ACTA ARITHMETICA
LXIX.2 (1995)

Sur la densité de certains ensembles de multiples, 2

par

A. Raouj (Marrakech)

1. Introduction et énoncé des résultats. Considérons pour n entier ≥ 1 et λ réel ≥ 0, l'ensemble des multiples $\mathcal{B}_\lambda(n)$ de la suite

$$\mathcal{D}_\lambda(n) := \bigcup_{d|n}]d, d\exp(\log n)^{-\lambda}] \cap \mathbb{N}.$$

Désignons par Q la fonction définie par $Q(\alpha) := \alpha\log\alpha - \alpha + 1$ $(\alpha > 0)$.

Le but du présent travail est de montrer le résultat suivant.

Théorème 1. *On a*

$$\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n) = (\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \qquad p.p. \tag{1.1}$$

où l'on a posé

$$F(\lambda) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq \lambda \leq \lambda^* = \log 4 - 1, \\ Q(\beta) & si\ \lambda^* < \lambda \leq \lambda^{**} = \log 8 - 1 \\ & \quad avec\ \beta = (1+\lambda)/\log 2 - 1, \\ \lambda - \log 2 & si\ \lambda^{**} < \lambda. \end{cases}$$

R e m a r q u e s. (i) La fonction F est dérivable sur $[0, \infty[$.

(ii) Pour $\lambda \leq \lambda^*$ on a en fait $\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n) = 1 + o(1)$ p.p. [R93].

Interprétation probabiliste des valeurs critiques λ^* et λ^{**}. Considérons, pour x entier, l'espace probabilisé $\Omega_x = \{1, 2, \ldots, x\}$ muni de la loi uniforme ν_x et la suite $(\xi_d)_{d\geq 1}$ de variables aléatoires définies par

$$\xi_d(n) := \begin{cases} 1 & \text{si } d \mid n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notant $H(x, y, z)$ le nombre des entiers $n \leq x$ ayant au moins un diviseur d dans le sous-intervalle $]y, z]$ de $]0, x]$, on a

$$\frac{1}{x}H(x, y, z) = \frac{1}{x}\sum_{n\leq x} \max_{y<d\leq z} \xi_d(n) = \text{Prob}(\max_{y<d\leq z} \xi_d = 1).$$

Intuitivement, plus l'intervalle $]y,z]$ est petit plus les ξ_d se rapprochent de l'indépendance. Cette dernière hypothèse implique

$$\mathrm{Prob}(\max_{y<d\le z}\xi_d=1)=1-\mathrm{Prob}(\max_{y<d\le z}\xi_d=0)\approx 1-\prod_{y<d\le z}\left(1-\frac{1}{x}\left[\frac{x}{d}\right]\right).$$

Il s'ensuit

$$\frac{1}{x}H(x,y,z)\approx\frac{z-y}{y}. \tag{1.2}$$

Remarquons en outre que l'inégalité de Behrend [B48] montre qu'on a toujours la majoration

$$\frac{1}{x}H(x,y,z)\le(1+\varepsilon(y))\frac{z-y}{y}\qquad(\lim_{y\to\infty}\varepsilon(y)=0). \tag{1.3}$$

Posons $z=y(1+(\log y)^{-\lambda})$. Le théorème 21 de [HT88] montre que l'approximation (1.2) est effectivement valable si, et seulement si, $\lambda>\log 4-1$, ce qui représente donc le *seuil d'indépendance* pour ce problème.

Par ailleurs, désignons par $H(x,\mathcal{D}_\lambda(n))$ le nombre des entiers $m\le x$ ($x\ge x_0(\lambda,n)$) ayant au moins un diviseur dans $\mathcal{D}_\lambda(n)$; l'hypothèse d'indépendance des ξ_t ($t\in\mathcal{D}_\lambda(n)$) implique

$$\frac{1}{x}H(x,\mathcal{D}_\lambda(n))=\mathrm{Prob}(\max_{t\in\mathcal{D}_\lambda(n)}\xi_t=1)=(\log n)^{\log 2-\lambda+o(1)}\qquad\text{p.p.} \tag{1.4}$$

car en utilisant la majoration (voir [HT88], Theorem 56)

$$\Delta(n):=\max_z\operatorname{card}\{d:d\,|\,n,\ z<d\le ez\}\le(\log_2 n)^{1+o(1)}\qquad\text{p.p.}$$

on montre facilement que

$$\sum_{m\in\mathcal{D}_\lambda(n)}1/m=(\log n)^{\log 2-\lambda+o(1)}\qquad\text{p.p.} \tag{1.5}$$

Ainsi, la valeur $\lambda^{**}=\log 8-1$ de λ du théorème 1 peut être interprétée comme le seuil d'indépendance des ξ_t ($t\in\mathcal{D}_\lambda(n)$).

De plus, en écrivant

$$\max_{t\in\mathcal{D}_\lambda(n)}\xi_t=\max_{d|n}\max_{d<t\le(1+(\log n)^{-\lambda})d}\xi_t=\max_{d|n}\xi_d^*\quad\text{disons,} \tag{1.6}$$

on voit que, pour $\lambda<\lambda^{**}$, les ξ_d^* ne sont plus indépendants, alors que, pour chaque $d\,|\,n$, λ^* représente, au vu du théorème 21 de [HT88], le seuil d'indépendance des ξ_t, pour $d<t\le(1+(\log d)^{-\lambda})d$.

Commençons par établir les lemmes utiles.

2. Lemmes. Le lemme suivant, dû à Halberstam et Richert [HR79] et généralisant un résultat de Hall, nous sera très utile.

