

Sur les périodes des nombres quadratiques spécialisés d'une fonction algébrique quadratique "réelle"

par

R. PAYSANT-LE ROUX (Caen)

I. Introduction et résultat principal. Dans deux articles A. Schinzel ([11]) étudie la longueur des périodes des fractions continues des nombres quadratiques réels $\sqrt{F(n)}$ où $n \in \mathbb{Z}$ et $F(n)$ est un polynôme non carré de la forme

$$(1) \quad a_0^2 n^{2p+2} + a_1 n^{2p+1} + \dots + a_{2p+2},$$

p, a_i entiers, $p \geq 0, a_0 \neq 0$.

Pour cela, il introduit la fraction continue formelle de la série formelle

$$\begin{aligned} \sqrt{F(X)} &= a_0 X^{p+1} \left(1 + \frac{a_1}{a_0^2} \frac{1}{X} + \dots + \frac{a_{2p+2}}{a_0^2} \frac{1}{X^{2p+2}} \right)^{1/2} \\ &= a_0 X^{p+1} \left(1 + \frac{a_1}{2a_0^2} \frac{1}{X} + \dots \right) \in \mathbb{Q}((1/X)). \end{aligned}$$

Si cette fraction continue est périodique de longueur π , il pose $\text{LP } \sqrt{F} = \pi$, si elle n'est pas périodique il pose $\text{LP } \sqrt{F} = \infty$.

Il définit également les numérateurs et les dénominateurs des réduites de cette fraction continue :

$$\begin{aligned} T_{-1} &= 1, & T_0 &= u_0, & T_\nu &= u_\nu T_{\nu-1} + T_{\nu-2}, & \nu &\geq 1. \\ U_{-1} &= 0, & U_0 &= 1, & U_\nu &= u_\nu U_{\nu-1} + U_{\nu-2}, \end{aligned}$$

Enfin, il note par $\text{lp } \sqrt{F(n)}$ la longueur de la fraction continue du nombre quadratique réel $\sqrt{F(n)}$ si $F(n)$ est positif et n'est pas un carré parfait. En notant par $\tilde{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des entiers n de \mathbb{Z} tels que $F(n) > 0$ et non carré parfait, il obtient le théorème suivant :

THÉORÈME 1 (A. Schinzel). 1. *Si $\text{LP } \sqrt{F} = \infty$ alors*

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \tilde{\mathbb{Z}}}} \text{lp } \sqrt{F(n)} = \infty.$$

2. Si $\text{LP} \sqrt{F} = \pi > 0$ et $\sqrt{F} = [u_0, \overline{u_1, \dots, u_\pi}]$, notons par E l'ensemble des entiers $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$ tels que $2T_{\pi-1}(n)$ est entier, et par CE son complémentaire. Alors :

- (i) $\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in E}} \text{lp} \sqrt{F(n)} < \infty$,
- (ii) $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in CE}} \text{lp} \sqrt{F(n)} = \infty$.

Nous étudions ici le problème similaire au précédent, à savoir :

On se donne un polynôme F de la forme (1) et sans racine multiple; on peut alors considérer le corps de fonctions $K_X = \mathbb{Q}(X, \sqrt{F})$; enfin, on se donne une fonction $f \in K_X \setminus \mathbb{Q}(X)$. On étudie alors la période du nombre quadratique réel $f(n)$ lorsque n décrit $\tilde{\mathbb{Z}}$.

Notre étude va montrer que c'est la notion de quasi-périodicité (périodicité à une constante multiplicative près) du développement en fraction continue de la fonction f qui est essentielle ici. Dans le cas où le développement est quasi-périodique, on sait [6] que cette propriété est équivalente au fait que l'anneau des stabilisateurs du $\mathbb{Q}[X]$ -module $\mathcal{M}_X := \mathbb{Q}[X] + f\mathbb{Q}[X]$ admet une unité non triviale; si on note par \mathcal{E} une unité fondamentale du groupe des unités de norme ± 1 de cet anneau, on a alors la généralisation du théorème de A. Schinzel.

1. Si le développement en fraction continue formel de $f(X)$ n'est pas quasi-périodique alors la longueur de la période du nombre quadratique réel $f(n)$ tend vers l'infini avec n , $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$.

2. Si le développement en fraction continue formel de $f(X)$ est quasi-périodique alors notons par $\mathcal{E}(X)$ l'unité fondamentale du groupe des unités de norme ± 1 de l'anneau des stabilisateurs du module \mathcal{M}_X , et par E l'ensemble des entiers de $\tilde{\mathbb{Z}}$ tels que $\mathcal{E}(n)$ soit une unité du corps quadratique réel $\mathbb{Q}(\sqrt{F(n)})$. On a :

- (i) $\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in E}} \text{lp} f(n) < \infty$,
- (ii) $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \tilde{\mathbb{Z}} \setminus E}} \text{lp} f(n) = \infty$.

II. Fraction continue formelle de $f(X)$

A. Développement en fraction continue formelle de $f(X) \in K_X \setminus \mathbb{Q}(X)$.
 On considère f comme un élément de $\mathbb{Q}((1/X))$ et on pose $f = E(f) + 1/f_1$ avec $E(f) \in \mathbb{Q}[X]$ et $f_1 \in \mathbb{Q}((1/X))$, $|f_1| > 1$, où $|f_1| = e^{\deg f_1}$, $\deg f_1 = m_0$ si $f_1 = \sum_{m=m_0}^{\infty} c_m X^{-m}$, $c_{m_0} \neq 0$. De même, on pose pour tout $\nu \geq 0$,

$$f_\nu = E(f_\nu) + \frac{1}{f_{\nu+1}}, \quad E(f_\nu) \in \mathbb{Q}[X], \quad |f_{\nu+1}| > 1.$$

On obtient alors ce qu'on appelle le développement en fraction continue formelle de $f(X)$. On peut alors définir la suite des réduites $(P_\nu/Q_\nu)_{\nu \geq 0}$ du développement.

