ACTA ARITHMETICA
LXIX.2 (1995)

Sur les mauvais facteurs locaux des fonctions L attachées aux surfaces abéliennes et surfaces K-3

par

JEAN CLAUDE DOUAI (Lille)

Soient k un corps de nombres, X une variété projective, lisse, définie sur k, l un premier $\neq 2$. L'un des objectifs de ce travail est d'étudier les facteurs locaux

$$L_v(X,s) = \det(1 - \mathrm{Fr}_v(Nv)^{-s} | H^2(\overline{X}, Q_l)^{I_v})^{-1}$$

de la fonction L attachée à X en les places v où il y a mauvaise réduction (Fr_v = Frobenius géométrique en v, I_v = inertie en v). En particulier, nous déterminons au §III l'ordre en $s = 0$ du pôle de $L_v(X,s)$ quand X est une surface K-3 ou encore une surface abélienne d'un certain type. L'ordre de ce pôle dépend étroitement du type de dégénérescence en v de la variété X et est liée au calcul du $H^4_{\mathrm{et}}(X/k_v, Q_l/Z_l(3))$ qui avait été entamé dans [2]. Les ingrédients essentiels sont les résultats galoisiens de Jannsen [3] et les résultats de Kulikov–Shafarevich sur les dégénérescences des surfaces [5]. Dans le paragraphe IV, nous globalisons les résultats précédents en calculant le $H^4_{\mathrm{et}}(X/k, Q_l/Z_l(3))$ pour une surface K-3 X.

Je tiens à remercier le referee pour ses corrections et ses observations.

Dans toute la suite, la topologie considérée sera la topologie étale.

Notations. Sauf dans le dernier paragraphe IV où k sera global, $k = k_v$ désignera un corps p-adique, v la valuation qui lui est attachée, $G = G_k = G_{k_v}$ son groupe de Galois, $I = I_v \subset G_{k_v}$ son groupe d'inertie, Fr_v son Frobenius géométrique, k_0 son corps résiduel. X désignera une variété projective, lisse, définie sur k et l un premier différent de p. On écrit $\overline{X} = X \otimes_k \overline{k}$.

I. Nous avons la suite spectrale de descente de Hochschild–Serre :

$$E_2^{p,q} = H^p(G_k, H^q(\overline{X}, Q_l/Z_l(n))) \Rightarrow H^{p+q}(X, Q_l/Z_l(n)),$$

qui donne, pour $r \geq 2$ et n entier quelconque, la suite exacte

$$(1)\qquad H^{r-1}(\overline{X},Q_l/Z_l(n))^G \to H^2(k,H^{r-2}(\overline{X},Q_l/Z_l(n))) \to H^r(X,Q_l/Z_l(n))_0 \to H^1(k,H^{r-1}(\overline{X},Q_l/Z_l(n))) \to 0$$

où $H^r(X,Q_l/Z_l(n))_0 = \mathrm{Ker}\{H^r(X,Q_l/Z_l(n)) \to H^r(\overline{X},Q_l/Z_l(n))^G\}$.

Par la conjecture de Jannsen ([3], p. 342), $H^2(k,H^{r-2}(\overline{X},Q_l/Z_l(n)))$ est fini si (a) $r-2+1<n$, (b) $r-2+1>2n$.

Par exemple, si $r=4$, ceci donne (a) $3<n$, (b) $3>2n$, auquel cas $H^2(k,H^2(\overline{X},Q_l/Z_l(n)))$ est fini pour $n\neq 2$ ou 3.

Il existe une formulation équivalente de la conjecture de Jannsen (cf. *loc. cit.*) : on pose $m=i+1-n$ avec $i=r-2$, alors $H^i(\overline{X},Q_l(m))^G\neq 0$ au plus pour $0\le m\le (i+1)/2$.

Dans le cas de notre exemple $r=4$, ceci donne : $H^{r-2}(\overline{X},Q_l(m))^{G_k}\neq 0$ au plus seulement pour $m=0$ ou 1. Pour $r=4$, nous aurons donc seulement à considérer :

(i) $n=3$ ou $m=0$,
(ii) $n=2$ ou $m=1$.