Lemme 1 (voir [T90]). *Si f est une fonction multiplicative, positive et à laquelle on peut associer un couple (λ_1, λ_2) de $\mathbb{R}^+ \times [0, 2[$ tel que pour tout nombre premier p et pour tout entier $j > 0$ on ait*

$$f(p^j) \le \lambda_1 \lambda_2^{j-1},$$

alors, pour tout réel $x \ge 2$,

$$\sum_{n \le x} f(n) \le 67(1 + 9\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2(2 - \lambda_2)^{-2})x \prod_{p \le x}(1 - p^{-1}) \sum_{j \ge 0} f(p^j)p^{-j}. \tag{2.1}$$

Le résultat suivant dû à Shiu [S80] nous sera utile. On considère la classe $\mathcal{F}$ des fonctions multiplicatives vérifiant les deux propriétés suivantes :

$(\mathcal{F}_1)$ il existe une constante $A_1 > 0$ telle que pour tout nombre premier p et pour tout entier $\nu > 0$,

$$0 \le f(p^\nu) \le A_1^\nu,$$

$(\mathcal{F}_2)$ pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $A_2 = A_2(\varepsilon)$ telle que pour tout entier $n > 0$,

$$f(n) \le A_2 n^\varepsilon.$$

Lemme 2. *Soient $f \in \mathcal{F}$, $0 < \alpha < 1/2$ et $x^\alpha < y \le x$. Alors, uniformément pour y et x, on a*

$$\sum_{x-y<n\le x} f(n) \ll_{f,\alpha} y(\log x)^{-1} \exp\Big(\sum_{p\le x} f(p)/p\Big). \tag{2.2}$$

On désigne exclusivement par la lettre p un nombre premier. $\omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n et $\Omega(n)$ est le nombre de facteurs premiers de n, comptés avec leurs ordres de multiplicités.

Le lemme suivant est une conséquence du lemme 2.

Lemme 3. *Uniformément pour $0 < \alpha \le 1$, $0 < y < z$ et $0 < m \le z - y$, on a*

$$\sum_{y/m<t\le z/m} \frac{\alpha^{\Omega(t)}}{t} \ll \frac{z-y}{y}\Big(\log\frac{y}{z-y}\Big)^{1-\alpha}\Big(\log\frac{z}{m}\Big)^{\alpha-1}. \tag{2.3}$$

D é m o n s t r a t i o n. Distinguons deux cas, selon que $y/m > (y/(z-y))^{3/2}$ ou non. Dans le premier cas nous avons $(z-y)/m > (y/m)^{1/3}$ et donc (2.3) résulte du lemme 2. Dans le second cas, la majoration triviale

$$\sum_{y/m<t\le z/m} 1/t \ll \log(z/y) + m/y \ll (z-y)/y$$

suffit. ∎

On pose

$$\Omega(n,t) := \sum_{\substack{p^j \mid n, j>0 \\ p\le t}} 1, \qquad \omega(n,t) := \sum_{\substack{p\mid n \\ p\le t}} 1,$$

$P^+(n)$ le plus grand facteur premier de n et $\mu(n) := (-1)^{\omega(n)}$ si n est sans facteur carré, sinon $\mu(n) := 0$.

Le lemme 3 sera appliqué pour démontrer le résultat suivant.

LEMME 4. *Soient* $0 < y \le 1$ *et* $\lambda > 0$. *Pour* n *assez grand*, *posons* $\varepsilon = \varepsilon(n) = \log_3 n/\sqrt{\log_2 n}$, $T(n) = \exp(\log n)^{1-\varepsilon}$ *et* $\eta = (\log n)^{-\lambda}$. *Alors il existe une fonction* $X_0(n)$ *telle que pour* $X \ge X_0(n)$ *on ait*

$$\sum_{\substack{d\mid n \\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{m\le X} y^{\Omega(m,3n)} \sum_{\substack{t,t'\mid m \\ 0<t,t'<(1+\eta)d}} 1 \le X(\log n)^E \quad p.p. \tag{2.4}$$

où l'on a posé $E = 4y - 3 - 2\lambda + \log 2 + 3\varepsilon$.

Démonstration. Notons $S = S(X,n)$ la somme ci-dessus. Si t et t' sont comptés dans la somme intérieure de S alors en posant

$$t_0 = (t,t'), \qquad t = st_0, \qquad t' = s't_0,$$

on a $[t,t'] = t_0ss'$, $d/t_0 < s < s' \le (1+\eta)d/t_0$ et $t_0 \le \eta d$. Donc

$$\begin{aligned} S \le \sum_{\substack{d\mid n \\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{t_0\le(1+\eta)d} y^{\Omega(t_0)} \sum_{d/t_0<s\le(1+\eta)d/t_0} y^{\Omega(s)} \\ \times \sum_{d/t_0<s'\le(1+\eta)d/t_0} y^{\Omega(s')} \sum_{m\le X/(t_0ss')} y^{\Omega(m,3n)}. \end{aligned}$$

Utilisant les lemmes 1 et 3 on peut écrire pour $X_0(n) \ge n^3$,

$$\sum_{m\le X/(t_0ss')} y^{\Omega(m,3n)} \ll (X/(t_0ss'))(\log n)^{y-1},$$

$$\sum_{d/t_0<s\le(1+\eta)d/t_0} y^{\Omega(s)}/s \ll \eta(\log(1/\eta))^{1-y}(\log(d/t_0))^{y-1},$$

d'où

$$\begin{aligned} S &\ll X(\log n)^{y-1-2\lambda}(\lambda\log_2 n)^{2-2y} \\ &\quad\times \sum_{\substack{d\mid n \\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{t_0\le\eta d} (\log(d/t_0))^{2y-2}t_0^{-1}y^{\Omega(t_0)}. \end{aligned}$$

Désignons par S' la dernière somme en t_0. Par intégration par parties nous avons

$$S' \ll (\log(1/\eta))^{2y-2}(\log d)^{y-1} + (\log d)^{2y-2} \int_1^{\sqrt{d}} (\log t)^{y-1} t^{-1}\, dt$$
$$+ (\log d)^{y-1} \int_{\sqrt{d}}^{\eta d} (\log(d/t))^{2y-2} t^{-1}\, dt$$
$$\le (\log d)^{y-1+(2y-1)^+}(\log_2 n)^2 \qquad (n \ge n_0(y,\lambda)).$$

On a donc

$$S \ll_{y,\lambda} X(\log n)^{y-1-2\lambda}(\log_2 n)^{4-2y} \sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2(\log d)^{3y-2}.$$

La dernière somme en d est majorée par

$$(\log n)^{3y-2+(2-3y)^+\varepsilon}\, 2^{\omega(n)} \le (\log n)^{3y-2+\log 2+\varepsilon+(2-3y)^+\varepsilon} \qquad \text{p.p.}$$

On obtient ainsi $S \le X(\log n)^{4y-3-2\lambda+\log 2+3\varepsilon}$ p.p. ■

LEMME 5. *Pour* $0.33 \le \alpha < 1$, *on a*

$$\inf_{x\ge 1} \int_0^x t^{-\alpha}\cos t\, dt \ge 9\cdot 10^{-3}. \tag{2.5}$$

Démonstration. Pour $0<\alpha<1$ et $k\in\mathbb{N}$, notons

$$F_\alpha(x) := \int_0^x t^{-\alpha}\cos t\, dt, \qquad m_k := \min_{\pi/2+2k\pi\le x\le \pi/2+(2k+2)\pi} F_\alpha(x).$$

On a

$$\begin{aligned} m_k &= F_\alpha(\pi/2+(2k+1)\pi)\\ &= m_{k-1} + \int_{3\pi/2}^{7\pi/2} (t+2(k-1)\pi)^{-\alpha}\cos t\, dt\\ &= m_{k-1} + \int_{3\pi/2}^{5\pi/2} ((t+2(k-1)\pi)^{-\alpha} - (t+(2k-1)\pi)^{-\alpha})\cos t\, dt. \end{aligned}$$

En particulier, $m_k > m_{k-1}$ $(k\ge 1)$.

