ACTA ARITHMETICA
LXVIII.2 (1994)

Modifications de nombres normaux par des transducteurs

par

JEAN MARIE DUMONT et ALAIN THOMAS (Marseille)

0. Introduction. Soit un entier $r \geq 2$ et soit une suite d'entiers positifs $s = (n_j)_{j\geq 1}$. Chaque n_j a un développement en base r

$$n_j =_r a_{jl_j} \ldots a_{j1} = \sum_{i=1}^{l_j} a_{ji} r^{i-1} \qquad (\text{avec } a_{jl_j} \neq 0).$$

On notera

$$\theta_s =_r 0.n_1 n_2 n_3 \ldots$$

le réel qui a pour développement en base r

$$\theta_s =_r 0.a_{1l_1} \ldots a_{11} a_{2l_2} \ldots a_{21} \ldots$$

Pour certaines suites s, le réel θ_s est normal en base r, c'est-à-dire la suite $n \to \theta_s r^n$ est équirépartie modulo 1. Par exemple, si $n_j = j$ pour tout j, θ_s est le nombre de Champernowne ([Ch]). Copeland et Erdős ([CE]) démontrent la normalité de θ_s dans le cas où la suite $(n_j)_{j\geq 1}$ est strictement croissante et vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$ et $N \geq N(\varepsilon)$,

$$(1) \qquad \#(\{j : n_j \leq N\}) \geq N^{1-\varepsilon}$$

(autrement dit vérifie, pour tout $\varepsilon > 0$, $n_j = O(j^{1+\varepsilon})$). Par exemple, si $(n_j)_{j\geq 1}$ est la suite des nombres premiers, elle vérifie cette condition.

Supposons maintenant que n_j est la partie entière de $P(j)$, où $P(X)$ est un polynôme non constant ou un polynôme généralisé (c'est-à-dire les exposants de X sont des réels positifs). Alors la condition (1), ou la condition $(n_j)_{j\geq 1}$ strictement croissante, n'est pas vérifiée suivant que le degré de $P(X)$ est supérieur 1 ou inférieur à 1. Mais θ_s est encore normal d'après les articles de Nakaï–Shiokawa ([NS1], [NS2], [NS3]).

De plus, Schiffer [Sc] donne une estimation de la discrépance de la suite $n \to \theta_s r^n$ dans les deux cas suivants : n_j est la partie entière de $P(j)$, $P(X)$ polynôme non constant à coefficients rationnels, ou bien n_j est la partie entière de $f(j)$, f application de $[1, \infty[$ dans $[1, \infty[$ telle que $f(x)$ soit de l'ordre de x^δ, $0 < \delta \leq 1$, $f'(x)$ de l'ordre de $x^{\delta-1}$ et $|f''(x)| = O(x^{\delta-2})$ quand

$x \to \infty$. D'où la normalité de θ_s dans d'autres cas que le cas polynômial, par exemple pour $f(x) = x^\delta + \log x$.

Szüsz et Volkmann ([SV]) démontrent, par une méthode probabiliste, que θ_s est normal s'il existe un polynôme non constant $P(X)$ à coefficients entiers et une suite strictement croissante $(n'_j)_{j\ge 1}$ vérifiant la condition (1), tels que $n_j = P(n'_j)$. L'article de Grabner ([G]) est une généralisation au cas d'une base non entière; voir aussi l'article de Bertrand-Mathis et Volkmann ([BV]).

Volkmann nous a posé la question de savoir si la normalité de θ_s est conservée quand on remplace chaque n_j par $\lambda_j n_j$, où les λ_j sont des entiers positifs vérifiant une condition de croissance maximale. Nous montrons ici (paragraphe 4) que c'est le cas pour les nombres θ_s des articles de Nakaï–Shiokawa, avec la condition

$$\lambda_j = O((\log j)^\varepsilon) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Ceci est dû au fait qu'à chaque occurrence d'un bloc b dans le développement en base r de $\lambda_j n_j$, il y a au plus λ_j possibilités pour le bloc de chiffres situé au même emplacement, dans le développement de n_j. Plus généralement, étant donné une suite s et une famille de transducteurs $(\mathcal{T}_j)_{j\ge 1}$ vérifiant certaines conditions (voir paragraphe 3), la normalité de θ_s est conservée quand chaque n_j est remplacé par (n'_j), où (n'_j) se déduit de (n_j) au moyen du transducteur $\mathcal{T}_j$.

Pour pouvoir appliquer ce résultat général de modification des nombres normaux aux nombres de Nakaï–Shiokawa, il est nécessaire d'avoir une estimation de la discrépance de la suite $n \to \theta_s r^n$. Pour tout réel θ, la discrépance de la suite $n \to \theta r^n$ est définie par

$$D(\theta, n) = \sup_{I \subseteq [0,1[} \left| \frac{1}{n} N(\theta, I, n) - (\beta - \alpha) \right|,$$

où, pour tout intervalle $I = [\alpha, \beta[$, $N(\theta, I, n)$ est égal à $\#(\{i \le n : \theta r^i \in I \bmod 1\})$. Remarquons que les trois articles de Nakaï–Shiokawa (contrairement à celui de Schiffer) ne permettent pas de majorer la discrépance, car dans leur estimation

$$\left| \frac{1}{n} N(\theta, I, n) - r^{-l} \right| \le C_l \frac{1}{\log n}$$

pour tout intervalle I de la forme $[k/r^l, (k+1)/r^l[$, k et l entiers, la constante C_l dépend de l. Nous reprenons donc, au paragraphe 2, les idées des articles de Nakaï–Shiokawa et de Schiffer de manière à majorer cette discrépance. D'autre part nous ne savons pas si elle est en $O(1/\log n)$ comme dans les cas traités par Schiffer.

Remarquons qu'il n'est pas possible de répondre à la question de Volkmann dans le cas général d'une suite d'entiers positifs s quelconque, telle que θ_s soit normale, sans faire d'hypothèse sur la discrépance de la suite $n \to \theta_s r^n$. La remarque 4 à la fin de l'article prouve qu'il existe une suite d'entiers positifs $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ de croissance arbitrairement lente, et un nombre normal $\theta =_r 0.n_1n_2n_3\ldots$ tel que le nombre $\theta' =_r 0.(\lambda_1 n_1)(\lambda_2 n_2)(\lambda_3 n_3)\ldots$ ne soit pas normal.

Par contre, il est possible que l'hypothèse (2) ne soit pas la meilleure possible, et puisse être remplacée (dans le cas où n_j est un polynôme en j) par l'hypothèse moins forte

$$\lambda_j = O(j^\varepsilon) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0. \tag{3}$$

N'arrivant pas à le démontrer en utilisant les lemmes de Nakaï–Shiokawa ([NS1]) (pour lesquels il faudrait que $\lambda_j n_j$ soit une fonction $f(j)$ telle qu'une des dérivées successives de f soit de signe constant), nous le démontrons dans le cas particulier $n_j = j^2$ (paragraphe 5) par modification de la démonstration de Besicovitch ([Be]).

