ACTA ARITHMETICA
LXVIII.3 (1994)

Classification des formes quadratiques réelles : un contre-exemple à la finitude

par

DAVID-OLIVIER JAQUET-CHIFFELLE et FRANÇOIS SIGRIST (Neuchâtel)

1. Introduction. On doit à G. Voronoï [Vo] un algorithme de classification complète des formes quadratiques parfaites. Il est dès lors possible, en principe, de déterminer en un temps fini la constante d'Hermite γ_n, qui décrit dans $\mathbb{R}^n$ la densité maximale des empilements de sphères en réseau.

L'énorme complexité de l'algorithme lui donne une limite naturelle : il semble actuellement impensable de dépasser la dimension 8, où les explorations ont déjà fourni des milliers de formes parfaites. Signalons cependant que la constante γ_8 a été trouvée par une approche différente (Blichfeldt 1926), et que sa valeur vient d'être confirmée par la détermination de γ_7 [Ja1].

Dans [BMS], on envisage la restriction de l'algorithme de Voronoï à un sous-espace affine T de l'espace vectoriel des formes quadratiques réelles (il faut introduire une restriction géométrique, qui sera clairement remplie ci-dessous : les empilements de sphères associés aux formes T-parfaites doivent être connexes). Dans une telle situation, l'algorithme est exhaustif, mais l'existence d'une condition d'arrêt n'est pas établie. Un des exemples ci-après montrera qu'elle n'existe *pas* en général. Mentionnons cependant un résultat important [Ja2] : Dans le cas des G-formes (invariantes sous l'action d'un groupe fini G), il n'existe qu'un nombre fini de formes G-parfaites, à G-équivalence près.

2. Fonctionnement de l'algorithme de Voronoï en dimension 2. A $Gl(2,\mathbb{Z})$-équivalence près, il n'y a qu'une seule forme parfaite à deux variables : $x^2 - xy + y^2$. Celle-ci a les trois paires de vecteurs minimaux $\pm\binom{1}{0}$, $\pm\binom{0}{1}$, et $\pm\binom{1}{1}$. Comme les formes parfaites sont caractérisées par leurs vecteurs minimaux, on déduit la liste complète des formes parfaites en dimension 2 : elles ont les vecteurs minimaux $\pm\vec{u} = \pm\binom{u_1}{u_2}$, $\pm\vec{v} = \pm\binom{v_1}{v_2}$, et $\pm(\vec{u}+\vec{v})$ ou $\pm(\vec{u}-\vec{v})$. Il est nécessaire et suffisant que $|u_1v_2 - u_2v_1| = 1$ pour obtenir une forme parfaite. C'est donc à l'aide des fractions de Farey que l'on décrit les formes, et par ailleurs leurs relations de contiguïté. En effet, la forme de vecteurs minimaux $\pm\vec{u}, \pm\vec{v}, \pm(\vec{u}+\vec{v})$ a trois formes qui lui sont contiguës, ayant pour vecteurs minimaux respectifs $\{\pm\vec{u}, \pm\vec{v}, \pm(\vec{u}-\vec{v})\}$, $\{\pm\vec{u}, \pm(2\vec{u}+\vec{v}), \pm(\vec{u}+\vec{v})\}$, $\{\pm(\vec{u}+2\vec{v}), \pm\vec{v}, \pm(\vec{u}+\vec{v})\}$. Une illustration parlante consiste à représenter les voisines de l'ellipse $x^2 - xy + y^2 = 1$ qui sont $x^2+xy+y^2 = 1$, $x^2-3xy+3y^2 = 1$ et $3x^2-3xy+y^2 = 1$. Le passage d'une ellipse à sa voisine consiste à suivre le faisceau à un paramètre qui les relie (une ellipse et sa voisine ont quatre points communs) : ceci est précisément le mécanisme général de l'algorithme de Voronoï.