Les polynômes P_ν et Q_ν sont définis par les égalités

$$\begin{aligned} P_{-2} &= 0, & P_{-1} &= 1, & P_\nu &= E(f_\nu)P_{\nu-1} + P_{\nu-2}, & \nu &\geq 0, \\ Q_{-2} &= 1, & Q_{-1} &= 0, & Q_\nu &= E(f_\nu)Q_{\nu-1} + Q_{\nu-2}, & \nu &\geq 0. \end{aligned}$$

On a

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} P_\nu/Q_\nu = f,$$

on peut donc écrire

$$f = [E(f), E(f_1), \dots, E(f_\nu), \dots]$$

où $E(f_\nu) \in \mathbb{Q}[X]$ et $\deg E(f_\nu) \geq 1$, pour tout $\nu \geq 1$.

B. Caractérisation des éléments $f \in K_X \setminus \mathbb{Q}(X)$ périodique (resp. quasi-périodique). Considérons la fraction continue formelle de f :

$$f(X) = [u_0(X), u_1(X), \dots], \quad u_i \in \mathbb{Q}[X], \quad \deg u_i \geq 1, \quad i \geq 1.$$

On sait qu'il est infini car $f \notin \mathbb{Q}(X)$. On a $f_i = [u_i(X), u_{i+1}(X), \dots] \in K_X$, $i \geq 0$. Nous pouvons alors définir un développement périodique et un développement quasi-périodique (voir [1], [2], [6]) :

DÉFINITIONS (périodicité et quasi-périodicité). Soit $f \in K_X \setminus \mathbb{Q}(X)$. Le développement en fraction continue de f est dit *périodique* (resp. *quasi-périodique*) s'il existe deux entiers $i \geq 0$, $\pi \geq 1$ tels que pour tout entier $j \geq i$ on a $f_{j+\pi} = f_j$ (resp. pour tout entier $j \geq i$ il existe un rationnel non nul c_j tel que $f_{j+\pi} = c_j f_j$).

Remarques. 1. Si f est quasi-périodique alors on peut définir la quasi-période $\pi^*(f)$ comme étant le plus petit entier ≥ 1 vérifiant la propriété. Il est alors facile de voir que si $\pi^*(f)$ est pair l'ensemble des constantes c_j se réduit à l'ensemble $\{c^{-1}, c\}$ pour un certain $c \in \mathbb{Q}^*$. Nous dirons dans ce cas que c (ou c^{-1}) est la *constante attachée au développement de f* .

2. L'exemple

$$f := \frac{4X^2 + 1 + \sqrt{16X^4 + 24X^2 + 1}}{8X} = [c_0X, c_1X, \dots],$$

où

$$c_i = \begin{cases} 2^{i/2} & \text{pour } i \text{ pair,} \\ 2^{(3-i)/2} & \text{pour } i \text{ impair,} \end{cases}$$

montre qu'il existe des fonctions quasi-périodiques qui ne sont pas périodiques.

Pour caractériser ces développements nous allons introduire quelques objets et notations.

Considérons le $\mathbb{Q}[X]$ -module $\mathcal{M}_f = \mathbb{Q}[X] + f\mathbb{Q}[X]$ et son anneau des stabilisateurs $\mathcal{O}_f = \{\gamma \in K_X : \gamma\mathcal{M}_f \subset \mathcal{M}_f\}$. On sait que c'est un $\mathbb{Q}[X]$ -module de rang 2 et qu'il est inclus dans l'anneau des $\mathbb{Q}[X]$ -entiers de K_X . L'anneau des $\mathbb{Q}[X]$ -entiers est $\mathbb{Q}[X, \sqrt{F}]$ car F n'a pas de racine multiple. Notons \mathcal{U}_f le groupe des unités de \mathcal{O}_f . On a évidemment $\mathbb{Q}^* \subset \mathcal{U}_f$. Enfin, $\mathcal{U}_f^{(1)}$ désignera le sous-groupe des unités de \mathcal{O}_f de norme ± 1 .

On a l'injection canonique

$$\mathcal{U}_f^{(1)} / \{-1, 1\} \hookrightarrow \mathcal{U}_f / \mathbb{Q}^*.$$

On pose

$$G_f = \mathcal{U}_f / \mathbb{Q}^*, \quad G_f^{(1)} = \mathcal{U}_f^{(1)} / \{-1, 1\}.$$

La caractérisation que nous donnons ici résulte de nombreux travaux anciens ou plus récents (voir [1], [2], [5], [6]).

THÉORÈME 2. *Soit $f \in K_X \setminus \mathbb{Q}(X)$. La fonction f est quasi-périodique si et seulement si $\mathbb{Q}^* \subsetneq \mathcal{U}_f$. La fonction f est périodique si et seulement si, soit f est quasi-périodique et $\pi^*(f)$ est impair, soit f est quasi-périodique, $\pi^*(f)$ est pair et la constante $c \in \mathbb{Q}^*$ attachée au développement est ± 1 .*

EXEMPLES. 1. Soit $f = (L + \sqrt{F})/M$, $L, M \in \mathbb{Q}[X]$, $M \neq 0$ et $M \mid L^2 - F$. On a dans ce cas $\mathcal{O}_f = \mathbb{Q}[X, \sqrt{F}]$ et donc les équivalences suivantes (voir Berry [2]) :

$$\begin{aligned} f \text{ est quasi-périodique} &\Leftrightarrow \mathbb{Q}^* \subsetneq \mathcal{U}_f = \mathcal{U}_{\sqrt{F}} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{F} \text{ est quasi-périodique} \\ &\Leftrightarrow \sqrt{F} \text{ est périodique.} \end{aligned}$$

2. Soit $f = (X - \alpha)\sqrt{X^2 + h}$, $h \neq 0$. On a ici $\mathcal{O}_f = \mathbb{Q}[X] + f\mathbb{Q}[X]$ et le résultat suivant (voir A. Schinzel [11]) :

$$f \text{ quasi-périodique} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } h = -\frac{4}{3}\alpha^2, 2\alpha^2 \text{ ou } 4\alpha^2.$$

III. Spécialisation

Notation. Soit $f \in K_X \setminus \mathbb{Q}(X)$. Désignons par $\text{LQP}(f)$ la longueur de la plus courte quasi-période de f si f est quasi-périodique et l'infini sinon.

On désigne par $\tilde{\mathbb{Z}}$ l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $F(n)$ soit positif et non carré parfait, et par K_n le corps quadratique réel $\mathbb{Q}(\sqrt{F(n)})$ pour $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$.

Enfin, on désigne par $\text{lp } f(n)$ la longueur de la période du développement en fraction continue de $f(n)$.