D'autre part, la condition (3) est, en un sens, la moins forte possible : Soit $\varepsilon > 0$ et $0.n_1n_2n_3\ldots$ un nombre normal en base r tel que $\lim_{j\to\infty} n_j = \infty$ et $n_j = O(j^\alpha)$, α constante positive. On peut construire une suite d'entiers positifs $(\lambda_j)_{j\geq 1}$ telle que $\lambda_j = O(j^\varepsilon)$, mais le réel $0.(\lambda_1 n_1)(\lambda_2 n_2)(\lambda_3 n_3)\ldots$ ne soit pas normal en base r. Il suffit de poser $\lambda_j = r^{\varepsilon_j}$ où ε_j est la partie entière de $\varepsilon \log_r j$. La fréquence d'occurrence de tout bloc de zéros dans le développement de ce réel est alors au moins égale (en limite supérieure) à $\varepsilon/(\alpha+\varepsilon)$, ce qui prouve qu'il n'est pas normal en base r.

1. Suites (k,ε)-normales. Soit $r \geq 2$ et $\mathcal{A}_r = \{0, 1, \ldots, r-1\}$. On note $N(b,s)$ le nombre d'occurrences d'un bloc b dans une suite s :

$$N(b,s) = \#\{i \leq n-k : \varepsilon_{i+1}\ldots\varepsilon_{i+k} = b\}$$

pour tout $b \in \mathcal{A}_r^k$ et $s = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n \in \mathcal{A}_r^n$.

Définition. Une suite s est dite (k,ε)-*normale au sens de Besicovitch* ([Be]) ($k \geq 1$ entier et $\varepsilon > 0$) si, pour tout bloc $b \in \mathcal{A}_r^k$,

$$|n^{-1}N(b,s) - r^{-k}| < \varepsilon.$$

D'après le lemme de Copeland–Erdős ([CE]), il existe $\delta = \delta(r,k,\varepsilon) < 1$ tel que le nombre de suites $s \in \mathcal{A}_r^n$ non (k,ε)-normales soit inférieur à $r^{n\delta}$ pour n assez grand.

On peut préciser ce lemme en utilisant une inégalité de Bernstein (voir par exemple [R], chapitre 7, théorème 3) : Soit ζ_n la fréquence relative d'un événement A dans une série de n épreuves indépendantes, soient $\eta > 0$ et $0 < \varepsilon \leq p(1-p)$ (où $p \neq 0$ est la probabilité de A) et

$$n \geq \frac{9\log(2/\eta)}{8\varepsilon^2}.$$

Alors $P(|\zeta_n - p| \geq \varepsilon) \leq \eta$.

On obtient le lemme suivant :

LEMME 1. *Si* $\varepsilon \le r^{-k}(1-r^{-k})$, *le nombre de suites* $s \in \mathcal{A}_r^n$ *qui ne sont pas* (k,ε)*-normales est inférieur à* $2kr^{2k}r^{n\delta}$, *avec*

$$\delta = \delta(r,k,\varepsilon) = 1 - \frac{8\varepsilon^2}{9k\log r}.$$

Démonstration. Étant donné un bloc $b \in \mathcal{A}_r^k$, on va d'abord majorer le nombre de suites $s \in \mathcal{A}_r^n$ qui vérifient

$$(1) \qquad |n^{-1}N(b,s) - r^{-k}| \ge \varepsilon.$$

On prolonge chacune de ces suites $s = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$ en une suite $s' = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n+k-1}$ en posant

$$\varepsilon_{n+i} = \begin{cases} 0 & \text{si } b \text{ se termine par la lettre 1} \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \qquad (1 \le i \le k-1).$$

Le nombre d'occurrences du bloc b est alors le même pour les suites s et s'.

Pour tout entier h tel que $0 \le h \le k-1$, on définit la suite $s^h = s_1^h \ldots s_{n_h}^h$ en posant

$$s_1^h = \varepsilon_{h+1} \ldots \varepsilon_{h+k}, \qquad s_2^h = \varepsilon_{h+k+1} \ldots \varepsilon_{h+2k}, \qquad \text{etc.},$$

n_h étant le plus grand entier tel que $h + n_h k \le n + k - 1$; autrement dit,

$$n_h = \#\{m : k \le m \le n+k-1, m \equiv h \bmod k\}.$$

Par conséquent,

$$\sum_{h=0}^{k-1} n_h = n, \qquad N(b,s) - nr^{-k} = \sum_{h=0}^{k-1}(N(b,s^h) - n_h r^{-k}),$$

où $N(b,s^h)$ est le nombre d'occurrences de la lettre b (appartenant à l'alphabet $\mathcal{A}' = \mathcal{A}_r^k$) dans la suite s^h ($s^h \in \mathcal{A}'^{n_h}$). Donc, si (1) est vérifié, il existe h tel que

$$(2) \qquad |N(b,s^h) - n_h r^{-k}| \ge n_h \varepsilon.$$

On note m l'entier n_h, et $r' = \#\mathcal{A}' = r^k$. Puis on applique l'inégalité de Bernstein, où la v.a. ζ_m représente la fréquence d'occurrence d'une lettre $b \in A'$ fixée dans une suite $\sigma \in \mathcal{A}'^m$. P est la probabilité uniforme définie par

$$P(\{a'\}) = r'^{-1} \qquad \text{pour tout } a' \in \mathcal{A}'.$$

On obtient

$$(3) \qquad r'^{-m}\#(\{\sigma : \sigma \in \mathcal{A}'^m,\ |m^{-1}N(b,\sigma) - r'^{-1}| \ge \varepsilon\}) \le \eta$$

avec comme conditions :

$$(4) \qquad \eta > 0, \qquad 0 < \varepsilon \le r'^{-1}(1-r'^{-1}) \qquad \text{et} \qquad m \ge \frac{9}{8\varepsilon^2}\log(2\eta^{-1}).$$

Or pour chaque suite $\sigma \in \mathcal{A}'^m$, il existe r^h suites $s \in \mathcal{A}_r^n$ telles que $s^h = \sigma$. Donc si les conditions (4) sont vérifiées pour tout h (par l'entier $m = n_h$), l'inégalité (3) permet de majorer le nombre de suites s qui vérifient (1) par $\sum_{h=0}^{k-1} r^h \eta r'^{n_h}$.

Comme on a $r^h r'^{n_h} = r^{h+kn_h} \le r^{n+k-1}$, et comme il y a r^k blocs b possibles, on majore le nombre de suites $s \in \mathcal{A}_r^n$ non (k,ε)-normales par $kr^{n+2k-1}\eta$. Pour que les conditions (4) soient vérifiées, il suffit de choisir η tel que

$$\frac{n}{k} - 1 = \frac{9}{8\varepsilon^2} \log(2\eta^{-1})$$

(en effet $n_h > n/k - 1$ pour tout h). Le lemme 1 s'en déduit facilement.