Comme F_α est croissante sur $[1,\pi/2]$, on peut écrire

$$\inf_{x\ge 1} F_\alpha(x) = \min(F_\alpha(3\pi/2), F_\alpha(1)).$$

En utilisant l'estimation

$$\cos t \ge 1 - t^2/2 + t^4/4! - t^6/6! + t^8/8! - t^{10}/10! \qquad (t\ge 0),$$

on peut écrire

$$F_\alpha(3\pi/2) \geq (3\pi/2)^{1-\alpha} h(\alpha)$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} h(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2(3-\alpha)}(3\pi/2)^2 + \frac{1}{4!(5-\alpha)}(3\pi/2)^4 \\ - \frac{1}{6!(7-\alpha)}(3\pi/2)^6 + \frac{1}{8!(9-\alpha)}(3\pi/2)^8 - \frac{1}{10!(11-\alpha)}(3\pi/2)^{10}. \end{aligned}$$

En effectuant une vérification numérique il vient $h(0.33) = 0.0097\ldots > 0$. Le lemme 5 sera donc prouvé si on montre que h est croissante sur $[0.33, 1[$. Posons

$$\begin{aligned} h_1(\alpha) &:= \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{2(3-\alpha)}(3\pi/2)^2, \\ h_2(\alpha) &:= \frac{1}{5-\alpha} - \frac{1}{30(7-\alpha)}(3\pi/2)^2, \\ h_3(\alpha) &:= \frac{1}{9-\alpha} - \frac{1}{90(11-\alpha)}(3\pi/2)^2, \end{aligned}$$

de sorte que $h(\alpha) = \sum_{i=1}^3 c_i h_i(\alpha)$ $(c_i \geq 0)$. On vérifie aisément que $h_i'(\alpha) \geq 0$ $(i = 1,2,3)$ pour $1/4 \leq \alpha < 1$. Cela montre que h est croissante sur $[1/4, 1[$. ∎

Le lemme suivant est une conséquence immédiate du lemme 5.

Lemme 6. *Pour* $0 < \varrho \leq 0.67$ *et* $u \in \mathbb{R}$, *on a*

$$(1 + |u|)^{-\varrho} \leq 100 \int_{-1}^{1} |t|^{\varrho-1} e^{itu}\, dt. \tag{2.6}$$

Démonstration. On a

$$\int_{-1}^{1} |t|^{\varrho-1} e^{iut}\, dt = 2\int_0^1 t^{\varrho-1}\cos(ut)\, dt = 2|u|^{-\varrho} \int_0^{|u|} t^{\varrho-1}\cos t\, dt.$$

Distinguons le cas où $|u| \leq 1$ et $|u| > 1$. Dans le premier cas nous avons

$$2|u|^{-\varrho} \int_0^{|u|} t^{\varrho-1}\cos t\, dt \geq 2\varrho^{-1}\cos 1 \geq 1 \geq (1+|u|)^{-\varrho}.$$

Dans le second cas on a, d'après le lemme 5,

$$2|u|^{-\varrho} \int_0^{|u|} t^{\varrho-1}\cos t\, dt \geq 10^{-2}|u|^{-\varrho} \geq 10^{-2}(1+|u|)^{-\varrho}. \ ∎$$

On pose $n_k := \prod_{p|n,\, p \leq \exp e^k} p$.

Nous avons besoin du lemme 6 pour établir le résultat suivant.

LEMME 7. *Soient* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit*, $0 < \varrho \le 0.67$, $\varrho/\log 2 < \alpha < 1$, $\delta > 1$ *et* $\log(1/\varepsilon) < k \le \log_2 x$. *On a*

$$\sum_{d,d'|n_k} (1 + |\log(d'/d)|)^{-\varrho} \le \varrho^{-1}\varepsilon^{-1}e^{(\delta\log 4-\varrho)k} \tag{2.7}$$

pour tous les entiers $n \le x$ *sauf*

$$\ll x(Q(\alpha)^{-1}\varepsilon^{Q(\alpha)} + e^{-Q(\delta)k} + (\alpha\log 2-\varrho)^{-1}\varepsilon^{\alpha\log 2-\varrho}).$$

Démonstration. D'après le lemme 6 on a

$$\begin{aligned}\sum_{d,d'|n_k}\left(1+\left|\log\frac{d'}{d}\right|\right)^{-\varrho} &\le 100\int_{-1}^{1}\sum_{d,d'|n_k} e^{i\theta\log(d'/d)}\frac{d\theta}{|\theta|^{1-\varrho}}\\ &\le 200\int_0^1 |\tau^*(n_k,\theta)|^2\frac{d\theta}{\theta^{1-\varrho}}\end{aligned}$$

où

$$\tau^*(n_k,\theta) = \sum_{d|n_k}\mu(d)^2 d^{i\theta}.$$

Pour k fixé, on sait (voir le lemme 5.1 de [R93]) que $\omega(n_k) < \delta k$ pour tous les entiers $n \le x$ à l'exception d'au plus $O\big(xe^{-Q(\delta)k}\big)$. Pour ces entiers n non exceptionnels on a

$$\int_0^{1/(\varepsilon e^k)} |\tau^*(n_k,\theta)|^2\frac{d\theta}{\theta^{1-\varrho}} \le \tau(n_k)^2\int_0^{1/(\varepsilon e^k)}\frac{d\theta}{\theta^{1-\varrho}} = 4^{\omega(n_k)}\varrho^{-1}\varepsilon^{-\varrho}e^{-k\varrho},$$

ce qui entraîne

$$\int_0^{1/(\varepsilon e^k)} |\tau^*(n_k,\theta)|^2\frac{d\theta}{\theta^{1-\varrho}} \le \varrho^{-1}e^{(\delta\log 4-\varrho)k}\varepsilon^{-\varrho}$$

pour tous les entiers $n \le x$ sauf $\ll xe^{-Q(\delta)k}$. Par ailleurs, posant $\omega_\theta(n) := \operatorname{card}\{p : p\,|\,n,\ p \le \exp(1/\theta)\}$ et $\mathcal{R}(n,\theta) := |\tau^*(n,\theta)|^2/2^{\omega(n)+\omega_\theta(n)}$ on peut écrire

$$\int_{1/(\varepsilon e^k)}^{1} |\tau^*(n_k,\theta)|^2\frac{d\theta}{\theta^{1-\varrho}} = 4^{\omega(n_k)}\int_{1/(\varepsilon e^k)}^{1}\frac{\mathcal{R}(n_k,\theta)}{2^{\omega(n_k)-\omega_\theta(n_k)}}\cdot\frac{d\theta}{\theta^{1-\varrho}}.$$