On a alors que la nature formelle du développement influence fortement le développement en fraction continue du quadratique réel $f(n)$ (si celui-ci est défini).

THÉOREME 3 (théorème principal). 1. Si $\text{LPQ}(f) = \infty$ alors

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in \mathbb{Z}}} \text{lp } f(n) = \infty.$$

2. Si $\text{LPQ}(f) < \infty$.

Désignons par $\mathcal{E}(X)$ l'unité fondamentale du sous-groupe des unités de norme ± 1 de \mathcal{O}_f , et par E l'ensemble des entiers $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$ tels que $\mathcal{E}(n)$ soit un entier du corps quadratique réel $\mathbb{Q}(\sqrt{F(n)})$. Alors on a :

- (i) $\overline{\lim}_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \in E}} \text{lp } f(n) < \infty$,
- (ii) $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ n \notin E}} \text{lp } f(n) = \infty$.

IV. Points extrémaux et faces d'un module

Notations. Soit $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$.

- \mathcal{M}_X (resp. \mathcal{M}_n) désigne le $\mathbb{Q}[X]$ - (resp. \mathbb{Z} -) module $\mathbb{Q}[X] + f(X)\mathbb{Q}[X]$ (resp. $\mathbb{Z} + f(n)\mathbb{Z}$).
- \mathcal{O}_X (resp. \mathcal{O}_n) désigne l'anneau des stabilisateurs du module \mathcal{M}_X (resp. \mathcal{M}_n).
- \mathcal{U}_X (resp. \mathcal{U}_n) désigne le groupe des unités modulo \mathbb{Q}^* (resp. modulo ± 1) de l'anneau \mathcal{O}_X (resp. \mathcal{O}_n).
- $\mathcal{U}_X^{(1)}$ désigne le groupe des unités de norme ± 1 de l'anneau \mathcal{O}_X ; ces unités sont définies au signe près.
- On note par $|\cdot|_1$ et $|\cdot|_2$ les deux valeurs absolues définies sur K_X prolongeant la valeur absolue à l'infini définie sur $\mathbb{Q}(X)$ par $|P| = e^{\deg P}$ si $P \in \mathbb{Q}[X] \setminus \{0\}$.

Si $\alpha(X) \in K_X \setminus \{0\}$ alors $\alpha(X)$ peut s'écrire

$$\alpha(X) = \sum_{m=m_0}^{\infty} c_m X^{-m}, \quad c_{m_0} \neq 0.$$

On pose $|\alpha(X)|_1 = e^{m_0}$ et $|\alpha(X)|_2 = |\bar{\alpha}(X)|_1$ où $\bar{\alpha}$ désigne le conjugué de α dans K_X .

DÉFINITION D'UN POINT EXTRÉMAL. On appelle point *extrémal* du module \mathcal{M}_X (resp. \mathcal{M}_n) un élément φ non nul de \mathcal{M}_X (resp. \mathcal{M}_n) possédant la propriété :

$$\begin{aligned} (\forall \psi \in \mathcal{M}_X \setminus \{0\}, |\psi|_i \leq |\varphi|_i, \forall i = 1, 2) &\Rightarrow (\exists \lambda \in \mathbb{Q}^*, \psi = \lambda\varphi) \\ (\text{resp. } \forall \psi \in \mathcal{M}_n \setminus \{0\}, |\psi|_i \leq |\varphi|_i, \forall i = 1, 2) &\Rightarrow \psi = \pm\varphi. \end{aligned}$$

DÉFINITION D'UNE FACE. On appelle *face du module* \mathcal{M}_X un élément φ non nul de ce module vérifiant

$$(\forall \psi \in \mathcal{M} \setminus \{0\}, |\psi|_i \leq |\varphi|_i, \forall i = 1, 2) \Rightarrow (\exists i, |\psi|_i = |\varphi|_i).$$

On note par \mathcal{E}_X (resp. \mathcal{E}_n) l'ensemble des points extrémaux modulo \mathbb{Q}^* (resp. mod ± 1) de \mathcal{M}_X (resp. \mathcal{M}_n).

Cet ensemble \mathcal{E}_X (resp. \mathcal{E}_n) est muni d'une structure de graphe grâce à la notion de voisinage.

DÉFINITION DE POINTS EXTRÉMAUX VOISINS. Deux points extrémaux φ et ψ du module \mathcal{M}_X (resp. \mathcal{M}_n) sont dits *voisins* si

$$(\forall \pi \in \mathcal{M}_X \text{ (resp. } \mathcal{M}_n), |\pi|_i < \max\{|\psi|_i, |\varphi|_i\}, \forall i = 1, 2) \Rightarrow \pi = 0.$$

La structure de ce graphe est une double chaîne infinie, totalement ordonnée par les valeurs absolues 1 ou 2 :

$$\begin{array}{ccccccccc} \dots & \varphi_{-2} & & \varphi_{-1} & & \varphi_0 & & \varphi_1 & & \varphi_2 & \dots \\ \hline & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot & \\ & \dots > |\varphi_{-2}|_1 > |\varphi_{-1}|_1 > |\varphi_0|_1 > |\varphi_1|_1 > |\varphi_2|_1 > \dots, \\ & \dots < |\varphi_{-2}|_2 < |\varphi_{-1}|_2 < |\varphi_0|_2 < |\varphi_1|_2 < |\varphi_2|_2 < \dots, \end{array}$$

où φ_0 est défini de la façon suivante :

$$|\varphi_0| = \min\{|\varphi|_2 : \varphi \text{ point extrémal et } |\varphi|_2 \geq 1\}.$$

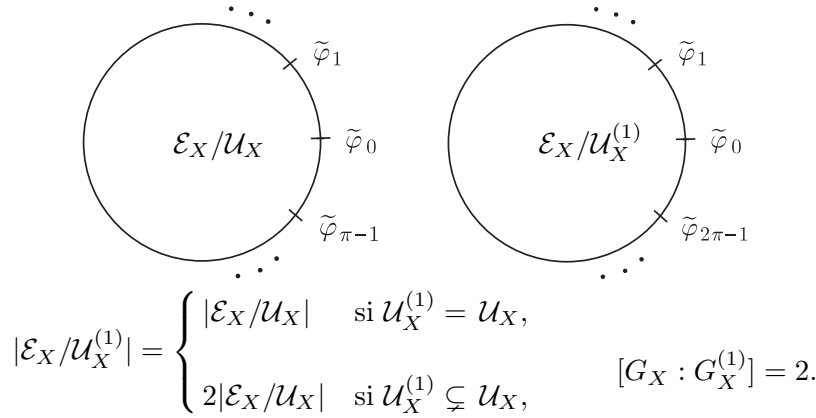
La suite $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ est appelée suite des points extrémaux de \mathcal{M}_X (resp. \mathcal{M}_n) dans la direction $| \cdot |_2$.