Le lemme suivant permet de démontrer la (k,ε)-normalité d'une suite, dont on connait seulement une majoration du nombre d'occurrences des blocs d'une certaine longueur.

Lemme 2. *Soit $k \ge 1$ et $\varepsilon \le r^{-k}(1 - r^{-k})$. Une condition suffisante pour qu'une suite $s \in \mathcal{A}_r^n$ soit (k,ε)-normale est qu'il existe un entier l vérifiant*

$$\frac{12k}{\varepsilon} \le l \le \frac{n\varepsilon}{12}$$

tel que

$$\frac{1}{n} N(b,s) \le \frac{\varepsilon}{6kr^{2k}} r^{-l\delta(r,k,\varepsilon/3)} \quad \text{pour tout } b \in \mathcal{A}_r^l$$

($\delta(r,k,\varepsilon)$ étant défini au lemme 1).

Démonstration. La méthode consiste à calculer le nombre d'occurrences d'un bloc b de longueur k dans les blocs successifs de longueur l de la suite $s = \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$, et d'utiliser le fait qu'un grand nombre de ces blocs est $(k,\varepsilon/3)$-normal. Soit

$$S_{b,s} = \sum_{i=0}^{n-l} N(b, \varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_{i+l}).$$

A chaque occurrence du bloc b à un rang j dans la suite s, avec $l \le j \le n-l$, il y a occurrence de ce bloc dans $\varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_{i+l}$ pour $l - k + 1$ valeurs de i, donc on a

$$|S_{b,s} - (l-k+1)N(b,s)| \le 2l^2. \tag{1}$$

On a un autre encadrement de $S_{b,s}$: compte tenu que

$$|N(b, \varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_{i+l}) - lr^{-k}| < \begin{cases} \frac{\varepsilon}{3} l & \text{si } \varepsilon_{i+1} \ldots \varepsilon_{i+l} \text{ est } (k,\varepsilon/3)\text{-normal,} \\ l & \text{sinon,} \end{cases}$$

on en déduit, en sommant pour $0 \le i \le n - l$,

$$|S_{b,s} - (n-l+1)lr^{-k}| < \frac{\varepsilon}{3} ln + lN(\mathcal{N}, s), \tag{2}$$

où $\mathcal{N}$ est l'ensemble des suites $b' \in \mathcal{A}_r^l$ non $(k,\varepsilon/3)$-normales, et

$$N(\mathcal{N},s) = \sum_{b'\in\mathcal{N}} N(b',s).$$

En majorant $N(b',s)$ d'après l'hypothèse, et $\#(\mathcal{N})$ d'après le lemme 1,

$$N(\mathcal{N},s) \le n\frac{\varepsilon}{3}.$$

Puis, avec (1) et (2),

$$|(l-k+1)N(b,s) - (n-l+1)lr^{-k}| < 2l^2 + \frac{2\varepsilon}{3}ln,$$

$$|lN(b,s) - nlr^{-k}| < kn + 3l^2 + \frac{2\varepsilon}{3}ln$$

et, compte tenu des hypothèses sur l, la (k,ε)-normalité de s.

2. Nombres de Nakaï–Shiokawa. Avec les notations de l'introduction, on a la normalité de θ_s dans le cas suivant (d'après [NS1] et [NS3]) :

Théorème (Nakaï–Shiokawa). *Soit la fonction g, définie sur $[1,\infty[$ par*

$$g(x) = \alpha_1 x^{\beta_1} + \ldots + \alpha_d x^{\beta_d}$$

avec α_i et β_i constantes réelles, $\alpha_i \ne 0$, $\beta_i \ge 0$ non tous nuls. On suppose $g(x) \ge 1$ pour tout $x \ge 1$, et on note $[g(x)]$ la partie entière de $g(x)$. Alors le nombre

$$\theta_g =_r 0.[g(1)][g(2)][g(3)]\ldots$$

est normal en base r. De plus, pour tout entier $l \ge 1$ et tout bloc $b = b_1\ldots b_l \in A_r^l$,

$$\frac{1}{n}N_r(\theta_g,b,n) = \frac{1}{r^l} + O\biggl(\frac{1}{\log n}\biggr),$$

où $N_r(\theta_g,b,n)$ est le nombre d'occurrences du bloc b dans les n premiers termes du développement de θ_g.

La constante impliquée dans le terme en $O(1/\log n)$ dépend de la fonction g et de la base r, mais aussi de l. Cependant on va la majorer par une fonction de l, ce qui permettra de majorer la discrépance de la suite $n \to \theta_g r^n$.

Pour tout réel θ et tout intervalle $I = [\alpha,\beta[$, on pose

$$N(\theta,I,n) = \#(\{i \le n : \theta r^i \in I \bmod 1\})$$

et

$$D(\theta,n) = \sup_{I\subseteq[0,1[} \biggl|\frac{1}{n}N(\theta,I,n) - (\beta-\alpha)\biggr|.$$

Corollaire. $D(\theta_g,n) = O((\log(\log n))^2/\log n)$.

D é m o n s t r a t i o n. Les articles de Nakaï–Shiokawa démontrent l'estimation

$$\sum_{n\le x} N_r([g(n)],b) = \frac{1}{r^l} x \log_r g(x) + O(x\log\log x), \tag{1}$$

où $N_r([g(n)],b)$ désigne le nombre d'occurrences du bloc $b = b_1 \dots b_l$ dans le développement en base r de $[g(n)]$. Dans [NS1] et [NS3], le terme en $O(x\log\log x)$ est amélioré en $O(x)$. En reprenant les démonstrations (par exemple celles des paragraphes 3 de [NS1] et [NS2], qui sont plus simples que celle de [NS3]), on voit que la constante impliquée dans le terme en $O(x\log\log x)$ ne dépend pas de l.

Puis ils déduisent de (1) l'estimation

$$\frac{1}{n} N_r(\theta_g, b, n) = \frac{1}{r^l} + O\biggl(\frac{\log\log n}{\log n}\biggr),$$

où cette fois la constante impliquée dépend de l.