Par le lemme 11(b) de Jannsen [3],

$$\begin{aligned}\dim H^2(k,H^2(\overline{X},Q_l/Z_l(n))) &= \dim_{Q_l} H^2(\overline{X},Q_l(n-1))_G\\ &= \dim_{Q_l} H^2(\overline{X},Q_l(m))^G \le -\operatorname{ord}_{s=m} L_v(H^2(X,Q_l),s)\end{aligned}$$

avec égalité si le Frobenius géométrique Fr_v agit semi-simplement sur $H^2(\overline{X},Q_l)^{I_v}$. Le fait que Fr_v agit semi-simplement sur $H^\nu(\overline{X},Q_l)^{I_v}$, $\nu\ge 1$, est précisément une conjecture de Serre et Grothendieck. $L_v(H^2(\overline{X},Q_l),s)$ n'admet donc de pôles qu'en $s=0$ ou 1 si l'on admet d'une part la conjecture de Jannsen, d'autre part celle de Serre–Grothendieck.

La suite exacte (1) appliquée au cas $r=4$ donne les suites exactes suivantes (cf. n° $3'$, §II de [2] où X est supposé simplement connexe) :

(i) pour $n=3$:

$$(2)\qquad H^3(\overline{X},Q_l/Z_l(3))^G \to H^2(k,H^2(\overline{X},Q_l/Z_l(3))) \to H^4(X,Q_l/Z_l(3))_0 \to H^1(k,H^3(\overline{X},Q_l/Z_l(3))) \to 0.$$

(Remarquer que $H^4(\overline{X},Q_l/Z_l(3)) \simeq Q_l/Z_l(1)$, d'où l'on déduit que $H^4(\overline{X},Q_l/Z_l(3))^G$ est fini; $H^4(X,Q_l/Z_l(3))$ et $H^4(X,Q_l/Z_l(3))_0$ ont donc mêmes corangs);

(ii) pour $n=2$:

$$(3)\qquad H^3(\overline{X},Q_l/Z_l(2))^G \to H^2(k,H^2(\overline{X},Q_l/Z_l(2))) \to H^4(X,Q_l/Z_l(2))_0 \to H^1(k,H^3(\overline{X},Q_l/Z_l(2))) \to 0.$$

II. Nous nous intéresserons surtout au cas $n = 3$.

Proposition 1. *Soit X une surface projective, lisse, définie sur un corps p-adique $k = k_v$. Alors*

$$\dim H^4(X, Q_l/Z_l(3)) = \dim_{Q_l} H^4(X, Q_l(3)) = \dim_{Q_l} H^2(X, Q_l)$$
$$\geq \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l(2))_G = \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l)^G = -\operatorname{ord}_{s=0} L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s),$$

cette dernière égalité étant valable si le Frobenius géométrique Fr_v *agit semi-simplement sur $H^2(\overline{X}, Q_l)^{I_v}$ ou si l'on admet la conjecture de Serre–Grothendieck* [*resp.* $\dim H^4(X, Q_l/Z_l(2))_0 \geq \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l(1))^G = -\operatorname{ord}_{s=1} L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s)$ *si* ...].

Démonstration. L'égalité $\dim_{Q_l} H^4(X, Q_l(3)) = \dim_{Q_l} H^2(X, Q_l)$ résulte de la dualité de Poincaré–Tate entre $H^i(X, Q_l)$ et $H^{6-i}(X, Q_l(3))$ (cf. [2], §II, n° 2′). D'où $\dim H^4(X, Q_l/Z_l(3)) = \dim_{Q_l} H^4(X, Q_l(3)) = \dim_{Q_l} H^2(X, Q_l)$. L'égalité $\dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l(2))_G = \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l)^G$ provient de la dualité de Poincaré :

$$H^2(\overline{X}, Q_l(2)) \times H^2(\overline{X}, Q_l) \to H^4(\overline{X}, Q_l(2)) \simeq Q_l/Z_l.$$

Montrons maintenant l'inégalité

$$\dim H^4(X, Q_l/Z_l(3)) \geq \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l(2))_G.$$

Or, nous avons l'égalité $\dim_{Q_l} H^2(k, H^2(\overline{X}, Q_l(n))) = \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l(n-1))_G$ résultant de la dualité de Tate sur le corps p-adique k; se reportant à la suite exacte (2), il suffit alors de montrer que $H^3(\overline{X}, Q_l/Z_l(3))^G$ est fini ou, ce qui revient au même, que $H^3(\overline{X}, Q_l(3))^G = 0$. Or

$$H^1(\overline{X}, Q_l(2)) \overset{L.H.}{\tilde{\to}} H^3(\overline{X}, Q_l(3))$$

par Lefschetz dur et $H^1(\overline{X}, Q_l(2))^G = 0$ par le théorème 5(a) de [3].