Répartissons alors les entiers $n \le x$ pour lesquels cette quantité excède $4^{\delta k}e^{-\varrho k}$ en trois classes $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ définies par les conditions

$$\omega(n_k) > \delta k, \tag{$\mathcal{C}_1$}$$

$$\min_{1/(\varepsilon e^k)<\theta\le 1}\frac{\omega(n_k)-\omega_\theta(n_k)}{\log(\theta e^k)} < \alpha, \tag{$\mathcal{C}_2$}$$

$$(\mathcal{C}_3)\qquad \omega(n_k)\le \delta k \quad \text{et} \quad \min_{1/(\varepsilon e^k)<\theta\le 1}\frac{\omega(n_k)-\omega_\theta(n_k)}{\log(\theta e^k)}\ge \alpha.$$

Utilisant le lemme 51.2 de [HT88], on a

$$|\mathcal{C}_2| \ll xQ(\alpha)^{-1}\varepsilon^{Q(\alpha)}.$$

En outre,

$$\begin{aligned}|\mathcal{C}_3| &\le 4^{-\delta k}e^{\varrho k}\sum_{n\le x}4^{\omega(n_k)}\int_{1/(\varepsilon e^k)}^{1}\frac{\mathcal{R}(n_k,\theta)}{2^{\omega(n_k)-\omega_\theta(n_k)}}\cdot\frac{d\theta}{\theta^{1-\varrho}}\\ &\le e^{\varrho k}\sum_{n\le x}\int_{1/(\varepsilon e^k)}^{1}\frac{\mathcal{R}(n_k,\theta)}{(\theta e^k)^{\alpha\log 2}}\cdot\frac{d\theta}{\theta^{1-\varrho}}.\end{aligned}$$

Et puisque pour $k\ge 0$ et θ réel >0, on a

$$\sum_{n\le x}\mathcal{R}(n_k,\theta)\ll x$$

(voir lemme 6.1 de [R93]), on obtient donc

$$|\mathcal{C}_3|\ll x(\alpha\log 2-\varrho)^{-1}\varepsilon^{\alpha\log 2-\varrho}.$$

Cela achève la démonstration du lemme 7. ■

Le lemme suivant nous sera utile :

Lemme 8 (voir [T90], Théorème II.6.4). *Soit $A>0$. Il existe des constantes positives $c_1=c_1(A)$ et $c_2=c_2(A)$ telles que uniformément pour $x\ge 3$ et $1\le k\le A\log_2 x$, on ait*

$$\sum_{\substack{n\le x\\ \omega(n)=k}}1=\frac{x}{\log x}\cdot\frac{(\log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!}\left\{\lambda\left(\frac{k-1}{\log_2 x}\right)+O\left(\frac{k}{(\log_2 x)^2}\right)\right\}\tag{2.8}$$

avec

$$\lambda(z):=\frac{1}{\Gamma(z+1)}\prod_p\left(1+\frac{z}{p-1}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)^z.$$

Le lemme suivant est un résultat classique du crible. On désigne par $\Psi(x,y)$ le nombre des entiers $n\le x$ tels que $P^+(n)\le y$.

Lemme 9 (voir [T90], p. 396). *Pour $x\ge y\ge 2$, on a*

$$\Psi(x,y)\ll x\exp(-\log x/(2\log y)).\tag{2.9}$$

On désigne par $\Phi(x,z)$ le nombre des entiers $n\le x$ tels que $P^-(n)>z$.

Lemme 10 (voir [HT88], p. 11). *Pour $x\ge 2z\ge 4$, on a*

$$\Phi(x,z)\asymp x/\log z.\tag{2.10}$$

Lemme 11 (voir [HR66], p. 147). *Soient* $n \geq 1$ *et* $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$. *Posant pour chaque entier* k *de* $\{1, \ldots, n\}$,

$$S_k := \sum_{\substack{I \subset \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} \prod_{i \in I} x_i,$$

on a

$$S_k \geq \left\{ 1 - \binom{k}{2} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{S_1^2} \right\} \frac{S_1^k}{k!}. \tag{2.11}$$

Le résultat suivant fournit une condition suffisante sur λ pour que les intervalles $]d, (1 + (\log n)^{-\lambda})d]$, $d \mid n$, soient deux à deux disjoints.

Lemme 12 (voir théorème 54 de [HT88]). *Posant* $E(n) := \min\{\log(d'/d) : d, d' \mid n, d < d'\}$, *on a*

$$E(n) = (\log n)^{1-\log 3} \exp\{O(\sqrt{\log_2 n \cdot \log_3 n})\} \quad p.p. \tag{2.12}$$

Dans le paragraphe suivant, nous regroupons les notations et les conventions que nous allons introduire dans la démonstration du théorème 2.