En effet, soit x l'entier qui vérifie $l_1 + \dots + l_x \le n < l_1 + \dots + l_{x+1}$, où l_j est la longueur du développement en base r de $[g(j)]$; on a l'encadrement

$$\sum_{n\le x} N_r([g(n)],b) \le N_r(\theta_g,b,n) \le \sum_{n\le x} N_r([g(n)],b) + xl + l_{x+1}.$$

Comme n est égal à $x\log_r g(x) + O(x)$, on déduit de (1) l'estimation

$$\frac{1}{n} N_r(\theta_g, b, n) = \frac{1}{r^l} + O\biggl(\frac{l + \log\log n}{\log n}\biggr). \tag{2}$$

Il reste à calculer une estimation de $N(\theta_g, I, n)$ pour tout intervalle I. En utilisant la méthode de Schiffer (voir [Sc], fin de la démonstration du théorème 1), on peut se restreindre aux intervalles de la forme $I = [0, i/r^j[$, avec $j = [\log(\log n)]$ et $0 \le i \le r^j$. En effet, l'erreur commise est en $O(\log(\log n)/\log n)$ (conséquence de (2)). Puis on fait une partition de $[0, i/r^j[$ en (au plus) r intervalles de longueur $1/r$, r intervalles de longueur $1/r^2, \dots, r$ intervalles de longueur $1/r^j$:

$$[0,1/r[,\ [1/r,2/r[,\ \dots,\ [(\varepsilon-1)/r,\varepsilon/r[\quad \text{avec } \varepsilon = [i/r^{j-1}]$$

puis

$$[\varepsilon/r, \varepsilon/r + 1/r^2[,\ [\varepsilon/r + 1/r^2, \varepsilon/r + 2/r^2[, \dots \quad \text{etc.}$$

Ce permet de déduire de (2) l'estimation voulue (pour chacun de ces sous-intervalles, les entiers n tels que θr^n appartient à cet intervalle correspondent aux occurrences, dans le développement de θ, d'un bloc de longueur l, $1 \le l \le j$).

La majoration de la discrépance est meilleure dans les cas étudiés par Schiffer ([Sc]).

3. Modification de nombres normaux. Dans ce paragraphe, on considère un réel $\theta \in [0,1[$, et un découpage en blocs de son développement en base r; autrement dit, une suite d'entiers positifs $(n_j)_{j\ge 1}$ telle que

$$\theta =_r 0.n_1n_2n_3\ldots$$

On modifie le développement de θ au moyen d'une famille de transducteurs $(\mathcal{T}_j)_{j\ge 1}$ d'alphabet $\mathcal{A}_r = \{0,1,\ldots,r-1\}$. Plus précisément, on dira que deux entiers positifs n et n', de développement en base r

$$n =_r a_l\ldots a_1 = \sum_{i=1}^{l} a_i r^{i-1}, \quad a_l \neq 0,$$

$$n' =_r b_{l'}\ldots b_1 = \sum_{i=1}^{l'} b_i r^{i-1}, \quad b_{l'} \neq 0,$$

se correspondent par un transducteur $\mathcal{T}$ s'il existe un chemin, d'état initial quelconque, dont les étiquettes d'entrée soient successivement $a_1, a_2, \ldots, a_{l''}$ (avec $l'' = \inf(l,l')$), et les étiquettes de sortie $b_1, b_2, \ldots, b_{l''}$; ou un chemin d'état initial quelconque dont les étiquettes d'entrée soient $a_{l''}, \ldots, a_2, a_1$ et les étiquettes de sortie $b_{l''}, \ldots, b_2, b_1$. On dira qu'un réel

$$\theta' =_r 0.n'_1n'_2n'_3\ldots$$

correspond à θ *par une famille de transducteurs* $(\mathcal{T}_j)_{j\ge 1}$ si, pour tout j, l'entier n_j et l'entier n'_j se correspondent par le transducteur $\mathcal{T}_j$, et si pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$|l'_j - l_j| = O((\log j)^{\varepsilon}).$$

On est obligé d'envisager que l'_j soit différent de l_j, pour les applications du paragraphe 4.

La proposition 1 donne des conditions suffisantes pour que θ' soit normal en base r; ces conditions portent sur la discrépance de θ (et sont vérifiées par presque tout réel θ), sur la suite $(n_j)_{j\ge 1}$ et les transducteurs $\mathcal{T}_j$. Rappelons qu'un transducteur est dit *non-ambigu en sortie* si, étant donnés deux états et une suite de lettres s, il existe au plus un chemin reliant ces deux états, et dont la suite des étiquettes de sortie soit égale à s. La notation $D(\theta,n)$ (discrépance de θ) est définie au début du paragraphe 2.

Proposition 1. *On suppose que pour tout* $\varepsilon > 0$, *les conditions suivantes sont vérifiées* :

(i) $D(\theta,n) = O(1/(\log n)^{1-\varepsilon})$ (*quand* $n \to \infty$),

(ii) $\log n_j = \Omega(\log j)$,

(iii) *les tranducteurs* $\mathcal{T}_j$ *sont non-ambigus en sortie*, *et le nombre d'états de* $\mathcal{T}_j$ *est en* $O((\log j)^{\varepsilon})$, *de même que le nombre de transducteurs distincts parmi* $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_j$.

Alors les nombres θ' *correspondant à* θ *sont normaux en base* r.

Dans le lemme suivant, on suppose qu'on a seulement une majoration du nombre d'occurrences $N_r(\theta, b, n)$ de certains blocs b dans les n premiers termes du développement de θ, d'où on déduit une majoration analogue pour $N_r(\theta', b, n)$. On pose

$$N_r(\theta, n) = \sup_b N_r(\theta, b, n),$$

la borne supérieure portant sur tous les blocs b de longueur $[\log_r(\log n)]$.

LEMME 3. *Soit $\theta \in [0, 1[$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$,*

$$N_r(\theta, n) = O\left(\frac{n}{(\log n)^{1-\varepsilon}}\right).$$

Si la suite $(n_j)_{j\geq 1}$ et les transducteurs $\mathcal{T}_j$ vérifient les conditions (ii) *et* (iii) *de la proposition* 1, *alors $N_r(\theta', n)$ est aussi en $O(n/(\log n)^{1-\varepsilon})$.*

Démonstration. Pour tout j, soit l_j le nombre de chiffres du développement de n_j en base r $(l_j = 1 + [\log_r(n_j)])$, et l'_j le nombre de chiffres de celui de n'_j. Étant donné un bloc b' de longueur $l = [\log_r(\log n)]$, on a la majoration

$$N_r(\theta', b', n) \leq \sum_{j=1}^{J} N_r(n'_j, b') + Jl$$

où J est le plus petit entier tel que $\sum_{j=1}^{J} l'_j \geq n$. J est au plus égal à n. Il s'agit donc de majorer pour tout $j \leq J$, le nombre d'occurrences de b' dans le développement de n'_j. Si b' apparaît au rang h dans ce développement (c'est-à-dire, si le bloc des coefficients de $r^{h-1}, r^{h-2}, \ldots, r^{h-l}$ est égal à b'), si de plus $l \leq h \leq \inf(l_j, l'_j)$ alors le bloc de chiffres du développement de n_j qui apparaît au même rang est l'étiquette d'entrée d'un chemin d'étiquette de sortie b', dans le transducteur $\mathcal{T}_j$. Plus précisément, la suite des étiquettes de sortie est égale à la suite des lettres du bloc b', lue de gauche à droite ou de droite à gauche, et de même pour la suite des étiquettes d'entrée.