On peut définir l'ensemble quotient $\mathcal{E}_X/\mathcal{U}_X$ (resp. $\mathcal{E}_n/\mathcal{U}_n$) et $\mathcal{E}_X/\mathcal{U}_X^{(1)}$ d'une structure de graphe en remarquant que les groupes \mathcal{U}_X (resp. \mathcal{U}_n) et $\mathcal{U}_X^{(1)}$ opèrent sur \mathcal{E}_X (resp. \mathcal{E}_n) et que la notion de voisinage passe au quotient.

Structure de ces graphes quotients

1. Si \mathcal{U}_X est trivial (le groupe des unités est réduit à \mathbb{Q}^*) alors $\mathcal{U}_X^{(1)}$ est aussi trivial et le graphe $\mathcal{E}_X/\mathcal{U}_X$ est le même que celui de \mathcal{E}_X .

2. Si \mathcal{U}_X est non trivial alors $\mathcal{U}_X^{(1)}$ est non trivial et les graphes $\mathcal{E}_X/\mathcal{U}_X$ et $\mathcal{E}_X/\mathcal{U}_X^{(1)}$ sont des cycles qui sont les mêmes si $\mathcal{U}_X^{(1)} = \mathcal{U}_X$ et l'un a le double d'éléments de l'autre si $\mathcal{U}_X^{(1)} \subsetneq \mathcal{U}_X$:



Enfin, le graphe $\mathcal{E}_n/\mathcal{U}_n$ est un cycle.

V. Unités. Points extrémaux. Faces et fraction continue

1. Unités. Points extrémaux et fraction continue

DÉFINITIONS

• Soient $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$ et $f \in K_X$ (resp. $f(n) \in K_n$). On dit que l'élément f est *réduit* s'il vérifie les inégalités

$$|f|_1 > 1 \text{ (resp. } f(n) > 1) \quad \text{et} \quad |f|_2 < 1 \text{ (resp. } -1 < \bar{f}(n) < 0).$$

• Soit $f \in K_X$ (resp. $f(n) \in K_n$). Nous dirons qu'il est *presque réduit* s'il vérifie $|f|_1 > 1$ et $|f|_2 \leq 1$ (resp. $f(n) > 1$ et $\bar{f}(n) < 0$).

Désignons par $(P_k/Q_k)_{k \geq -1}$ (resp. $(\tilde{P}_k/\tilde{Q}_k)$) la suite du développement en fraction continue de f (resp. $f(n)$). On a alors le résultat suivant :

PROPOSITION 1. Soit $f \in K_X$ (resp. $f(n) \in K_n$) un élément presque réduit. Alors :

(i) La suite des points extrémaux $(\varphi_k)_{k \geq 0}$ (resp. $(\tilde{\varphi}_k)_{k \geq 0}$) de \mathcal{M}_X (resp. \mathcal{M}_n) dans la direction $| \cdot |_2$ est donnée par

$$\begin{aligned} \varphi_{k+1} &= P_k - Q_k f, \quad k \geq -1 \\ \text{(resp. } \tilde{\varphi}_{k+1} &= \tilde{P}_k - \tilde{Q}_k f(n), \quad k \geq -1). \end{aligned}$$

(ii) Dans le cas formel, si f admet un développement en fraction continue quasi-périodique de longueur de quasi-période π alors les unités de l'anneau des stabilisateurs du module \mathcal{M}_X dans la direction $| \cdot |_2$ sont données, modulo \mathbb{Q}^* , par

$$\varphi_{k\pi} = P_{k\pi-1} - Q_{k\pi-1} f, \quad k \geq 0.$$

Dans le cas réel si nous désignons par π la longueur de la période du développement en fraction continue de $f(n)$, alors les unités de l'anneau des stabilisateurs sont données, modulo ± 1 , par

$$\varphi_{k\pi} = P_{k\pi-1} - Q_{k\pi-1}f(n), \quad k \geq 0.$$

Preuve. Dans le cas formel elle résulte de la proposition 7 de [6] en remarquant que cette proposition reste vraie si on remplace l'hypothèse “ f réduit” par “ f presque réduit”. Dans le cas réel voir [7], et dans des cas particuliers déjà [9], tome I, théorèmes 3.18 et 3.35. ■

2. Fraction continue régulière de $f(n)$

PROPOSITION 2. Pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, il existe une partition des entiers de \mathbb{Z} en un nombre fini de classes infinies E_1, \dots, E_s telles que pour tout $n \in E_i$, n assez grand, le début du développement en fraction continue de $f(n)$ s'écrit

$$f(n) = \left[b_0(n), \left[\left[\frac{d_0}{j_0} \right] \right], \dots, b_{\nu-1}(n), \left[\left[\frac{d_{\nu-1}}{j_{\nu-1}} \right] \right], \beta_\nu \right]$$

où :

1. $d_l, j_l, 0 \leq l < \nu$, sont des entiers positifs ou nuls indépendant de l'entier n choisi dans la classe E_i .

2. $[[d_l/j_l]]$, $0 \leq j < \nu$, note, si $j_l \neq 0$, le développement en fraction continue du rationnel d_l/j_l de longueur paire (resp. impaire) si $f_l(n)f_{l+1}(n) > 0$ (resp. $f_l(n)f_{l+1}(n) < 0$), et si $j_l = 0$ alors $[[d_l/j_l]]$ note le vide.