Notations et conventions. Posons

$$\begin{aligned}
\beta = \beta_\lambda &:= \begin{cases} \dfrac{1+\lambda}{\log 2} - 1 & \text{si } \log 4 - 1 < \lambda \leq \log 8 - 1, \\ 2 & \text{si } \lambda > \log 8 - 1, \end{cases} \\
F = F(\lambda) &:= \begin{cases} Q(\beta) & \text{si } \log 4 - 1 < \lambda \leq \log 8 - 1, \\ \lambda - \log 2 & \text{si } \lambda > \log 8 - 1, \end{cases} \\
K = K(n, \beta) &:= \left[\frac{\beta}{2} \log_2 n \right], \\
\mathcal{S} = \mathcal{S}(X; n, \beta) &:= \{ m \leq X : \Omega(m, 3n) \leq \beta \log_2 n \}, \\
\varepsilon = \varepsilon(n) &:= \frac{\log_3 n}{\sqrt{\log_2 n}}, \\
T = T(n) &:= \exp\{(\log n)^{1-\varepsilon(n)}\}, \\
\eta &:= (\log n)^{-\lambda}, \\
\mathcal{D}_n^* &:= \bigcup_{\substack{d \mid n, \mu(d)^2 = 1 \\ P^+(d) > T(n)}}]d, (1+\eta)d], \\
\mathcal{D}_n &:= \bigcup_{d \mid n}]d, (1+\eta)d], \\
\tau(m, \mathcal{A}) &:= \sum_{t \mid m, t \in \mathcal{A}} 1 \qquad (\mathcal{A} \subset \mathbb{N}), \\
B(X; n, \lambda) &:= |\{ m \leq X : \tau(m, \mathcal{D}) > 0 \}|.
\end{aligned}$$

3. La minoration de $\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n)$. Soient $n \ge 1$ et $X \ge X_0(n)$ choisi comme dans l'énoncé du lemme 4, $0 < y_0, y_1 \le 1$. Considérons parmi les entiers m comptés dans $\mathcal{S}$ ceux qui s'écrivent sous la forme $m = ab$ avec

$$a \in \mathcal{D}_n^*, \quad \omega(a) \le K(n,\beta), \quad \omega(b,3n) \le K(n,\beta) \ \text{ et } \ b \le X/a.$$

On a

$$\sum_{m\in\mathcal{S}} \tau(m,\mathcal{D}_n^*) \ge \sum_{\substack{a\in\mathcal{D}_n^* \\ \omega(a)\le K}} \sum_{\substack{b\le X/a \\ \omega(b,3n)\le K}} 1. \tag{3.1}$$

Faisant appel aux lemmes 10 et 11, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{b\le X/a \\ \omega(b,3n)\le K}} 1 &\ge \sum_{\substack{b_1 \\ P^+(b_1)\le 3n \\ \omega(b_1)=K}} \mu(b_1)^2 \sum_{\substack{b_2\le X/(ab_1) \\ P^-(b_2)>3n}} 1 \\
&\gg \frac{X}{a\log n} \sum_{\substack{b_1 \\ P^+(b_1)\le 3n \\ \omega(b_1)=K}} \mu(b_1)^2/b_1 \\
&\gg \frac{X}{a\log n} \cdot \frac{1}{K!}(\log_2 n + O(1))^K.
\end{aligned}$$

La formule de Stirling entraîne alors

$$\sum_{\substack{b\le X/a \\ \omega(b,3n)\le K}} 1 \ge (X/a)(\log n)^{-Q(\beta/2)+o(1)}. \tag{3.2}$$

Il en découle

$$\sum_{m\in\mathcal{S}} \tau(m,\mathcal{D}_n^*) \ge X(\log n)^{-Q(\beta/2)+o(1)} \sum_{\substack{a\in\mathcal{D}^* \\ \omega(a)\le K}} 1/a. \tag{3.3}$$

Puisque $\lambda > \log 3 - 1$, le lemme 12 montre que si n est dans une suite convenable de densité 1 alors les intervalles $]d,(1+\eta)d]$, $d\,|\,n$, sont deux à deux disjoints. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\sum_{m\in\mathcal{S}} \tau(m,\mathcal{D}^*) \\
\ge X(\log n)^{-Q(\beta/2)+o(1)} \sum_{\substack{d|n \\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{\substack{d<a\le(1+\eta)d \\ \omega(a)\le K}} 1/a.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Appliquant le lemme 8 on a pour chaque d tel que $d > T(n)$,

$$\sum_{\substack{d<a\le(1+\eta)d \\ \omega(a)=K}} 1/a \gg \eta(\log d)^{-1}(\log_2 d)^{K-1}(K-1)!^{-1}. \tag{3.5}$$

Il suit

$$\begin{aligned}\sum_{m\in\mathcal{S}}\tau(m,\mathcal{D}^*) &\ge X(\log n)^{-Q(\beta/2)-\lambda+o(1)}(K-1)!^{-1}\\ &\qquad\times\sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>T(n)}}(\log_2 d)^{K-1}(\log d)^{-1}\mu(d)^2\\ &\ge X(\log n)^{-Q(\beta/2)-\lambda+o(1)}((1-\varepsilon)\log_2 n)^{K-1}\\ &\qquad\times\frac{1}{(K-1)!}\sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>T(n)}}\mu(d)^2.\end{aligned}$$

D'après le lemme 9, on a $P^+(n)>T(n)$ p.p. Cela implique que la somme en d est supérieure ou égale à $(\log n)^{(1-\varepsilon)\log 2}$ p.p. Par ailleurs, la formule de Stirling montre que

$$(1-\varepsilon)^{K-1}(\log_2 n)^{K-1}(K-1)!^{-1}\ge e^{-2\varepsilon K}(\log n)^{1-Q(\beta/2)}\qquad\text{p.p.}$$

Il vient donc

$$\sum_{m\in\mathcal{S}}\tau(m,\mathcal{D}^*)\ge X(\log n)^{-(2Q(\beta/2)+\lambda-\log 2)+o(1)}\qquad\text{p.p.}\tag{3.6}$$

Pour $\lambda>\log 4-1$ on a $2Q(\beta/2)+\lambda-\log 2=F(\lambda)$, d'où

$$\inf_{X\ge X_0(n)}(1/X)\sum_{m\in\mathcal{S}(X;n,\beta)}\tau(m,\mathcal{D}_n^*)\ge(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)}\qquad\text{p.p.}\tag{3.7}$$

Par ailleurs, pour minorer $\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n)$ on utilise l'inégalité de Cauchy–Schwarz :

$$\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n)\ge\liminf_{X\to\infty}\Big\{\sum_{m\in\mathcal{S}}\tau(m,\mathcal{D}_n^*)\Big\}^2\Big/\Big\{X\sum_{m\in\mathcal{S}}\tau(m,\mathcal{D}_n^*)^2\Big\}.\tag{3.8}$$

On est donc conduit à majorer $\sum_{m\in\mathcal{S}}\tau(m,\mathcal{D}_n^*)^2$. On a

$$\begin{aligned}&\sum_{m\in\mathcal{S}}\tau(m,\mathcal{D}_n^*)^2\\ &\qquad\le 2\sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>T(n)}}\mu(d)^2\sum_{\substack{d'\mid n,d'\ge d\\ P^+(d')>T(n)}}\mu(d')^2\sum_{m\in\mathcal{S}}\sum_{\substack{t,t'\mid m\\ d<t\le(1+\eta)d\\ d'<t'\le(1+\eta)d'}}1.\end{aligned}\tag{3.9}$$

