, что

$$\sum_{\lambda_n \leqslant x} \bar{c}_n = \pi^{-1} D^{1/2} \delta x + O(x^{1/3}) , \tag{66}$$

откуда будет следовать оценка (65).

По определению $\bar{c}_n$ и λ_n (см. также (57))

$$\sum_{\lambda_n \leqslant x} \bar{c}_n = \sum_{\pi^2 \bar{Q}(v_1+h_1, v_2+h_2) \leqslant x} e^{-2\pi i(z_1 v_1 + z_2 v_2)} .$$

Поскольку $\bar{Q}(v_1, v_2)$—обратная форма к $Q(v_1, v_2)$, то детерминант формы $\pi^2 \bar{Q}(v_1, v_2)$ есть $\pi^4 D^{-1}$. Применив оценку [5], (11) для $k=2$ к форме $\pi^2 \bar{Q}(v_1+h_1, v_2+h_2)$ вместо $Q(v_1+z_1, v_2+z_2)$ и приняв во внимание определение (53) числа δ, получим оценку (66).

Условия I-VII теоремы 1 выполнены.

Далее, по формуле (5.7) предыдущей работы

$$F(w) = w^{1/2} J_1\{2w^{1/2}\} \quad (w > 0) . \tag{67}$$

Подставив значения для $R(x)$, e_n и $F(w)$ из (56), (59) и (67) в (14), получим тождество (55). При этом ряд в правой части удовлетворяет сформулированным нами условиям.

В случае, когда коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}—целые, а параметры h_1, h_2, z_1, z_2—рациональные, тождество (55) получается из теоремы B′ Вильтона [17] при $n=2$, $\mu=1$, $\lambda=1$, $N\to\infty$.

Пусть $h_1 = h_2 = z_1 = z_2 = 0$, коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}—действительные;

$$c_Q(x) = \sum_{Q(v_1, v_2)=x} 1 . \tag{68}$$

Тогда имеет место тождество

$$\sum_{l_n \leqslant x}{}' c_Q(l_n) = \pi D^{-1/2} x - 1 + x^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} c_Q(l_n) l_n^{-1/2} J_1\{2\pi (D^{-1} l_n x)^{1/2}\} , \tag{69}$$

причем ряд удовлетворяет требованиям, сформулированным нами в связи с формулой (55).

Тождество (69) получается из (55). Действительно, согласно (49) и (68)

$$c_n = \sum_{Q(v_1, v_2)=l_n} 1 = c_Q(l_n) , \tag{70}$$

т. е. c_n равно числу представлений l_n формой $Q(v_1, v_2)$.

С другой стороны, в силу (50), (51) и (70)

$$\lambda_n = \pi^2 D^{-1} l_n , \tag{71}$$

$$\bar{c}_n = \sum_{\pi^2 \bar{Q}(v_1, v_2)=\lambda_n} 1 = \sum_{\pi^2 D^{-1} Q(v_2, -v_1)=\pi^2 D^{-1} l_n} 1 = c_Q(l_n) ,$$

т. е.

$$c_n = \bar{c}_n = c_Q(l_n) . \tag{72}$$

Кроме того

$$\varepsilon = 1 , \quad \delta = 1 , \quad E = 1 . \tag{73}$$

Подставив (72), (73) и (71) в (55), получим (69).

Пусть теперь коэффициенты a_{11}, a_{12}, a_{22}—целые.

Тогда имеет место тождество

$$\sum_{n \leqslant x}{}' c_Q(n) = \pi D^{-1/2} x - 1 + x^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} c_Q(n) n^{-1/2} J_1\{2\pi (D^{-1} n x)^{1/2}\} , \tag{74}$$

где ряд сходится равномерно в каждом замкнутом интервале, свободном от целых чисел.

(74) получается из (69), если в нем взять $l_n = n$, заменяя в случае надобности коэффициенты $c_Q(l_n) = c_Q(n)$ нулями.

(74) сформулировал Вороной в работе [11], а доказал впервые Харди [1] (см. также [13], § 4.4, теорема 6), где подробно рассматривается типичный частный случай $a_{11} = a_{22} = 1, a_{12} = 0, D = 1$, соответствующий тождеству

$$\sum_{n \leqslant x}{}' r(n) = \pi x - 1 + x^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} r(n) n^{-1/2} J_1\{2\pi (n x)^{1/2}\} .$$

Здесь $r(n)$—число представлений n в виде суммы двух квадратов целых чисел. Это и есть тождество Харди, о котором речь шла выше.

§ 3. Другие применения теоремы 1

Применим теорему 1 к выводу тождества Вороного, а также тождеств для сумм коэффициентов рядов Дирихле Дзетафункций квадратичных полей. Во всех этих формулах символы $J_1(x)$, $Y_1(x)$ и $K_1(x)$—бесселевые функции в обозначениях книги [16] Ватсона.