Utilisant (3), on montrerait l'analogue de la proposition 1 pour $n = 2$.

Dans le cas particulier où X est simplement connexe, les suites exactes (2) et (3) se simplifient et on obtient :

Proposition 2. *Soit X une surface projective, lisse, simplement connexe* (*par exemple une surface K-3*), *définie sur un corps p-adique $k = k_v$. Alors*

(i) $\dim H^4(X, Q_l/Z_l(3)) = \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l)^G$
$$\leq -\operatorname{ord}_{s=0} L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s)$$

(*avec égalité si le Frobenius géométrique* Fr_v *agit semi-simplement sur $H^2(\overline{X}, Q_l)^{I_v}$ ou si on admet la conjecture de Serre–Grothendieck*).

(ii) $\dim H^4(X, Q_l/Z_l(2))_0 = \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l(1))^G$
$$\leq -\operatorname{ord}_{s=1} L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s)$$

(*avec égalité si* ...).

III. Le théorème principal. Soit X une surface projective, lisse, définie sur un corps p-adique $k = k_v$. Supposons que X admette une réduction semi-stable modulo p, i.e. qu'il existe un modèle régulier $\mathcal{X}$ sur $\operatorname{spec} \mathcal{O}_k$ tel que la fibre spéciale $\mathcal{X}_s$ de $\mathcal{X}$ soit un diviseur à croisements normaux : ceci signifie que $\mathcal{X}_s$ est réduite, $\mathcal{X}_s = \sum Y_i$, les Y_i étant définies sur k_0, géométriquement irréductibles, lisses, et se rencontrant transversalement de telle sorte que localement le morphisme structural $\pi : \mathcal{X} \to \operatorname{spec} \mathcal{O}_k$ est définie par $t = x_1 x_2 \ldots x_k$, t uniformisante de $\mathcal{O}_k$, les x_i faisant partie d'un système local de paramètres réguliers de $\mathcal{X}$. Par Deligne [1], n° 1.7.2, il existe toujours sur $H^2(\overline{X}, Q_l)^P$, $P = \ker(I \to I_1)$ où $I = I_v$, $I_1 = 1$ — quotient modéré de I, une filtration de monodromie locale W^M. D'autre part, sous les hypothèses précédentes sur X, par Rapoport–Zink [4], p. 41 (en particulier, leur proposition 2.13), les valeurs propres associées aux relèvements de l'automorphisme de Frobenius sont pures, ce qui permet de définir une deuxième filtration W^{Fr} sur $H^2(\overline{X}, Q_l)^P$, les deux filtrations W^M et W^{Fr} étant alors égales (cf. aussi la proposition 1.7.5 de [1]).

Dans la suite, nous posons

$$\mathcal{X}_{\bar{s}}^{[p]} = \coprod_{i_0 < \ldots < i_p} \overline{Y}_{i_0} \cap \ldots \cap \overline{Y}_{i_p}$$

où $(\overline{Y}_i)_{i \in I}$ désigne la collection des composantes irréductibles de la fibre géométrique spéciale $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ de $\mathcal{X}$.

THÉORÈME 1. *X satisfaisant aux conditions précédentes, supposons, en outre, les points de $\mathcal{X}_{\bar{s}}^{[2]}$ (= ensemble des points triples de la fibre géométrique spéciale $\mathcal{X}_{\bar{s}}$) rationnels sur le corps résiduel k_0 de k. Alors l'inclusion $H^2(\overline{X}, Q_l)^G \subseteq W_0(H^2(\overline{X}, Q_l))$ où $W_0(H^2(\overline{X}, Q_l))$ désigne l'ensemble des éléments de poids 0 de $H^2(\overline{X}, Q_l)^P$ pour W^{Fr} (ou W^M, ce qui revient au même) est une égalité et $\dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l)^G = \dim_{Q_l} H^2(|\Gamma|, Q_l) := h_2(|\Gamma|)$ où $|\Gamma|$ désigne le graphe dual de la fibre géométrique spéciale $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ (= polyèdre associé aux composantes irréductibles de $\mathcal{X}_{\bar{s}}$).*