Soit $\varepsilon > 0$. On déduit de l'hypothèse (iii) qu'il existe une constante C (dépendant de ε) telle que le nombre d'états de $\mathcal{T}_j$ soit inférieur à $C(\log J)^{\varepsilon}$, pour tout $J \geq 2$ et $1 \leq j \leq J$. Donc pour j fixé, le nombre de chemins appartenant au transducteur $\mathcal{T}_j$ (non-ambigu en sortie) et d'étiquette de sortie b' est inférieur à $C^2(\log J)^{2\varepsilon}$. D'autre part, il existe une constante D telle que le nombre de transducteurs distincts parmi $\mathcal{T}_1, \ldots, \mathcal{T}_J$ soit inférieur à $D(\log J)^{\varepsilon}$ pour tout $J \geq 2$. Le nombre de chemins appartenant à un de ces transducteurs, et d'étiquette de sortie b', est donc au plus égal à l'entier

$$\lambda_J = [C^2 D(\log J)^{3\varepsilon}].$$

Soient $b(1), \dots, b(\lambda_J)$ les étiquettes d'entrée de ces chemins. On a

$$N_r(n'_j, b') \le |l'_j - l_j| + \sum_{i=1}^{\lambda_J} N_r(n_j, b(i)),$$

$$N_r(\theta', b', n) \le \sum_{j=1}^{J} |l'_j - l_j| + \sum_{i=1}^{\lambda_J} N_r(\theta, b(i), m) + Jl,$$

avec $m = \sum_{j=1}^{J} l_j$.

Le premier terme, compte tenu de l'hypothèse $|l'_j - l_j| = O((\log j)^{\varepsilon})$, est en $O(J(\log J)^{\varepsilon})$. Comme

$$|m - n| \le l'_J + \sum_{j=1}^{J} |l'_j - l_j|,$$

on peut remplacer m par n dans le deuxième terme, avec une erreur en $O(J(\log J)^{4\varepsilon})$. D'après l'hypothèse sur $N_r(\theta, n)$, $\sum_{i=1}^{\lambda_J} N_r(\theta, b(i), n)$ est en $O(\lambda_J n/(\log n)^{1-\varepsilon})$, donc en $O(n/(\log n)^{1-4\varepsilon})$. Il suffit, pour pouvoir conclure, de vérifier que les autres termes sont aussi en $O(n/(\log n)^{1-4\varepsilon})$. On le déduit de l'estimation suivante de J : comme $\log n_j$ est en $\Omega(\log j)$, on a

$$n = \Omega\Big(\sum_{j=1}^{J} \log j\Big) = \Omega(J \log J), \quad \text{donc } J = \Omega\bigg(\frac{n}{\log J}\bigg) = \Omega\bigg(\frac{n}{\log n}\bigg).$$

Lemme 4. *Tout réel $\theta \in [0,1[$ vérifiant la condition* (i) *de la proposition* 1 *vérifie aussi l'hypothèse du lemme* 3. *D'autre part, tout réel $\theta \in [0,1[$ qui vérifie l'hypothèse du lemme* 3 *est normal en base r.*

Démonstration. Soit $\theta \in [0,1[$ vérifiant la condition (i). Soient $n \ge 1$, $l = [\log_r(\log n)]$, un bloc $b = b_1 \dots b_l$, et I l'intervalle des $x \in [0,1[$ dont le développement commence par $b_1 \dots b_l$. Avec les notations du paragraphe 2 on a

$$N_r(\theta, b, n) \le N(\theta, I, n) \le n|I| + nD(\theta, n).$$

Comme $|I| = O(1/\log n)$, la condition du lemme 3 est vérifiée.

Soit maintenant un réel $\theta \in [0,1[$ vérifiant la condition du lemme 3. Il faut vérifier qu'il est normal en base r. Il suffit de démontrer, étant donnés $k \ge 1$ et $\varepsilon > 0$, que les n premiers chiffres du développement de θ forment une suite (k,ε)-normale si n est assez grand.

On peut appliquer le lemme 2 à l'entier $l = [\log_r(\log n)]$, qui vérifie la première hypothèse de ce lemme pour n assez grand :

$$\frac{12k}{\varepsilon} \le l \le \frac{n\varepsilon}{12}.$$

Soit $\varepsilon' < 1-\delta$, avec $\delta = \delta(r,k,\varepsilon/3) < 1$ défini au lemme 1. Puisque $(1/n)N_r(\theta,n)$ est par hypothèse en $O(1/(\log n)^{1-\varepsilon'}) = O(1/r^{l(1-\varepsilon')})$, il est inférieur à $(\varepsilon/(6kr^{2k}))r^{-l\delta}$ pour n assez grand, et la deuxième hypothèse du lemme 2 est vérifiée.

La proposition 1 se déduit facilement des lemmes 3 et 4.

4. Application aux modifications additives ou multiplicatives. C'est l'application du paragraphe 3 au cas des transducteurs de multiplication, de division, d'addition ou de soustraction (voir par exemple [BlDT]), dont on va rappeler la définition dans le cas des nombres entiers.

Soit $n \in \mathbb{N}$, de développement en base r

$$n = a_l r^{l-1} + \ldots + a_1, \qquad a_l \neq 0.$$

Le *transducteur de multiplication* par l'entier λ a pour alphabet $\mathcal{A}_r = \{0,1,\ldots,r-1\}$ et pour ensemble d'états $\mathcal{A}_\lambda = \{0,1,\ldots,\lambda-1\}$. Deux états c et c' sont reliés par un arc d'étiquette d'entrée a et de sortie b ssi

$$\lambda a + c = rc' + b.$$

Donc en choisissant pour état initial $c = 0$ et en entrant successivement les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_l, 0, 0, \ldots$, la suite des étiquettes de sortie

$$b_1, b_2, \ldots, b_{l'}, 0, 0, \ldots \qquad \text{avec } b_{l'} \neq 0$$

est le développement de $n\lambda$, c'est-à-dire,

$$n\lambda = b_{l'} r^{l'-1} + \ldots + b_1.$$

Le *transducteur de division* par λ a même alphabet et même ensemble d'états. La condition $\lambda a + c = rc' + b$ est remplacée par $rc + a = \lambda b + c'$. En choisissant l'état initial $c = 0$ et en entrant successivement les lettres $a_l, a_{l-1}, \ldots, a_1$, la suite des étiquettes de sortie

$$0, \ldots, 0, b_{l'}, b_{l'-1}, \ldots, b_1 \qquad \text{avec } b_{l'} \neq 0$$

est le développement de $[n/\lambda]$: $[n/\lambda] = b_{l'} r^{l'-1} + \ldots + b_1$.