1. Тождество Г. Ф. Вороного. *Пусть* $d(n)$—*число делителей* n; C—*постоянная Эйлера.*

Тогда имеет место тождество Вороного [10]

$$\sum_{n \leqslant x}{}' d(n) = x \log x + (2C-1)x + \frac{1}{4} - x^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} d(n) n^{-1/2} \Big\{ Y_1(4\pi\sqrt{nx}) + \frac{2}{\pi} K_1(4\pi\sqrt{nx}) \Big\} , \tag{75}$$

причем ряд сходится для всех $x>0$; ограниченно сходится в любом замкнутом интервале; равномерно сходится в любом замкнутом интервале, не содержащем целых чисел.

Тождество (75) получается из теоремы 1 при следующем выборе параметров:

$$(76)\qquad c_n = d(n)\,,\quad l_n = n\,,\quad \beta = 1\,,\quad \mu=\nu=2\,,\quad \alpha_1=\alpha_2=0\,,$$

$$(77)\qquad \beta_1=\beta_2=\gamma_1=\gamma_2=\delta_1=\delta_2=\tfrac{1}{2}\,,\quad \eta=1\,,\quad H=2\,,$$

$$e_n = \frac{1}{\pi}\frac{d(n)}{n}\,,\qquad \lambda_n = \pi^2 n\,.$$

Проверка выполнения условий I—VII теоремы 1 проводится с помощью известных свойств функции $\zeta(s)$ (см., напр., [9]). Подробности приводить не будем, ссылаясь на предыдущую работу, § 5.2. Отметим только, что

$$(78)\qquad R(x) = x\log x + (2C-1)x + \tfrac{1}{4}\,;$$

$$R_1(x) = \pi R\left(\frac{x}{\pi^2}\right).$$

Поэтому оценка (11) выполняется на основании классической формулы Дирихле

$$\sum_{n\leqslant x} d(n) = x\log x + (2C-1)x + O(x^{1/2})\,.$$

Далее, по формуле (5.16) предыдущей работы,

$$(79)\qquad F(w) = -w^{1/2}\left\{Y_1(4w^{1/2}) + \frac{2}{\pi}K_1(4w^{1/2})\right\}\qquad (w>0)\,.$$

Подставив значения для $c_n, l_n, R(x), e_n, \lambda_n$ и $F(w)$ из (76), (78), (77) и (79) в (14), получим (75), причем ряд удовлетворяет вышеуказанным условиям.

Примечание. Заметим, что у Г. Ф. Вороного тождество (75) имеет несколько иной вид: в бесконечном ряду встречается специальная введенная им функция.

Данная нами форма тождества принадлежит Харди ([2], (6.33)), у которого вместо функции $K_1(w)$ встречается функция

$$H_1(w) = \frac{2}{\pi}K_1(w)$$

(см. также [12], § 5.2).

2. Сумма коэффициентов Дзетафункции квадратичных полей. *Пусть*

$$\zeta_K(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\qquad (\sigma>1)$$

—Дзетафункция квадратичного поля K; ϱ—вычет функции $\zeta_K(s)$ в точке $s=1$; Δ—дискриминант поля.

Тогда имеют место тождества ([13], форм. (3.24), (3.26) или [14], (10.1), (10.3))

$$(80)\qquad {\sum_{n\leqslant x}}' f(n) = \varrho x + \zeta_K(0) + x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-1/2}J_1\left(4\pi\sqrt{\frac{nx}{|\Delta|}}\right)$$

(K—мнимое поле);

$$(81)\qquad {\sum_{n\leqslant x}}' f(n) = \varrho x - x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-1/2}\left\{Y_1\left(4\pi\sqrt{\frac{nx}{|\Delta|}}\right) + \frac{2}{\pi}K_1\left(4\pi\sqrt{\frac{nx}{|\Delta|}}\right)\right\}$$

(K—действительное поле),

причём ряды сходятся для всех $x>0$; ограниченно сходятся в любом замкнутом интервале; равномерно сходятся в любом замкнутом интервале, не содержащем целых чисел.

Эти тождества получаются из теоремы 1, если взять

$$c_n = f(n)\,,\quad l_n = n\,,\quad \beta=1\,,\quad \eta=1\,,\quad H=2\,.$$

Кроме того для мнимого поля

$$\alpha_1 = 0\,,\quad \beta_1=\gamma_1=\delta_1=1\,,\quad e_n = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2\pi}\frac{f(n)}{n}\,,\quad \lambda_n = \frac{4\pi^2}{|\Delta|}n\,,$$

$$R(x) = \varrho x + \zeta_K(0)\,,$$

а функция $F(w)$ выражается формулой (67). Для действительного поля

$$\alpha_1=\alpha_2=0\,,\quad \beta_1=\beta_2=\gamma_1=\gamma_2=\delta_1=\delta_2=\tfrac{1}{2}\,,$$

$$e_n = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{\pi}\frac{f(n)}{n}\,,\quad \lambda_n = \frac{\pi^2}{|\Delta|}n\,,\quad R(x) = \varrho x\,,$$

функция $F(w)$ выражается формулой (79).