3. Etude d'un sous-espace linéaire à l'aide de l'algorithme de Voronoï relatif. Prenons le sous-espace T de l'ensemble des formes quadratiques à deux variables décrit par le nombre réel $\phi > 0$: on exige que la droite de pente ϕ soit une *direction propre* de la matrice $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ décrivant la forme $ax^2+2bxy+cy^2$. Pour les vecteurs minimaux d'une telle forme, on a le

LEMME. *Supposons que la forme $ax^2+2bxy+cy^2$ appartienne à T. Alors*

(i) *Si $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$ est un vecteur minimal, alors la fraction $|u_2/u_1|$ est un segment initial du développement de ϕ en fraction continue.*

(ii) *Si $\vec{u} = \left(\begin{smallmatrix} u_1 \\ u_2 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right)$ sont deux vecteurs minimaux indépendants, alors $|u_1v_2 - u_2v_1| = 1$.*

P r e u v e. (i) Si u_2/u_1 n'est pas une approximation de ϕ, il existe w_1 et w_2 tels que $|w_1\phi - w_2| \le |u_1\phi - u_2|$ et $w_1 \le u_1$. Le point de coordonnées entières (w_1, w_2) est intérieur à l'ellipse, et le vecteur $\vec{u}$ n'est donc pas minimal.

(ii) Le parallélogramme construit sur les extrémités de $\pm\vec{u}$ et $\pm\vec{v}$ a l'aire $2|u_1v_2 - u_2v_1|$. Mais la valeur de la constante d'Hermite $\gamma_2 = 2/\sqrt{3}$ implique que l'aire de l'ellipse ne peut pas dépasser $2\pi/\sqrt{3} = 3.62\ldots$ ∎

Si l'on pose $\kappa = \phi - 1/\phi$, un calcul facile montre que T est de dimension 2, et qu'on peut prendre la base

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1/\kappa \\ -1/\kappa & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/\kappa \\ 1/\kappa & 1 \end{pmatrix}.$$

La matrice-unité $Q(0) = T_1 + T_2$ est T-parfaite, puisqu'elle a deux paires de vecteurs minimaux, et peut donc servir d'ancrage pour l'algorithme. Celui-ci étant exhaustif, le graphe de contiguïté est linéaire :

$$\ldots Q(-2) \leftrightarrow Q(-1) \leftrightarrow Q(0) \leftrightarrow Q(1) \leftrightarrow Q(2) \ldots$$

Par ailleurs, l'espace T est fermé pour le produit matriciel, et la rotation de $\pi/2$ dans le plan fournit une T-équivalence entre $Q(j)$ et $Q(-j)$. Une forme T-parfaite a 2, ou parfois 3 paires de vecteurs minimaux, donnés comme dans le cas général à l'aide de fractions de Farey. La classification des formes T-parfaites en fonction de ϕ est donnée par le

THÉORÈME. (a) *Si ϕ est rationnel, le graphe de Voronoï est fini.*

(b) *Si ϕ est irrationnel et κ rationnel, le graphe est infini mais périodique : il existe une translation du graphe qui est une T-équivalence.*

(c) *Si κ est irrationnel, deux formes $Q(\pm i)$ et $Q(\pm j)$ avec $i \neq \pm j$ ne sont jamais T-équivalentes, et le graphe est infini. Il existe donc une infinité de classes de T-équivalence.*

Démonstration. (a) Si ϕ est rationnel, la droite de pente ϕ contient un point à coordonnées entières. Il existe alors une ellipse T-parfaite avec l'extrémité d'un de ses axes à coordonnées entières. L'algorithme rencontre une impasse, et la liste des formes T-parfaites est finie.

(b) Il n'y a pas d'impasse pour l'algorithme puisque ϕ est irrationnel. Posons $\kappa = \alpha/\beta$ et $D = \alpha^2 + 4\beta^2$. Prenons ensuite (u_0, v_0) une solution primitive de l'équation de Pell $u^2 - Dv^2 = 1$. Alors un calcul facile montre que la matrice

$$U = \begin{pmatrix} u_0 + \alpha v_0 & -2\beta v_0 \\ -2\beta v_0 & u_0 - \alpha v_0 \end{pmatrix}$$

appartient à T. Mais d'autre part, U appartient à $Gl(2, \mathbb{Z})$ et par conséquent U^2 est T-équivalente à la matrice-unité! Comme une T-équivalence conserve les relations de contiguïté, le graphe est bien périodique.