Démonstration. Il suffit de remarquer que $W_0(H^2(\overline{X}, Q_l))$ se calcule comme l'homologie en degré 2 du complexe (cf. la ligne -4, p. 41 de [4])

$$\underset{0}{H^0(\mathcal{X}_{\bar{s}}^{[0]}, Q_l)} \to \underset{1}{H^0(\mathcal{X}_{\bar{s}}^{[1]}, Q_l)} \to \underset{2}{H^0(\mathcal{X}_{\bar{s}}^{[2]}, Q_l)} \to 0.$$

Ce dernier complexe est aussi le complexe de Čech du graphe dual $|\Gamma|$ de $\mathcal{X}_{\bar{s}}$ ([2], ligne -5, p. 280). Etant donné l'hypothèse de rationalité faite sur les points de $\mathcal{X}_{\bar{s}}^{[2]}$, $W_0(H^2(\overline{X}, Q_l))$ est invariante par G, d'où l'inclusion $W_0(H^2(\overline{X}, Q_l)) \subseteq H^2(\overline{X}, Q_l)^G$.

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du théorème 1, $L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s)$ admet un pôle d'ordre $h_2(|\Gamma|)$ en $s = 0$.*

En effet, il suffit de remarquer que la valeur propre 1 de Fr_v est semi-simple sur $H^2(\overline{X}, Q_l)^{I_v}$. Or, le sous-espace propre correspondant à une telle valeur propre est contenu dans $W_0(H^2(\overline{X}, Q_l))$ et Fr_v est l'identité sur ce sous-espace puisque, par le théorème 1, $W_0(H^2(\overline{X}, Q_l)) = H^2(\overline{X}, Q_l)^G$. On déduit alors de la proposition 1 les égalités suivantes :

$$-\operatorname{ord}_{s=0} L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s) = \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l)^G = h_2(|\Gamma|).$$

R e m a r q u e 1. Si les points de $\mathcal{X}_{\bar{s}}^{[2]}$ ne sont pas rationnels sur k_0, on remplacera k_0 par une extension finie de k_0 sur laquelle ils le deviennent : une puissance finie de Fr_v agit trivialement sur $W_0(H^2(\overline{X}, Q_l))$; d'où Fr_v agit semi-simplement sur cet espace et, par la proposition 1, nous avons encore l'égalité

$$-\operatorname{ord}_{s=0} L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s) = \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l)^G.$$

Si les points de $\mathcal{X}_{\bar{s}}^{[2]}$ ne sont pas rationnels sur k_0, on a la formule

$$\dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l)^G = \dim_{Q_l} H^2(|\Gamma|, Q_l)^G,$$

G agissant sur $H^2(|\Gamma|, Q_l)$ via un quotient fini. On en déduit dans tous les cas l'égalité

$$-\operatorname{ord}_{s=0} L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s) = \dim_{Q_l} H^2(|\Gamma|, Q_l)^G,$$

G agissant via un quotient fini.

COROLLAIRE 2. *Soit X une surface K-3 définie sur un corps p-adique $k = k_v$. Supposons que X admette un modèle régulier $\mathcal{X}$ sur* $\operatorname{spec} \mathcal{O}_k$. *Alors*

(a) *si $\mathcal{X}$ admet une dégénérescence standard de type A ou B au sens de Shafarevich–Kulikov* [5], *$L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s)$ n'a pas de pôle en $s = 0$,*

(b) *si $\mathcal{X}$ admet une dégénérescence standard de type C au sens de loc. cit., les points de $\mathcal{X}_{\bar{s}}^{[2]}$ étant rationnels sur le corps résiduel k_0 de k, $L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s)$ admet un pôle en $s = 0$ d'ordre égal à 1.*

Comme dans le corollaire 1, la valeur propre 1 de Fr_v est semi-simple sur $H^2(\overline{X}, Q_l)^{I_v}$. Par la proposition 2(i), on a alors

$$-\operatorname{ord}_{s=0} L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s) = \dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l)^G$$

et, par le théorème 1,

$$\dim_{Q_l} H^2(\overline{X}, Q_l)^G = h_2(|\Gamma|) = \begin{cases} 0 & \text{dans le cas (a),} \\ 1 & \text{dans le cas (b)} \end{cases}$$

(par définition des dégénérescences standard [5], p. 719, on sait que $|\Gamma|$ a le type d'homotopie de S^2 dans le cas (b) et que $h_2(|\Gamma|) = 0$ dans le cas (a)).