3. $\beta_\nu = (|f_\nu(n)| - d_{\nu-1}p_{r_{\nu-1}-1}^{(\nu-1)})/d_{\nu-1}^2$ est plus grand que 1 si n assez grand, où si $j_{\nu-1} \neq 0$ et $[[d_{\nu-1}/j_{\nu-1}]] = [b_1^{(\nu-1)}, \dots, b_{r_\nu}^{(\nu-1)}]$, $p_{r_{\nu-1}-1}^{(\nu-1)}$ est le numérateur du rationnel $[b_1^{(\nu-1)}, \dots, b_{r_{\nu-1}-1}^{(\nu-1)}]$, et si $j_{\nu-1} = 0$, $p_{r_{\nu-1}-1}^{(\nu-1)} = 0$.

4. La fonction β_ν regardée comme une fonction de K_X est presque réduite si ν est assez grand.

5. $b_l(n), 0 \leq l < \nu$, sont des polynômes à coefficients rationnels à valeurs entières de degré supérieur ou égal à 1 si $l \geq 1$.

Preuve. Pour 1-3 et 5 voir [8], mais aussi [11] et [12]. Le point 4 suit du fait que f_ν est réduite si ν est assez grand et de 1. ■

On note par r_l la longueur du développement en fraction continue du rationnel d_l/j_l ($r_l = 0$ si $j_l = 0$) tel qu'il est défini ci-dessus.

On pose

$$i_{-1} = -1, \quad i_l = l + r_0 + r_1 + \dots + r_l, \quad l \geq 0.$$

On désigne par P_l/Q_l (resp. \tilde{P}_l/\tilde{Q}_l) la $l^{\text{ième}}$ réduite de la fraction continue formelle (resp. régulière) de $f(X)$ (resp. $f(n)$).

Enfin, on pose pour $l \geq -1$, $\varphi_{l+1} = P_l - f(X)Q_l$ (resp. $\tilde{\varphi}_{l+1,n} = \tilde{P}_l - f(n)\tilde{Q}_l$).

PROPOSITION 3. Soit f un élément de K_X presque réduit. Pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, il existe une partition de $\tilde{\mathbb{Z}}$ en un nombre fini de classes E_1, \dots, E_s telles que pour tout $n \in E_j$, n assez grand, on ait :

$$(i) P_l(n)/Q_l(n) = \tilde{P}_{i_l}/\tilde{Q}_{i_l}, \quad 0 \leq l < \nu,$$

(ii) les nombres algébriques $\tilde{\varphi}_{i_l}$ avec $0 \leq l < \nu$, sont une spécialisation des ν premiers points extrémaux de \mathcal{M}_X dans la direction $|_2$, plus précisément :

$$\exists \lambda_l^{(j)} \in \mathbb{Q}^*, \quad \tilde{\varphi}_{i_{l+1}} = \lambda_l^{(j)} \varphi_{l+1}(n), \quad -1 \leq l < \nu,$$

(iii) les nombres algébriques $\tilde{\varphi}_k$, $k \neq i_l$, $-1 \leq l < \nu$, sont une spécialisation de fonctions algébriques de K_X qui possèdent la propriété d'être des faces et non des points extrémaux de \mathcal{M}_X .

Preuve. Voir [8]. ■

VI. Anneaux des stabilisateurs des modules \mathcal{M}_X et \mathcal{M}_n

1. Anneaux des stabilisateurs du module \mathcal{M}_X . On a posé $\mathcal{M}_X = \mathbb{Q}[X] + f\mathbb{Q}[X]$ avec $f \in K_X \setminus \mathbb{Q}(X)$, module que l'on notera encore $\langle 1, f \rangle$.

PROPOSITION 4. Soit $f \in K_X \setminus \mathbb{Q}(X)$. Si on écrit f sous la forme

$$f = \frac{A + B\sqrt{F}}{C}, \quad \text{avec } A, B, C \in \mathbb{Q}[X], B \neq 0, C \neq 0$$

et les polynômes A, B et C premiers entre eux, et posons

$$C'' = \text{pgcd}(C^2, AC, A^2 - B^2F), \\ C = C''C', \quad C' \in \mathbb{Q}[X], \quad \Delta = C'B\sqrt{F},$$

alors l'anneau des stabilisateurs est

$$\mathcal{O}_X = \langle 1, CC'f \rangle = \langle 1, C'B\sqrt{F} \rangle = \langle 1, \Delta \rangle \quad \blacksquare$$

Preuve. Voir [3], p. 152. ■

2. Anneaux des stabilisateurs des modules \mathcal{M}_n , $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$. Avec les notations ci-dessus et en supposant que les polynômes A, B, C et C' sont à coefficients entiers ce que l'on peut faire car ceux-ci sont définis à une constante rationnelle non nulle près, on a :

PROPOSITION 5. *Il existe une partition finie de $\tilde{\mathbb{Z}}$ en un nombre fini de classes E_1, \dots, E_s et des entiers d_1, \dots, d_s tels que l'anneau des stabilisateurs du module \mathcal{M}_n soit*

$$\mathcal{O}_n = \left\langle 1, \frac{CC'}{d_i} f(n) \right\rangle = \begin{cases} \langle 1, \Delta_i/2 \rangle & \text{si } \Delta_i^2 \equiv 0 \pmod{4}, \\ \langle 1, (1 + \Delta_i)/2 \rangle & \text{si } \Delta_i^2 \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$$

où $\Delta_i^2 = \Delta^2/d_i^2 = (C'^2 B^2/d_i^2)F(n)$.

Preuve. Voir [3], p. 152. ■

VII. Longueur de la prépériode de $f(n)$. Soit f un nombre quadratique réel. On appelle *longueur de la prépériode* de f le plus petit entier k positif ou nul tel que le quotient complet f_k du développement en fraction continue de f soit réduit (f_k purement périodique). On la note $\text{lap } f$.

PROPOSITION 6. *Si la fonction $f(X)$ est presque réduite alors la longueur de la prépériode du nombre quadratique réel $f(n)$, $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$, est bornée par 3 pour n assez grand.*

Preuve. Rappelons la définition de “ $f(X)$ presque réduit” :

$$f(X) \text{ presque réduit} \Leftrightarrow (|f(X)| > 1 \text{ et } |\bar{f}(X)| \leq 1)$$

où $\bar{f}(X)$ désigne le conjugué de $f(X)$.

La première inégalité équivaut à l'inégalité $m_0 \leq -1$, si $f(X) = c_{m_0} X^{-m_0} + \dots$; et donc $|f(n)| > 1$ si on prend n assez grand. De la même façon, la deuxième inégalité $|\bar{f}(X)| \leq 1$ entraîne que $|\bar{f}(n)| < C$ où $C > 0$ est indépendant de n .