(c) Si κ est irrationnel, aucune forme, à part $Q(0)$, n'est à la fois T-parfaite et rationnelle. Les seules T-équivalences possibles sont les éléments de $Gl(2, \mathbb{Z})$ qui fixent la matrice-unité, en d'autres termes les matrices orthogonales. Comme celles-ci sont en nombre fini, il existe une infinité de formes T-inéquivalentes. ∎

4. Exemples et commentaires

(a) $\phi = 5/3 = [1, 1, 2]$. On obtient successivement les matrices :

- $Q(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, minimaux $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, déterminant 1.
- $Q(1) = \left(\begin{smallmatrix} 15/7 & -15/14 \\ -15/14 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, minimaux $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, déterminant 195/196.
- $Q(2) = \left(\begin{smallmatrix} 13/3 & -5/2 \\ -5/2 & 5/3 \end{smallmatrix}\right)$, minimaux $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, déterminant 35/36.
- $Q(3) = \left(\begin{smallmatrix} 363/17 & -435/34 \\ -435/34 & 131/17 \end{smallmatrix}\right)$, minimaux $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right)$, déterminant 987/1156.

L'algorithme s'arrête, puisque le grand axe de l'ellipse est un vecteur minimal. Il est intéressant de constater que les segments successifs du développement de 5/3 en fraction continue sont donnés (avec les conventions usuelles) par la suite

$$(0/1), (1/0), (1/1), (2/1), (5/3).$$

(b1) $\phi = (\sqrt{13} + 2)/3 = [1, 1, 6, 1, 1, 1, 1, 6, 1, 1, \ldots]$. Alors $\kappa = 4/3$. On obtient successivement les matrices :

- $Q(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, minimaux $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, déterminant 1.
- $Q(1) = \left(\begin{smallmatrix} 3 & -3/2 \\ -3/2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, minimaux $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, déterminant 3/4.
- $Q(2) = \left(\begin{smallmatrix} 199 & -213/2 \\ -213/2 & 57 \end{smallmatrix}\right)$, minimaux $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 7 \\ 13 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 15 \end{smallmatrix}\right)$, déterminant 3/4.
- $Q(3) = \left(\begin{smallmatrix} 1009 & -540 \\ -540 & 289 \end{smallmatrix}\right)$, minimaux $\left(\begin{smallmatrix} 8 \\ 15 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 15 \\ 28 \end{smallmatrix}\right)$, déterminant 1.

Cet exemple contient la forme parfaite ayant 3 paires de vecteurs minimaux, et sa période est courte grâce à l'existence d'une solution de l'équation de Pell $u^2 - 13v^2 = -1$. La périodicité est donnée par l'équation matricielle

$$\begin{pmatrix} 1009 & -540 \\ -540 & 289 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -15 \\ -15 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 28 & -15 \\ -15 & 8 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, les segments successifs du développement de ϕ en fraction continue sont

$$(0/1), (1/0), (1/1), (2/1), (13/7), (15/8), (28/15), (43/23), \ldots$$

(b2) $\phi = (\sqrt{97} + 4)/9$. Alors $\kappa = 8/9$. Cet exemple est très semblable au précédent, mais il met en évidence une curieuse anomalie : les approximations de ϕ n'apparaissent pas toutes comme coordonnées des vecteurs minimaux. Il y manque par exemple (17/11) et (377/245). La donnée de ϕ ne permet donc pas de prédire quels sont les vecteurs minimaux des formes $Q(k)$.

(c) $\phi = \sqrt{2} = [1, 2, 2, 2, 2, \ldots]$. Comme prévu par le théorème, la forme $Q(k)$ n'est T-équivalente qu'à elle-même et à $Q(-k)$. Vu l'absence de 1's dans le développement de $\sqrt{2}$, toutes les paires consécutives d'approximations apparaissent comme vecteurs minimaux des formes. Par calcul direct, on constate que tous les déterminants des formes $Q(\pm k)$ sont différents. La liste des formes T-parfaites est donc *également infinie* si l'on quotiente par l'action de $Gl(2, \mathbb{Z})$.

Bibliographie

[BMS] A.-M. Bergé, J. Martinet et F. Sigrist, *Une généralisation de l'algorithme de Voronoï pour les formes quadratiques*, Astérisque 209 (1992), 137–158.

[Ja1] D.-O. Jaquet-Chiffelle, *Enumération complète des classes de formes parfaites en dimension* 7, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 43 (1) (1993), 21–55.

[Ja2] —, *Trois théorèmes de finitude pour les G-réseaux*, en préparation.

[Vo] G. Voronoï, *Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites*, J. Reine Angew. Math. 133 (1908), 97–178.

INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE NEUCHÂTEL
RUE EMILE ARGAND 11
CH-2007 NEUCHÂTEL, SUISSE

Reçu le 13.4.1994 (2592)