Le *transducteur d'addition* de λ dépend de son développement en base r :

$$\lambda = \lambda_h r^{h-1} + \ldots + \lambda_1, \qquad \lambda_h \neq 0.$$

Il a même alphabet $\mathcal{A}_r$ mais son ensemble d'états est $\{0,1\} \times \{1,\ldots,h\}$. Deux états (c,i) et (c',i') sont reliés par un arc d'étiquette d'entrée a et de sortie b ssi

$$a + \lambda_i + c = rc' + b \quad \text{et} \quad i' = i+1.$$

Avec l'état initial $(c,i) = (0,1)$ et les étiquettes d'entrée $a_1, a_2, \ldots, a_l$, $0, 0, \ldots$ on obtient comme étiquettes de sortie

$$b_1, b_2, \ldots, b_{l'}, 0, 0, \ldots \qquad (b_{l'} \neq 0)$$

telles que $n + \lambda = b_{l'} r^{l'-1} + \ldots + b_1$.

Pour le *transducteur de soustraction*, la condition $a + \lambda_i + c = rc' + b$ est remplacée par

$$(rc' + a) - (\lambda_i + c) = b, \quad \text{avec } c' = 1 \text{ ssi } a < \lambda_i + c.$$

On obtient le développement de $n - \lambda$ de la même façon que pour le transducteur d'addition.

PROPOSITION 2. *On suppose qu'un réel* $\theta =_r 0.n_1n_2n_3\ldots$ *vérifie les conditions* (i) *et* (ii) *de la proposition* 1. *Soient trois suites* $(\lambda_j)_{j\ge1}$, $(\mu_j)_{j\ge1}$ (*à valeurs dans* $\mathbb{N}\setminus\{0\}$) *et* $(\nu_j)_{j\ge1}$ (*à valeurs dans* $\mathbb{Z}$). *On suppose que*, *pour tout* $\varepsilon > 0$,

$$\lambda_j + \mu_j + |\nu_j| = O((\log j)^\varepsilon) \quad \textit{quand } j \to \infty.$$

Soit, *pour tout* j, n'_j *la partie entière de* $(\lambda_j/\mu_j)n_j + \nu_j$. *Alors si les* n'_j *sont positifs*, *le réel*

$$\theta' =_r 0.n'_1n'_2n'_3\ldots$$

est normal en base r.

La proposition 2 est bien sûr applicable au cas où θ est un nombre de Nakaï–Shiokawa, ou un nombre de Schiffer.

Démonstration. θ vérifie l'hypothèse du lemme 3, d'après le lemme 4. Les transducteurs de multiplication par λ_j, division par μ_j, addition de $\sup(\nu_j, 0)$ et soustraction de $\sup(-\nu_j, 0)$ vérifient la condition (iii). On peut donc appliquer le lemme 3 en utilisant successivement ces quatre familles de transducteurs; on obtient

$$N_r(\theta', n) = O\left(\frac{n}{(\log n)^{1-\varepsilon}}\right) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

D'après le lemme 4, θ' est normal en base r.

Remarque 1. Le cas des modifications additives d'un nombre normal en base r,

$$\theta =_r 0.n_1n_2n_3\ldots,$$

a été traité par Volkmann ([V]), si la suite $(n_j)_{j\ge1}$ est non décroissante et $\nu_j \ge 0$. L'hypothèse $\nu_j = O((n_j)^\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon > 0$ (autrement dit, $\log \nu_j = O(\log n_j)$) implique que le nombre

$$\theta' =_r 0.(n_1 + \nu_1)(n_2 + \nu_2)(n_3 + \nu_3)\ldots$$

est aussi normal en base r.

Par contre, l'hypothèse $\nu_j = O((n_j)^\varepsilon)$ pour $\varepsilon > 0$ fixé ne l'implique pas; on peut construire facilement un contre-exemple. On définit l'entier ν_j en posant que, si n_j a pour développement

$$n_j =_r a_{jl_j}\ldots a_{j1},$$

$n_j + \nu_j$ a pour développement

$$n_j + \nu_j =_r a_{jl_j} \dots a_{j(h_j+1)}(r-1)^{h_j} \qquad \text{avec } h_j = [\varepsilon \log_r n_j].$$

Comme ν_j est au plus égal à $r^{h_j} - 1$, on a bien $\nu_j < (n_j)^\varepsilon$. La limite inférieure de h_j/l_j étant au moins égale à ε, le réel θ' ne peut pas être normal en base r : pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fréquence d'occurrence du bloc 0^k est au moins égale (en limite inférieure) à ε, qui est indépendant de k.

D'autre part, on peut considérer que le nombre non normal θ' est obtenu à partir de θ en multipliant chaque n_j par $(n_j+\nu_j)/n_j$, donc par un rationnel qui tend vers 1 quand j tend vers ∞. Ceci prouve l'utilité de faire, à la proposition 2, une hypothèse sur le type de croissance de la suite $\lambda_j + \mu_j$ et non sur celle de λ_j/μ_j.

R e m a r q u e 2. Pour la proposition 1, on peut avoir une estimation de $D(\theta', n)$ à condition de renforcer les hypothèses sur θ et sur les transducteurs $\mathcal{T}_j$. Supposons qu'il existe une constante λ telle que

$$D(\theta, n) = O\left(\frac{(\log\log n)^\lambda}{\log n}\right), \qquad |l'_j - l_j| = O((\log\log j)^\lambda)$$

et que le nombre d'états du transducteur $\mathcal{T}_j$, et le nombre de transducteurs distincts parmi $\mathcal{T}_1, \dots, \mathcal{T}_j$, sont en $O((\log\log j)^\lambda)$. On en déduit que $N_r(\theta, n)$ (défini au lemme 3) est plus petit que $Cnl^\lambda/\log n$ (C constante, $l = [\log_r(\log n)]$).

Par la même démonstration qu'au lemme 3, $N_r(\theta', n)$ est plus petit que $C'nl^{4\lambda+1}/\log n$ (C' constante). Pour pouvoir appliquer le lemme 2, on va vérifier la majoration

$$C' \frac{l^{4\lambda+1}}{\log n} < \frac{\varepsilon}{6kr^{2k}} r^{-l(1-8\varepsilon^2/(81k\log r))}.$$

Posons $\varepsilon = l^{-\alpha}$ et $k \le l^\beta$; cette inégalité est vérifiée pour tout $k \le l^\beta$ si

$$6C' l^{4\lambda+1+\alpha+\beta} < r^{8l^{1-2\alpha-\beta}/(81\log r) - 2l^\beta}.$$

Elle est évidemment vérifiée pour l assez grand si $\alpha + \beta < 1/2$.