1. Supposons $f(n) > 1$ pour n assez grand et montrons que $\text{lap } f(n) \leq 2$ pour n assez grand. En effet, il existe une partition finie E_1, \dots, E_s de $\tilde{\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in E_i$,

$$f(n) = a_0(n) + 1/\alpha_1, \quad \alpha_1 > 1,$$

où $a_0(n)$ est un polynôme de degré strictement positif. On a alors

$$\bar{f}_1 = \frac{1}{\bar{f}(n) - a_0}$$

et comme $a_0(n) \geq C$ pour n assez grand (car $f(n) > 1$) et $|\bar{f}(n)| < C$, on en déduit que $\bar{\alpha}_1 < 0$. On voit alors que le deuxième quotient complet α_2 de $f(n)$, vérifie

$$\alpha_2 > 1 \quad \text{et} \quad -1 < \bar{\alpha}_2 < 0.$$

2. Supposons maintenant $f(n) < -1$ pour n assez grand et montrons que dans ce cas $\text{lap } f(n) \leq 3$, pour n assez grand. On a $-f(n) > 1$ et donc d'après la première partie $\text{lap}(-f(n)) \leq 2$, pour n assez grand. Or, $-f(n) =$

$b_0 + 1/\beta_1$, $\beta_1 > 1$, soit $f(n) = -b_0 - 1 + 1 - 1/\beta_1$ d'où si $f(n) = a_0 + 1/\alpha_1$, $\alpha_1 > 1$, on a

$$\alpha_1 = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} = 1 + \frac{1}{\beta_1 - 1}$$

et donc $\alpha_2 = \beta_1 - 1 = b_1 - 1 + 1/\beta_2$, $\beta_2 > 1$.

- Si $b_1 \geq 2$ alors $\alpha_3 = \beta_2$ et donc $\text{lap } f(n) \leq 3$.
- Si $b_1 = 1$ alors $0 < \beta_1 - 1 < 1$ et $\beta_1 - 1 = 1/\beta_2$, d'où

$$\alpha_1 = 1 + \beta_2 = 1 + b_2 + 1/\beta_3.$$

Donc $\alpha_2 = \beta_3$ et $\text{lap } f(n) \leq 2$. ■

PROPOSITION 7. *Soit $f \in K_X$. La longueur de la prépériode du nombre quadratique réel $f(n)$ est bornée indépendamment de l'entier n , $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$.*

Preuve. Il résulte de la proposition 2 et de la proposition précédente qu'il existe un entier k et une partition des entiers de $\tilde{\mathbb{Z}}$ en un nombre fini de classes infinies E_1, \dots, E_s telles que pour tout $n \in E_i$ assez grand, on a

$$\text{lap } f(n) \leq \sum_{i=0}^{k-1} (L(d_i/j_i) + 1) + 3,$$

où les entiers d_i, j_i sont ceux de la proposition 2 et sont donc indépendants de l'entier n choisi dans la classe E_i , et $L(d_i/j_i) = r_i$ est la longueur du développement en fraction continue du rationnel d_i/j_i tel qu'il est défini dans la proposition 2, si $j_i \neq 0$, et 0 sinon. ■

VIII. Deux lemmes utiles

LEMME 1. *Soit P/Q une fraction rationnelle à coefficients rationnels telle que $P(n)/Q(n)$ soit entier pour une infinité d'entiers n . Alors le polynôme Q divise le polynôme P .*

L'énoncé et la preuve de ce lemme se trouvent dans [10], chapitre VIII, problème 93.

LEMME 2. *Soit φ un élément non nul du module \mathcal{M}_X qui n'est pas une unité formelle de \mathcal{O}_X . Alors $\varphi(n)$ n'est pas une unité de \mathcal{O}_n pour tout entier $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$ sauf peut être pour un nombre fini d'entre eux.*

Preuve. Posons

$$(2) \quad \varphi = U + Vf \quad \text{avec } U, V \in \mathbb{Q}[X].$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que pour une infinité d'entiers n de $\tilde{\mathbb{Z}}$, on a $\varphi(n)$ unité de \mathcal{O}_n . On en déduit alors, d'après la proposition 5, que $\varphi(n)$ peut s'écrire sous la forme

$$\varphi(n) = u_n + v_n \frac{CC'}{d} f(n)$$

où d_i est un entier, $CC' \in \mathbb{Q}[X]$, $u_n, v_n \in \mathbb{Z}$, et ceci pour une infinité de n dans $\tilde{\mathbb{Z}}$. Cette égalité peut encore s'écrire

$$(3) \quad \varphi(n) = u_n + v_n C' \frac{A + B\sqrt{F(n)}}{d}.$$

En comparant (2) et (3), on obtient

$$\frac{V(n)B(n)}{C(n)} = \frac{C'(n)B(n)}{d_i} v_n,$$

d'où

$$v_n = \frac{V}{CC'} d \in \mathbb{Q}(X) \quad \text{et} \quad \frac{V(n)}{C(n)C'(n)} d \in \mathbb{Z}$$

pour une infinité de n . D'après le lemme 1 on en déduit que le polynôme CC' divise le polynôme V et que donc $v_n \in \mathbb{Q}[X]$. On a aussi, en comparant (2) et (3)

$$U(n) + V(n) \frac{A(n)}{C(n)} = u_n + \frac{CC'}{d} A v_n,$$

d'où

$$u_n = U + V \frac{A}{C} - \frac{CC'}{d} A v_n$$

et donc $dV(n)A(n)/C(n)$ est un entier pour une infinité de n . On en déduit d'après le lemme 1 que le polynôme C divise le polynôme VA . Finalement, on a montré qu'il existe deux polynômes S et T à coefficients rationnels tels que

$$u_n = S(n), \quad v_n = T(n)$$

pour une infinité d'entiers n de $\tilde{\mathbb{Z}}$. On peut donc écrire φ sous la forme

$$\varphi = S_1 + T_1 C' B \sqrt{F}, \quad S_1, T_1 \in \mathbb{Q}[X],$$

ce qui montre que $\varphi \in \mathcal{O}_X$ et comme on a aussi

$$N\varphi = S_1^2 - T_1^2 C'^2 B^2 F = \pm 1$$

pour une infinité de n dans $\tilde{\mathbb{Z}}$ on en déduit que φ est une unité de \mathcal{O}_X , ce qui est exclu par hypothèse. ■


IX. Unités relatives. Nous rappelons ici un résultat sur l'indice du sous-groupe des unités d'un ordre relativement au groupe des unités d'un autre ordre le contenant.