R e m a r q u e 2. En utilisant la proposition 2(ii), on pourrait aussi montrer que $L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s)$ n'admet pas de pôle en $s = 1$, X étant une surface K-3 comme dans le corollaire 2 et cela quel que soit son type de dégénérescence.

Corollaire 3. *Soit X une surface abélienne définie sur un corps p-adique k. Faisons les hypothèses suivantes sur X :*

(i) *X est de type III, i.e. la fibre spéciale géométrique du modèle de Néron de X est un tore T isomorphe au produit $G_m \times G_m$.*

(ii) *T est déployé sur le corps résiduel k_0 de k.*

Alors $L_v(H^2(\overline{X}, Q_l), s)$ admet un pôle d'ordre 1 en $s = 0$.

Démonstration. On procède comme dans les corollaires 1 et 2 en remarquant que, sous les hypothèses du corollaire 3, $h_2(|\Gamma|) = 1$.

Remarque 3. Le corollaire 3 précédent est à rapprocher du théorème 5(b), n° 7 de [3].

IV. Un résultat global. Nous supposerons dans ce paragraphe que k est un corps de nombres. Soit X une surface K-3 définie sur k satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) X admet un modèle régulier $\mathcal{X}$ sur $\operatorname{spec} \mathcal{O}_k$,

(ii) toutes les dégénérescences de $\mathcal{X}$ en les places de mauvaise réduction sont standard de type A, B, C au sens de Shafarevich–Kulikov [5] comme dans le corollaire 2 au théorème 1.

Par un théorème de O. Gabber, on sait que, pour presque tout l, $H^2(\overline{X}, Z_l)$ est sans torsion; on en déduit que, pour presque tout l, $H^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3))$ est aussi sans torsion, donc que $H^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3))$ s'identifie, pour presque tout l, à sa partie divisible

$$\widetilde{H}^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3)) = l - \operatorname{div} H^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3)).$$

D'où :

$$\begin{aligned} H^4(X, Q_l/Z_l(3))_0 &\simeq H^2(k, H^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3))) \\ &\simeq H^2(k, \widetilde{H}^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3))) \quad \text{pour presque tout } l. \end{aligned}$$

Or, par le théorème 3(d) de [3], S désignant l'ensemble des places non archimédiennes de k où $\mathcal{X}$ admet mauvaise réduction, l étant supposé $\neq 2$, on a

$$H^2(k, \widetilde{H}^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3))) \simeq \bigoplus_{v \in S} H^2(k_v, \widetilde{H}^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3))).$$

D'où

$$H^4(X, Q_l/Z_l(3))_0 \simeq \bigoplus_{v \in S} H^2(k_v, \widetilde{H}^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3))) \quad \text{pour presque tout } l.$$

Par les calculs faits précédemment au §I et dans la démonstration du corollaire 2 au théorème 1, pour $v \in S$, compte-tenu de (ii),

$$H^2(k_v, \widetilde{H}^2(\overline{X}, Q_l/Z_l(3))) \begin{cases} \simeq Q_l/Z_l & \text{si } v \text{ est de type C,} \\ = 0 & \text{si } v \text{ est de type B.} \end{cases}$$

On peut donc énoncer le

THÉORÈME 2. *Soit X une surface K-3 définie sur un corps de nombres et satisfaisant aux conditions* (i) *et* (ii) *précédentes. Alors*

$$\dim H^4(X, Q_l/Z_l(3)) = \#\{v \in S \text{ où la réduction est de type } C\}.$$

Références

[1] P. Deligne, *La conjecture de Weil. II*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 52 (1980), 137–252.

[2] J. C. Douai, *Dégénérescence des surfaces et principe de Hasse*, J. Algebra 152 (1992), 269–288.

[3] U. Jannsen, *On the l-adic cohomology of varieties over number fields and its Galois cohomology*, dans : Galois Group over $\mathbb{Q}$, Y. Ihara, K. A. Ribet and J. P. Serre (eds.), Springer, Berlin, 1989, 315–360.

[4] M. Rapoport und T. Zink, *Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik*, Invent. Math. 68 (1982), 21–101.

[5] I. R. Shafarevich, *The influence of height on degenerations of algebraic surfaces of type K-3* (with A. V. Rudakov and T. Zink), Collected Math. Papers, Springer, 1989, 715–731.

UFR MATHÉMATIQUES — M2
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES DE LILLE
F-59655 VILLENEUVE D'ASCQ CEDEX, FRANCE

Reçu le 13.9.1992
et révisé le 25.2.1994 (2303)