Si t et t' sont comptés dans cette dernière somme intérieure, alors en posant

$$r=(t,t'),\quad s=t/r,\quad s'=t'/r,$$

on a

$$\begin{gathered}[t,t']=rss',\\ d/r<s\le(1+\eta)d/r,\qquad d'/r<s\le(1+\eta)d'/r,\end{gathered}$$

$$r \le 1 + \eta d \qquad \text{si } s \ne 1.$$

Nous allons en fait décomposer la somme en question selon les cas

$$s = s' = 1, \quad s = 1 \text{ et } s' > 1, \quad s > 1 \text{ et } s' > 1$$

en remarquant que le cas $s > 1$ et $s' = 1$ est impossible. Notons alors

$$\begin{aligned}
S_0(X;n,d) &:= \sum_{\substack{m\le X\\ \Omega(m,3n)\le\beta\log_2 n}} \Big(\sum_{\substack{t\mid m\\ d<t\le(1+\eta)d}} 1\Big)^2,\\
S_1(X;n,d,d') &:= (\log n)^{-\beta\log y_1} \sum_{d<r\le(1+\eta)d} y_1^{\Omega(r)}\\
&\quad\times \sum_{d'/r<s'\le(1+\eta)d'/r} y_1^{\Omega(s')} \sum_{m\le X/(rs')} y_1^{\Omega(m,3n)},\\
S_2(X;n,d,d') &:= (\log n)^{-\beta\log y_2} \sum_{r\le(1+\eta)d/2} y_2^{\Omega(r)} \sum_{d/r<s\le(1+\eta)d/r} y_2^{\Omega(s)}\\
&\quad\times \sum_{d'/r<s'\le(1+\eta)d'/r} y_2^{\Omega(s')} \sum_{m\le X/(rss')} y_2^{\Omega(m,3n)}.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
(3.10)\quad & \sum_{m\in\mathcal{S}} \tau(m,\mathcal{D}^*)^2\\
&\le \sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2 S_0(X;n,d)\\
&\quad + 2 \sum_{\substack{d\mid n,d'\mid n\\ P^+(d)>T(n),P^+(d')>T(n)\\ d'>d}} \mu(d)^2\mu(d')^2\{S_1(X;n,d,d')+S_2(X;n,d,d')\}.
\end{aligned}$$

D'après les lemmes 1 et 3 on a

$$\begin{aligned}
(3.11)\quad S_2(X;n,d,d') &\ll X(\log n)^{y_2-1-\beta\log y_2} \sum_{r\le(1+\eta)d/2} y_2^{\Omega(r)}/r\\
&\quad\times \sum_{d/r<s\le(1+\eta)d/r} y_2^{\Omega(s)}/s \sum_{d'/r<s'\le(1+\eta)d'/r} y_2^{\Omega(s')}/s'\\
&\ll X(\log n)^{y_2-1-\beta\log y_2-2\lambda}(\log(1/\eta))^{2-2y_2}\\
&\quad\times \sum_{r\le d} (\log(2d/r))^{y_2-1}(\log(2d'/r))^{y_2-1} y_2^{\Omega(r)}/r.
\end{aligned}$$

Par sommation d'Abel, la dernière somme en r est

$$\ll \int_1^d (\log(2d/r))^{y_2-1}(\log(2d'/r))^{y_2-1}(\log r)^{y_2-1}r^{-1}\,dr.$$

Décomposons la dernière intégrale en I_1+I_2 ayant respectivement $[1,\sqrt{d}]$ et $[\sqrt{d},d]$ pour domaines d'intégration. On a

$$I_1 \ll (\log d)^{2y_2-1}(\log d')^{y_2-1}. \tag{3.12}$$

Par ailleurs, si $d'>d^2$ alors $I_2 \ll (\log d')^{y_2-1}(\log d)^{2y_2-1}$. Dans le cas $d<d'\le d^2$ on a

$$I_2 \ll (\log d)^{y_2-1}\int_1^d (\log(2z))^{y_2-1}(\log(2zd'/d))^{y_2-1}z^{-1}\,dz$$

$$\ll (\log d)^{y_2-1}\Big\{(\log(2d'/d))^{2y_2-1}+\int_{d'/d}^{d}(\log(2z))^{2y_2-2}\,dz\Big\}.$$

Donc, si $d<d'\le d^2$ et si $y_2\le 1/2$ alors

$$I_2 \ll (\log d)^{y_2-1}(\log(2d'/d))^{2y_2-1}\log_2 n. \tag{3.13}$$

Or, cette majoration est $\gg (\log d)^{2y_2-1}(\log d)^{y_2-1}\log_2 n$ lorsque $d'>d^2$. Par conséquent, on a dans tous les cas

$$\sum_{r\le d}(\log(2d/r))^{y_2-1}(\log(2d'/r))^{y_2-1}y_2^{\Omega(r)}/r$$
$$\ll (\log d)^{y_2-1}(\log(2d'/d))^{2y_2-1}\log_2 n.$$

D'où

$$S_2(X;n,d,d') \ll X(\log n)^{\alpha_2}(\log_2 n)^3(\log d)^{y_2-1}(\log(2d'/d))^{2y_2-1}$$

avec $\alpha_2=y_2-1-\beta\log y_2-2\lambda$ et puisque $\log d\ge \log P^+(d)\ge \log T(n)=(\log n)^{1-\varepsilon}$, on a

$$S_2(X;n,d,d') \ll X(\log n)^{\gamma_2+o(1)}(\log(d'/d))^{2y_2-1} \tag{3.14}$$

avec $\gamma_2=2y_2-2-\beta\log y_2-2\lambda$.