On considère un ordre \mathcal{O} d'un corps quadratique réel. On peut l'écrire $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\varrho]$ où $\varrho = \sqrt{d}$ ou $\varrho = (1 + \sqrt{d})/2$ avec d entier non carré parfait.

Soit f un entier. Posons $\nu(f) = [G : G_f]$ où G (resp. G_f) désigne le groupe des unités de l'ordre \mathcal{O} (resp. $\mathcal{O}_f = \mathbb{Z}[f\varrho]$).

PROPOSITION 8 (H. Cohen [4]). (i) Si f et g sont deux entiers premiers entre eux, on a l'égalité $\nu(fg) = \text{ppcm}(\nu(f), \nu(g))$.

(ii) Si f est un nombre premier supérieur ou égal à 3 et soit α un entier supérieur ou égal à 1. Alors $\nu(f^\alpha)$ divise les nombres du tableau suivant :

		$\left(\frac{d}{f}\right) = 0$	$\left(\frac{d}{f}\right) = 1$	$\left(\frac{d}{f}\right) = -1$
π pair		f^α	$\frac{f-1}{2} f^{\alpha-1}$	$\frac{f+1}{2} f^{\alpha-1}$
π impair	$f \equiv 1 \pmod{4}$	f^α	$\frac{f-1}{2} f^{\alpha-1}$	$\frac{f+1}{2} f^{\alpha-1}$
	$f \not\equiv 1 \pmod{4}$		$(f-1)f^{\alpha-1}$	$(f+1)f^{\alpha-1}$

où on désigne par π la longueur de la période du développement en fraction continue de ϱ et par $\left(\frac{d}{f}\right)$ le symbole de Legendre.

(iii) Si $f = 2$ alors $\nu(2^\alpha)$ divise 2^α , sauf si $\varrho = (1 + \sqrt{d})/2$ et $d \equiv 5 \pmod{8}$ auquel cas $\nu(2^\alpha)$ divise $3 \cdot 2^{\alpha-1}$.

COROLLAIRE. On a la majoration de l'indice

$$\nu(f) \leq (3/2)^\gamma f$$

où γ désigne le nombre de facteurs premiers distincts de f .

X. Preuve du théorème 3. D'après la proposition 2, on peut supposer f presque réduit.

1. Le développement de $f(X)$ n'étant pas quasi-périodique, on sait d'après le théorème 2 que $\mathcal{U}_X = \mathbb{Q}^*$.

Considérons maintenant le développement en fraction continue de $f(n)$, $n \in \tilde{\mathbb{Z}}$. La proposition 3 nous permet d'énoncer que pour tout $\nu \in \mathbb{N}^*$, il existe une partition finie $(E_i)_{1 \leq i \leq s}$ de $\tilde{\mathbb{Z}}$ telle que pour tout $n \in E_i$ assez grand, les $i_{\nu-1}$ premiers points extrémaux $\tilde{\varphi}_k^{(i)}$ ($1 \leq k \leq i_{\nu-1}$) de \mathcal{M}_n sont la spécialisation de fonctions algébriques qui sont, soit des points extrémaux, soit des faces de \mathcal{M}_X et ceux-ci ne sont pas des unités formelles de \mathcal{O}_X car $\mathcal{U}_X = \mathbb{Q}^*$. On a donc

$$\forall n \in E_i, \quad \tilde{\varphi}_k^{(i)} = \varphi_k^{(i)}(n),$$

où $\varphi_k^{(i)}$ est une fonction algébrique qui n'est pas une unité.

D'après le lemme 2, ces nombres quadratiques ne sont pas des unités quadratiques du corps $\mathbb{Q}(\Delta(n))$, si n est assez grand, $n \in E_i$, et ils ne sont pas non plus congrus modulo les unités de \mathcal{O}_n car 1 est un point extrémal de \mathcal{M}_n ($\tilde{\varphi}_0^{(i)} = 1$, voir proposition 3). On a donc

$$\text{lp } f(n) \geq i_{\nu-1} - 3 \geq \nu - 4,$$

d'après la proposition 1 et la proposition 6.

2. Soit $\mathcal{E}(X)$ l'unité formelle de norme ± 1 dans la direction $| \ |_2$. D'après la proposition 4, on peut l'écrire

$$\mathcal{E}(X) = T(X) + U(X)\Delta(X)$$

avec T et $U \in \mathbb{Q}[X]$. Posons $U = U^*/m$, où $U^* \in \mathbb{Z}[X]$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Soit $n \in E_i \cap E$. On a

$$\mathcal{E}(n) = T(n) + \frac{U^*(n)d_i}{m} \Delta_i(n)$$

en tenant compte de l'égalité $\Delta(n) = d_i \Delta_i(n)$ (voir proposition 5 pour la définition de d_i et Δ_i).

Posons $\Delta_i^2(n) = \delta_n^2 \tilde{\Delta}_{i,n}^2$, avec $\delta_n \in \mathbb{N}$ et $\tilde{\Delta}_{i,n}^2$ entier sans facteur carré.

A. Supposons $\tilde{\Delta}_{i,n}^2 \not\equiv 1 \pmod{4}$. Par hypothèse, on sait que $\mathcal{E}(n)$ est une unité du corps quadratique $\mathbb{Q}(\Delta(n))$ et donc $U^*(n)d_i\delta_n/m$ est un entier. Soit m'_n le p.g.c.d. de $U^*(n)d_i$ et de m . Posons $m''_n = m/m'_n$; alors m''_n divise δ_n . Posons encore $\delta''_n = \delta_n/m''_n \in \mathbb{Z}$.

L'anneau des stabilisateurs du module \mathcal{M}_n est d'après la proposition 5, $\mathbb{Z}[\Delta_i/2]$ ou $\mathbb{Z}[(1 + \Delta_i)/2]$. Dans les deux cas, l'anneau $\mathbb{Z}[\Delta_i]$ est inclus dans cet anneau de stabilisateurs. L'unité $\mathcal{E}(n)$ est par hypothèse dans $\mathbb{Z}[\tilde{\Delta}_i]$ (elle est en fait dans un anneau plus petit $\mathbb{Z}[\delta''_n, \tilde{\Delta}_i]$), elle n'est donc pas a priori dans l'anneau $\mathbb{Z}[\Delta_i]$ ($\Delta_i = \delta_n \tilde{\Delta}_i$).