Les n premiers termes du développement de θ' forment donc une suite (k, ε)-normale pour tout $k \le l^\beta$. On en déduit par la méthode de Schiffer ([Sc], démonstration du théorème 1)

$$D(\theta', n) = O\left(\frac{1}{(\log\log n)^{1/2-\varepsilon}}\right) \qquad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

R e m a r q u e 3. Soit s (resp. s') la suite des étiquettes d'entrée (resp. de sortie) d'un chemin de longueur n, dans un transducteur non-ambigu en sortie. D'après l'article [BlDT] sur la préservation de la normalité par transducteur, on sait (corollaire 3.4) que pour tout k, ε il existe l, η tels que

$$s\ (l,\eta)\text{-normale}\ \Rightarrow s'\ (k,\varepsilon)\text{-normale}.$$

On peut préciser ici les conditions suffisantes sur l et η. Supposons

$$\frac{81k}{8\varepsilon^2}\log\frac{12d^2kr^{2k}}{\varepsilon} \le l \le \frac{n\varepsilon}{12} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{\varepsilon}{12d^2kr^{2k}}r^{-l\delta},$$

où d est le nombre d'états du transducteur, et $\delta = \delta(r,k,\varepsilon/3)$ est défini au lemme 1. (Cette hypothèse implique que n est assez grand. D'autre part, on suppose toujours $\varepsilon \le r^{-k}(1-r^{-k})$.)

Soit b un bloc de longueur l; comme la suite s est (l,η)-normale, on peut majorer $(1/n)N(b,s)$ par $r^{-l}+\eta$, et finalement par 2η car on a (en remplaçant η et δ par leurs valeurs, puis en utilisant l'hypothèse sur l)

$$\eta r^l = \frac{\varepsilon}{12d^2kr^{2k}}e^{8l\varepsilon^2/(81k)} \ge 1.$$

Par une démonstration semblable à celle du lemme 3, on a

$$N(b',s') \le d^2 \sup_{b\in\mathcal{A}_r^l} N(b,s)$$

pour tout $b' \in \mathcal{A}_r^l$, d'où

$$\frac{1}{n}N(b',s') \le 2\eta d^2.$$

Le lemme 2 permet de conclure la (k,ε)-normalité de s'.

Remarque 4. Au sujet des modifications multiplicatives de nombres normaux, il ne suffit pas de faire une hypothèse sur le type de croissance de la suite d'entiers $(\lambda_j)_{j\ge1}$ pour pouvoir conclure que le nombre

$$\theta' =_r 0.(\lambda_1n_1)(\lambda_2n_2)(\lambda_3n_3)\ldots$$

est normal en base r, quel que soit $\theta =_r 0.n_1n_2n_3\ldots$ normal en base r.

Plus précisément, étant donné une suite d'entiers positifs $(\alpha_j)_{j\ge1}$ tendant vers ∞, on va construire une suite d'entiers positifs $(\lambda_j)_{j\ge1}$ vérifiant $\lambda_j \le \alpha_j$ pour tout j, et un nombre normal θ tel que θ' ne soit pas normal. La suite $(\lambda_j)_{j\ge1}$ qu'on va construire ne peut être bornée : si elle l'était, θ' serait normal (voir [DT]).

On pose

$$\lambda_j = r^{l_j}+1,$$

où les (l_j) sont des entiers tels que $r^{l_j} < \alpha_j$ et $\lim_{j\to\infty} l_j = \infty$. Pour définir θ, on choisit d'abord un nombre normal x, de développement en base r

$$x =_r 0.x_1x_2x_3\ldots$$

avec $x_i \in \{0,1,\ldots,r-1\}$ et $x_1 = 1$. Soit m_j le mot constitué par les l_j premiers chiffres du développement de x, et $\overline{m}_j$ le mot obtenu en remplaçant chaque chiffre x_i par $r-1-x_i$. On définit l'entier n_j par son développement :

$$n_j =_r m_j\overline{m}_j,$$

puis on pose

$$\theta =_r 0.n_1n_2n_3\ldots$$

Il est clair que le réel θ' associé n'est pas normal en base r : s'il l'était, la fréquence d'occurrence du bloc $(r-1)(r-1)$ dans son développement tendrait vers $1/r^2$ qui est au moins égal à $1/4$. Or dans le développement de $\lambda_j n_j$,

$$\lambda_j n_j =_r m_j(r-1)^{l_j}\overline{m}_j,$$

la fréquence d'occurrence du bloc $(r-1)(r-1)$ est au moins égale à $(l_j-1)/3l_j$, donc strictement supérieur à $1/4$ pour j assez grand.

Il reste à vérifier que θ est normal, ce pourquoi on peut utiliser le lemme 5 de Bertrand-Mathis et Volkmann ([BV]). Dans le cas des développements en base r, ce lemme peut s'énoncer de la façon suivante :

Lemme. *Soit* $a_1, a_2, a_3, \ldots$ *une suite de mots sur l'alphabet* $\{0,1,\ldots,r-1\}$*. On pose pour tout* n, $\|a_n^*\| = \sum \|a_i\|$ *(somme, pour* $i \le n$, *des longueurs des mots* a_i*) et* $\psi(n) = \psi_{k,\varepsilon}(n) = \sum \|a_i\|$ *(somme pour* $i \le n$ *tel que* a_i *ne soit pas* (k,ε)*-normal). On suppose que pour tout* $k \ge 1$ *et* $\varepsilon > 0$, *les entiers* n *et* $\psi_{k,\varepsilon}(n)$ *sont en* $o(\|a_n^*\|)$ *quand* $n \to \infty$*. Alors le nombre* $0.a_1a_2a_3\ldots$ *est normal en base* r*.*

On l'applique au réel θ; il est égal à $0.a_1a_2a_3\ldots$ avec $a_{2j-1} = m_j$ et $a_{2j} = \overline{m}_j$ pour tout j. La condition $n = o(\|a_n^*\|)$ est vérifiée puisque la longueur de a_n tend vers ∞. D'autre part, les m_j étant préfixes d'une suite normale, ils sont (k,ε)-normaux pour n assez grand, donc $\psi_{k,\varepsilon}(n)$ est borné et la deuxième condition est vérifiée.

Remarquons qu'on aurait pu choisir le nombre $\theta =_r 0.n_1n_2n_3\ldots$ de façon que n_j soit de l'ordre de x_j, où $(x_j)_{j\ge1}$ est une suite donnée tendant vers ∞. Il suffit de poser, au lieu de $n_j =_r m_j\overline{m}_j$,

$$n_j =_r m_j\overline{m}_j \ldots m_j\overline{m}_j w_j,$$

où le bloc $m_j\overline{m}_j$ est répété $[\log_r x_j/(2l_j)]$ fois, et complété par un bloc w_j de zéros, de façon que la longueur du développement de n_j soit $[\log_r x_j]$.

5. Autre méthode dans le cas $n_j = j^2$. Pour certains réels $\theta =_r 0.n_1n_2n_3\ldots$, l'hypothèse sur la suite $(\lambda_j)_{j\ge1}$:

$$\lambda_j = O((\log j)^\varepsilon) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0$$

peut être remplaçée par l'hypothèse moins forte

$$\lambda_j = O(j^\varepsilon) \quad \text{pour tout } \varepsilon > 0.$$

On va le faire dans le cas particulier $n_j = j^2$, c'est-à-dire vérifier que le réel

$$\theta' =_r 0.(\lambda_1 1^2)(\lambda_2 2^2)(\lambda_3 3^2)\ldots$$

est normal en base r.