Проверка выполнения условий I-VII теоремы 1 проводится с помощью известных свойств Дзетафункций квадратичных полей (см. [7], теор. 142, 154, 155, 161, 210); подробности приведены в § 5.3-5.4 предыдущей работы.

ТБИЛИСИ, 8 ЯНВАРЯ 1961 Г. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Литература

[1] G. H. Hardy, *On the expression of a number as the sum of two squares*, The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics 46 (1915), 263-283.

[2] — *On Dirichlet's divisor problem*, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, 15 (1916), 1-25.

[3] G. H. Hardy and E. Landau, *The lattice points of a circle*, Proceedings of the Royal Society, Ser. A, 105 (1924), 244-258.

[4] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Leipzig und Berlin 1909.

[5] — *Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen. (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid.)*, Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften 31 (1915), 458-476.

[6] — *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.(Zweite Abhandlung.)*, Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse (1915), 209-243.

[7] — *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, Leipzig und Berlin 1917. Zweite Auflage 1927.

[8] — *Die Bedeutungslosigkeit der Pfeiffer'schen Methode für die analytische Zahlentheorie*, Monatshefte für Mathematik und Physik 34 (1925), 1-36.

[9] E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann Zeta-Function*, Oxford 1951. Русский перевод: Е. К. Титчмарш, *Теория Дзета-Функции Римана*, Москва 1953.

[10] G. Voronoï, *Sur une fonction transcendante et ses applications à la sommation de quelques séries*, Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. 3, 21 (1904), 207-267; 459-533.

Русский перевод: Г. Ф. Вороной, *Об одной трансцендентной функции и ее приложениях к суммированию некоторых рядов*, Собрание сочинений 2, Киев 1952, 51—165.

[11] — *Sur le développement, à l'aide des fonctions cylindriques des sommes doubles $\Sigma f(pm^2+2qmn+rn^2)$, où $pm^2+2qmn+rn^2$ est une forme positive à coefficients entiers*, Verhandlungen des dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg, Leipzig 1905, 241-245.

Русский перевод: Г. Ф. Вороной, *О разложении посредством цилиндрических функций двойных сумм $\Sigma f(pm^2+2qmn+rn^2)$, где $pm^2+2qmn+rn^2$—положительная форма с целыми коэффициентами*, Собрание сочинений 2, Киев 1952, 166—170.

[12] Анна Вальфиш, *О суммах коэффициентов некоторых рядов Дирихле*, Труды Тбилисского Математического Института 27 (1961).

[13] A. Walfisz, *Über die summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen*, Göttingen 1922.

[14] — *Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern*, Mathematische Zeitschrift 22 (1925), 153-188.

[15] А. З. Вальфиш, *Целые точки в многомерных шарах*, Тбилиси 1960.

[16] G. N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions*, Cambridge 1944. Русский перевод: Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Москва 1949.

[17] J. R. Wilton, *A series of Bessel functions connected with the theory of lattice points*, Proceedings of the London Mathematical Society, Ser. 2, 29 (1928), 168-188.

Reçu par la Rédaction le 14. 1. 1961

Les tomes I — VII fasc. 1 des ACTA ARITHMETICA 139 travaux des 78 auteurs suivants:

Ankeny N. C., Barnes E. S., Birch B. J., Blumer F., Carlitz L., Cassels J. S. W., Chandrasekharan K., Chowla S., Cohen E., van der Corput J. G., Cramér H., Davenport H., Dickson L. E., Eichler M., Erdös P., Esterman T., Fenchel W., Fluch W., Fogels E., Fomenko O. M., Gyires B., Hartman S., Heilbronn H., Herzog E., Hille E., Ingham A. E., Jarnik V., Khintchine A., Knapowski S., Ko Chao, Krasner M., Kubota T., Landau E., Lehmer Emma, Lehmer D. H., Levis D. J., Lomadse G., Lorentz G. G., Lubelski S., Mahler K., Makowski A., Mordell L. J., Moser L., Nagel T., Newman M., Norton Karl K., Ostrowski A., Pisot Ch., Pitman Jane, Pommerenke C., Rademacher H., Raghavan Narasimhan, Ramanathan K. G., Rédei L., Rényi A., Rubel L. A., Schaake G., Scherk P., Schinzel A., Segre B., Selberg S., Siegel C. L., Sierpiński W., Staś W., Stemmler Rosemarie M., Stolt B., Swinnerton-Dyer H. P. F., Szüsz P., Tallini G., Tschebotaröw N., Turàn P., Uchiyama S., Veidinger L., Wakulicz Andrzej, Walfisz A., Walfisz Anna, Watson G. N. Whiteman A. L.