Par le lemme 7, si $1-2y_2\le 0.67$, soit $y_2\ge 0.165$, on en déduit

$$\sum_{\substack{d,d'\mid n\\ P^+(d),P^+(d')>T(n)}} \mu(dd')^2 S_2(X;n,d,d') \ll X(\log n)^{A+o(1)} \quad \text{p.p.} \tag{3.15}$$

avec

$$A=\gamma_2+\log 4+2y_2-1=4y_2-3-\beta\log y_2-2\lambda+\log 4.$$

On choisit $y_2 = \beta/4 \geq 1/4$, de sorte que la condition $y_2 \geq 0.165$ est bien réalisée. On obtient donc

$$\sum_{\substack{d,d'|n \\ P^+(d),P^+(d')>T(n)}} \mu(dd')^2 S_2(X;n,d,d') \ll X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.} \tag{3.16}$$

Nous sommes maintenant en mesure de majorer

$$\sum_{\substack{d,d'|n \\ P^+(d),P^+(d')>T(n) \\ d'>d}} \mu(d)^2\mu(d')^2 S_1(X;n,d,d').$$

Pour cela, en faisant appel aux lemmes 1 et 3 on a pour $d' > d$,

$$\begin{aligned} S_1(X;n,d,d') &\ll X(\log n)^{y_1-1-\beta\log y_1} \\ &\quad\times \sum_{d<t\leq(1+\eta)d} y_1^{\Omega(t)}/t \sum_{d'/t<s'\leq(1+\eta)d'/t} y_1^{\Omega(s')}/s' \\ &\ll X(\log n)^{y_1-1-\beta\log y_1-\lambda}(\log(1/\eta))^{1-y_1} \\ &\quad\times \sum_{d<t\leq(1+\eta)d} (\log((1+\eta)d'/t))^{y_1-1} y_1^{\Omega(t)}/t \\ &\ll X(\log n)^{y_1-1-\beta\log y_1-\lambda}(\lambda\log_2 n)^{1-y_1} \\ &\quad\times (\log(d'/d))^{y_1-1} \sum_{d<t\leq(1+\eta)d} y_1^{\Omega(t)}/t \\ &\ll X(\log n)^{y_1-1-\beta\log y_1-2\lambda}(\log_2 n)^{2-2y_2} \\ &\quad\times (\log(d'/d))^{y_1-1}(\log d)^{y_1-1}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Posant $\alpha_1 := 2y_1 - 2 - \beta\log y_1 - 2\lambda$, il suit

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{d,d'|n \\ d'>3d \\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2\mu(d')^2 S_1(X;n,d,d') \\ &\qquad\leq X(\log n)^{\alpha_1+\varepsilon} \sum_{\substack{d,d'|n \\ d'\neq d}} (1+|\log(d'/d)|)^{y_1-1}\mu(d)^2\mu(d')^2. \end{aligned}$$

On a de même

$$\sum_{\substack{d,d'|n \\ d'>3d \\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2\mu(d')^2 S_1(X;n,d,d') \leq X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Par ailleurs, dans le cas $d < d' \le 3d$ l'inégalité (3.10) implique

$$S_1(X;n,d,d') \ll X(\log n)^{y_1-1-\beta\log y_1} \sum_{d<t\le(1+\eta)d} y_1^{\Omega(t)}/t. \tag{3.18}$$

Par le lemme 3 on a donc

$$S_1(X;n,d,d') \ll X(\log n)^{2y_1-2-\beta\log y_1-\lambda}.$$

Il en découle

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{d,d'|n\\ d<d'\le 3d\\ P^+(d)>T(n)}} S_1(X;n,d,d') &\ll X(\log n)^{2y_1-2-\beta\log y_1-\lambda}2^{\omega(n)}\\ &\ll X(\log n)^{-\gamma_1+\varepsilon} \qquad \text{p.p.}\end{aligned} \tag{3.19}$$

où l'on a posé $\gamma_1 = -2y_1+2+\beta\log y_1+\lambda-\log 2$. Le choix $y_1 = \beta/2$ implique $\gamma_1 = F(\lambda)$.

Enfin, il reste à majorer

$$\sum_{\substack{d|n\\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2 S_0(X;n,d).$$

On a

$$\begin{aligned} &S_0(X;n,d)\\ &\quad= \sum_{\substack{m\le X\\ \Omega(m,3n)\le\beta\log_2 n}} \sum_{\substack{t|m\\ d<t\le(1+\eta)d}} 1 + 2\sum_{\substack{m\le X\\ \Omega(m,3n)\le\beta\log_2 n}} \sum_{\substack{t,t'|m\\ d<t<t'\le(1+\eta)d}} 1.\end{aligned} \tag{3.20}$$

D'une part, pour $0 < y_0 \le 1/2$ on a

$$\sum_{\substack{m\le X\\ \Omega(m,3n)\le\beta\log_2 n}} \sum_{\substack{t|m\\ d<t\le(1+\eta)d}} 1 \le (\log n)^{-\beta\log y_0} \sum_{m\le X} y_0^{\Omega(m,3n)} \sum_{\substack{t|m\\ d<t\le(1+\eta)d}} 1.$$

La dernière somme en m est majorée par

$$\begin{aligned}\sum_{d<t\le(1+\eta)d} y_0^{\Omega(t)} \sum_{m\le X/t} y_0^{\Omega(m,3n)} &\ll X(\log n)^{y_0-1} \sum_{d<t\le(1+\eta)d} y_0^{\Omega(t)}/t\\ &\ll X(\log n)^{y_0-1-\lambda}(\log d)^{y_0-1}\end{aligned}$$

en utilisant le lemme 3. Or,

$$\sum_{\substack{d|n\\ P^+(d)>T(n)}} (\log d)^{y_0-1}\mu(d)^2 \le (\log n)^{y_0-1+\log 2+2\varepsilon} \qquad \text{p.p.}$$

Ainsi, le choix $y_0 = \beta/2 \le 1$ implique

$$(3.21)\qquad \sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{\substack{m\le X\\ \Omega(m,3n)\le\beta\log_2 n}} \sum_{\substack{t\mid m\\ d<t\le(1+\eta)d}} 1 \le X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Par ailleurs, en majorant la fonction indicatrice de $\Omega(m,3n) \le \beta\log_2 n$ par $y^{\Omega(m,3n)-\beta\log_2 n}$, $0 < y \le 1$, on a d'après le lemme 3,

$$(3.22)\qquad \sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2 \sum_{\substack{m\le X\\ \Omega(m,3n)\le\beta\log_2 n}} \sum_{\substack{t,t'\mid m\\ d<t<t'\le(1+\eta)d}} 1 \le X(\log n)^{-H_\lambda+3\varepsilon} \quad \text{p.p.}$$

où l'on a posé

$$H_\lambda = -4y + 3 + 2\lambda - \log 2 + \beta\log y.$$

Le choix $y = \beta/4$ implique

$$H_\lambda = \begin{cases} Q(\beta) + \log 2 & \text{si } \log 4 - 1 < \lambda < \log 8 - 1,\\ 2\lambda + 1 - \log 8 & \text{si } \lambda \ge \log 8 - 1. \end{cases}$$