Cependant, si nous notons G (resp. G') le groupe des unités de l'anneau $\mathbb{Z}[\Delta_i]$ (resp. $\mathbb{Z}[\delta''_n \tilde{\Delta}_i]$), alors $\mathcal{E}^\nu \in \mathbb{Z}[\Delta_i]$ si ν désigne l'indice de G dans G' . Or cet indice ν est borné indépendamment de $n \in E_i \cap E$. En effet, d'après le corollaire de la proposition 8, on a

$$\nu = \nu(m''_n) \leq (3/2)^{\gamma''} m''_n \leq (3/2)^\gamma m$$

où γ'' (resp. γ) désigne le nombre de facteurs premiers de m''_n (resp. m). D'après les propositions 1 et 2, on en déduit que la période du nombre quadratique $f(n)$, $n \in E_i \cap E$, est bornée par

$$\text{lp } f(n) \leq \sum_{i=0}^{(\pi-1)[(3/2)^\gamma m]} (L(d_i/j_i) + 1)$$

où π est l'entier tel que $\mathcal{E} = P_{\pi-1} - Q_{\pi-1}f$ (π est la longueur de la quasi-période ou son double, du développement en fraction continue formel de f).

B. Supposons $\tilde{\Delta}_i \equiv 1 \pmod{4}$. On écrit dans ce cas $\mathcal{E}(n)$ sous la forme

$$\mathcal{E}(n) = T(n) - \frac{U^*(n)d_i\delta_n}{m} + \frac{2U^*(n)d_i\delta_n}{m} \left(\frac{1 + \tilde{\Delta}_i}{2} \right),$$

ce qui permet d'en conclure que $2U^*(n)d_i\delta_n/m$ est un entier. On pose

$$m'_n = (2U^*(n)d_i, m), \quad m''_n = \frac{m}{m'_n}, \quad \delta''_n = \frac{\delta_n}{m''_n}.$$

L'anneau des stabilisateurs du module \mathcal{M}_n est, d'après la proposition 5, $\mathbb{Z}[\Delta_i/2]$ ou $\mathbb{Z}[(1 + \Delta_i)/2]$. Dans les deux cas, l'anneau $\mathbb{Z}[\Delta_i]$ est inclus dans l'anneau des stabilisateurs et donc si $\mathcal{E}^\nu \in \mathbb{Z}[\Delta_i]$, on pourra avoir un renseignement sur la longueur de la période de $f(n)$. Plus précisément, avec les notations du paragraphe IX, si on prend $\nu = \nu(2m''_n)$ alors $\mathcal{E}^\nu \in \mathbb{Z}[\Delta_i]$ or $\nu(2m''_n) \leq 2(3/2)^{\gamma''} m''_n \leq 2(3/2)^\gamma m$ (corollaire de la proposition 8), d'où

$$\text{lp } f(n) \leq \sum_{i=0}^{(\pi-1)[(3/2)^\gamma 2m]} (L(d_i/j_i) + 1), \quad \forall n \in E_i \cap E,$$

où π est l'entier tel que $\mathcal{E} = P_{\pi-1} - Q_{\pi-1}f$. Ceci finit la preuve de (i).

Montrons maintenant (ii). Soit $n \in \tilde{\mathbb{Z}} - E$. Comme au point 1, les $k(\pi-1)$ -premiers points extrémaux du module $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}f(n)$ ne sont pas des unités du corps quadratique $\mathbb{Q}(\Delta_n)$ (et donc ne sont pas des unités de l'anneau des stabilisateurs de ce module) pour n assez grand sauf peut-être ceux d'indice $l(\pi-1)$, pour l compris entre 1 et k . Montrons qu'il en est de même pour celles-ci. En effet, supposons le contraire : Si $\varphi_{l(\pi-1)}(n)$ était une unité du corps quadratique pour un l avec $1 \leq l \leq k$ alors on en déduirait que $\varphi_{\pi-1}(n)$ en serait une, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur n . Par suite, $\text{lp } \alpha(n) \geq k(\pi-1)$.

Références

- [1] W. W. Adams and M. J. Razar, *Multiples of points on elliptic curves and continued fractions*, Proc. London Math. Soc. 41 (1980), 481–498.
- [2] T. G. Berry, *On periodicity of continued fractions in hyperelliptic function fields*, Arch. Math. (Basel) 55 (1990), 259–266.
- [3] Z. I. Borevitch et I. R. Chafarevitch, *Théorie des nombres*, Gauthier-Villars, 1967.
- [4] H. Cohen, *Multiplication par un entier d'une fraction continue périodique*, Acta Arith. 26 (1974), 129–148.
- [5] Y. Hellegouarch, D. L. McQuillan et R. Paysant-Le Roux, *Unités de certains sous-anneaux des corps de fonctions algébriques*, ibid. 48 (1987), 9–47.
- [6] R. Paysant-Le Roux, *Périodicité des fractions continues dans un corps de fonctions hyperelliptiques*, Arch. Math. (Basel) 61 (1993), 46–58.
- [7] —, *Calibre d'un corps arithmétique. Unités*, Thèse, 1987.
- [8] R. Paysant-Le Roux, Y. Hellegouarch et M. L. Gaunet, *Sur certaines fractions continues non standard*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 316 (1993), 763–768.
- [9] O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, dritte Auflage, Stuttgart, 1954.
- [10] G. Pólya und G. Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*, II Band, Springer, 1964.

- [11] A. Schinzel, *On some problems of the arithmetical theory of continued fractions*, I, Acta Arith. 6 (1961), 393–413; II, ibid. 7 (1962), 287–298; Corrigendum, ibid. 47 (1986), 295.
- [12] H. Schmidt, *Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen*, Math. Z. 52 (1950), 168–192.

U.F.R. SCIENCE
UNIVERSITÉ DE CAEN
ESPLANADE DE LA PAIX
14000 CAEN CEDEX, FRANCE

Reçu le 15.11.1993

(2519)