Et puisque $H_\lambda \ge F(\lambda)$, on a alors en vertu de (3.20)–(3.22),

$$(3.23)\qquad \sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>T(n)}} \mu(d)^2 S_0(X;n,d) \le X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

En conséquence, il découle de (3.9), (3.10), (3.16), (3.19) et (3.23) que

$$(3.24)\qquad \sum_{m\in\mathcal{S}} \tau(m,\mathcal{D}_n^*)^2 \le X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.}$$

Ainsi, par (3.7), (3.8) et (3.24) on obtient pour $\lambda > \log 4 - 1$,

$$\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n) \ge (\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.} \ \blacksquare$$

4. La majoration de $\mathbf{d}\mathcal{B}_\lambda(n)$. Notre point de départ est la majoration

$$(4.1)\qquad \begin{aligned} B(X;n,\lambda) &= |\{m \le X : \tau(m,\mathcal{D}_n) > 0\}|\\ &\le \sum_{\substack{m\le X\\ \Omega(m,3n)>\beta\log_2 n}} 1 + \sum_{m\le X} y^{\Omega(m,3n)-\beta\log_2 n}\tau(m,\mathcal{D}_n) \end{aligned}$$

où $X \ge X_0(n)$, $0 < y \le 1$ et $\lambda \ge \log 4 - 1$. D'une part, en suivant une démonstration analogue à celle du théorème 010 de [HT88] on a

$$\sum_{\substack{m\le X\\ \Omega(m,3n)\ge\beta\log_2 n}} 1 \ll X(\log n)^{-Q(\beta)};$$

d'autre part, en faisant appel aux lemmes 1 et 2 on a

$$\begin{aligned}
&\sum_{m\le X} y^{\Omega(m,3n)-\beta\log_2 n}\tau(m,\mathcal{D})\\
&\qquad\le (\log n)^{-\beta\log y}\sum_{d\mid n}\sum_{d<t\le(1+\eta)d} y^{\Omega(t)}\sum_{m\le X/t} y^{\Omega(m)}\\
&\qquad\le X(\log n)^{-\beta\log y+y-1}\sum_{d\mid n}\sum_{d<t\le(1+\eta)d} y^{\Omega(t)}/t\\
&\qquad\ll X(\log n)^{-\beta\log y+y-1-\lambda}(\log(1/\eta))^{1-y}\sum_{\substack{d\mid n\\ d\ne 1}}(\log d)^{y-1}.
\end{aligned}$$

Or, on sait que

$$\sum_{\substack{d\mid n,\, d\ne 1\\ P^+(d)<\log n}}(\log d)^{y-1}\le 2^{\Omega(n,\log n)}\le \log_2 n\quad \text{p.p.}$$

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>\log n}}(\log d)^{y-1} &\ll \sum_{\log_3 n<k\le\log_2 n} e^{(y-1)k}\sum_{\substack{d\mid n\\ k-1<\log_2 P^+(n)\le k}} 1\\
&\ll \sum_{\log_3 n<k\le\log_2 n} e^{(y-1)k}2^{\Omega(n,\exp e^k)}.
\end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité suivante donnée par le lemme 50.1 de [HT88] :

$$\max_{\log_3 n<k\le\log_2 n}\Omega(n,\exp e^k)/k\le 1+(1/\log_4 n)\quad \text{p.p.},$$

nous obtenons ainsi pour $1-\log 2<y\le 1$,

$$\begin{aligned}
\text{(4.2)}\qquad &\sum_{\substack{d\mid n\\ P^+(d)>\log n}}(\log d)^{y-1}\\
&\qquad\ll \sum_{k\le\log_2 n}\exp\{(y-1+\log 2+(\log_4 n)^{-1})k\}\quad \text{p.p.}\\
&\qquad\ll (\log n)^{y-1+\log 2+o(1)}\quad \text{p.p.}
\end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned}
\text{(4.3)}\qquad &B(X;n,\lambda)\\
&\qquad\ll X(\log n)^{-Q(\beta)}+X(\log n)^{2y-2+\log 2-\beta\log y-\lambda+o(1)}\quad \text{p.p.}
\end{aligned}$$

Dans le cas $\log 4 - 1 \le \lambda \le 3\log 2 - 1$ nous obtenons donc en choisissant $y = B/2 \ge \log 2 > 1 - \log 2$,

$$B(X; n, \lambda) \le X(\log n)^{-Q(\beta)+o(1)} \quad \text{p.p.} \tag{4.4}$$

Par ailleurs, si $\lambda > 3\log 2 - 1$ on a

$$\begin{aligned} B(X; n, \lambda) &\le X \sum_{d|n} \sum_{d<t\le(1+\eta)d} 1/t \ll X(\log n)^{-\lambda} 2^{\Omega(n)} \\ &\le X(\log n)^{\log 2 - \lambda + o(1)} \quad \text{p.p.} \end{aligned} \tag{4.5}$$

En conséquence, pour $\lambda > \log 4 - 1$ on a

$$B(X; n, \lambda) \le X(\log n)^{-F(\lambda)+o(1)} \quad \text{p.p.} \quad (X \ge X_0(n)). \ \blacksquare \tag{4.6}$$

Bibliographie

[B48] F. A. Behrend, *Generalization of an inequality of Heilbronn and Rohrbach*, Bull. Amer. Math. Soc. 54 (1948), 681–684.

[HR79] H. Halberstam and H.-E. Richert, *On a result of R. R. Hall*, J. Number Theory 11 (1979), 76–89.

[HR66] H. Halberstam and K. F. Roth, *Sequences*, Oxford University Press, 1966.

[HT88] R. R. Hall and G. Tenenbaum, *Divisors*, Cambridge University Press, 1988.

[R93] A. Raouj, *Sur la densité de certains ensembles de multiples*, *1*, ce volume, 121–152.

[S80] P. Shiu, *A Brun–Titchmarsh theorem for multiplicative functions*, J. Reine Angew. Math. 313 (1980), 161–170.

[T90] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publications de l'Institut Elie Cartan, Université de Nancy I, 1990.

UNIVERSITÉ CADI AYYAD
FACULTÉ DES SCIENCES, SEMLALIA
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
B.P.S. 15, MARRAKECH, MAROC

Reçu le 11.10.1993 (2499)