Il suffit de reprendre la démonstration de Besicovitch ([Be]). Pour tout $j \geq 1$, soit $h = h(j)$ l'entier qui vérifie $r^{h-1} \leq j < r^h$. On fait la division euclidienne par r^h :

$$\lambda_j j^2 = u_j r^h + v_j, \quad 0 \leq v_j < r^h.$$

Donc θ' est égal à $0.u_1 v_1 u_2 v_2 \ldots$ On note $\|u_j\|$ la longueur du développement de u_j, et de même pour v_j. En utilisant le même lemme (voir remarque 4, paragraphe 4) on a

$$\|a^*_{2n}\| = \sum (\|u_j\| + \|v_j\|), \quad \text{somme pour } 1 \leq j \leq n,$$
$$\psi(2n) = \sum \|u_j\| + \sum \|v_j\|,$$

somme pour $1 \leq j \leq n$ tel que u_j (resp. v_j) ne soit pas (k,ε)-normal. n est en $o(\|a^*_n\|)$ parce que u_j tend vers ∞. Pour vérifier $\psi(n) = o(\|a^*_n\|)$, il suffit de vérifier que $\psi(2n)$ est en $o(n)$.

Soit $\chi_i(n)$ (resp. $\chi'_i(n)$) le nombre d'indices $j \leq n$ tels que $\lambda_j = i$, et u_j (resp. v_j) ne soit pas (k,ε)-normal. Soit $\varepsilon' > 0$, qu'on fixera ultérieurement. D'après l'hypothèse sur la suite $(\lambda_j)_{j\geq 1}$, on a, si n est assez grand,

$$\lambda_j \leq n^{\varepsilon'} \quad \text{pour tout } j \leq n.$$

Si on arrive à majorer $\chi_i(n)$ et $\chi'_i(n)$ par $n^{1-2\varepsilon'}$, on obtiendra bien $\psi(2n) = o(n)$ puisque pour chaque valeur de n, le nombre de valeurs possibles pour λ_j est au plus $n^{\varepsilon'}$, et les longueurs $\|u_j\|$ et $\|v_j\|$ sont en $O(\log n)$.

On a (si $\lambda_j = i$)

$$u_j = \left[\frac{ij^2}{r^h}\right] \leq ij \leq n^{1+\varepsilon'}.$$

Donc $\chi_i(n)$ est au plus égal au produit du nombre d'entiers $m \leq n^{1+\varepsilon'}$ non (k,ε)-normaux par le nombre maximal (pour $m \leq n^{1+\varepsilon'}$) d'entiers j vérifiant le système

$$\text{(S)} \qquad j \leq n, \quad \lambda_j = i, \quad u_j = m.$$

D'après le lemme de Copeland–Erdős ([CE]), le premier nombre est inférieur à $(n^{1+\varepsilon'})^\delta$, où $\delta < 1$ est une constante ne dépendant que de r, k et ε. D'autre part, pour tout h, le nombre d'entiers $j \in [r^{h-1}, r^h[$ solutions de (S) est au plus égal à r. En effet, la suite $(u_j)_{j\geq 1}$ est monotone et u_{j+r} est supérieur à u_j (si $\lambda_{j+r} = \lambda_j = i$) puisque

$$u_{j+r} \geq [ij^2/r^h + 2ij/r^{h-1}] \geq u_j + 2.$$

L'entier $h = 1 + [\log_r j]$ est compris entre 1 et $1 + [\log_r n]$. Donc, en tout, (S) a au plus $r(1 + [\log_r n])$ solutions, et on a pour n assez grand

$$\chi_i(n) \leq (n^{1+\varepsilon'})^\delta r(1 + [\log_r n]) \leq n^{\delta+2\varepsilon'}.$$

Il suffit alors de choisir $\varepsilon' \leq (1 - \delta)/4$.

Pour majorer $\chi'_i(n)$, on note K l'entier tel que $r^{K-1} \leq n < r^K$, et on peut se limiter aux indices j compris entre $r^{K'}$ et r^K, avec $K' = [K(1-3\varepsilon')]$, puisque le nombre d'indices $j \leq n$ qui ne le sont pas est en $o(n^{1-2\varepsilon'})$. Pour la même raison, on peut supposer j non multiple de $p^{[3K\varepsilon' \log_p r]}$, quel que soit p facteur premier de r. Comme dans le cas précédent, il suffit de majorer le nombre de solutions du système

$$(\mathrm{S}') \qquad j \leq n, \quad \lambda_j = i, \quad v_j = m,$$

par $n^{C\varepsilon'}$ pour n assez grand, C constante.

Soit p^γ un des facteurs de la décomposition de r en facteurs premiers. L'entier $i = \lambda_j$ peut se mettre sous la forme $i = p^\alpha i'$, avec i' non multiple de p et $\alpha \leq K\varepsilon' \log_p r$ (conséquence de $\lambda_j \leq n^{\varepsilon'}$). De même, $j = p^\beta j'$, j' non multiple de p, et $\beta \leq 3K\varepsilon' \log_p r$.

Si $v_j = m$, on a

$$ij^2 = p^{\alpha+2\beta} i' j'^2 \equiv m$$

$\bmod r^h$, donc $\bmod p^{\gamma K'}$. Si on a deux solutions $v_{j_1} = v_{j_2} = m$, alors β a la même valeur pour j_1 et j_2 (si ε' est assez petit) puisque $ij_1^2 \equiv ij_2^2 \bmod p^{\gamma K'}$. De plus,

$$i'(j'_1 + j'_2)(j'_1 - j'_2) \equiv 0 \bmod p^{\gamma K' - \alpha - 2\beta}.$$

Puisque $j'_1 + j'_2$ et $j'_1 - j'_2$ ne peuvent être tous deux divisibles par p^2, auquel cas $2j'_1$ le serait, on a

$$j'_1 \equiv \pm j'_2 \bmod p^{\gamma K' - \alpha - 2\beta - 1},$$

$$\gamma K' - \alpha - 2\beta - 1 \geq \gamma(K - 3K\varepsilon' - 1) - 6K\varepsilon' \log_p r - 1 \geq \gamma K(1 - \varepsilon'')$$

pour K assez grand, avec $\varepsilon'' = 10\varepsilon' \log_2 r$.

Ceci étant valable pour tout facteur p^γ de la décomposition de r, on a

$$j'_1 \equiv \pm j'_2 \bmod r^{[K(1-\varepsilon'')]}.$$

On en déduit que le nombre de solutions de (S$'$) est au plus égal à $2r^{K-[K(1-\varepsilon'')]}$, donc à $r^{CK\varepsilon'}$ avec C constante ne dépendant que de r, et

$$\chi'_i(n) \leq r^{K\delta} r^{CK\varepsilon'} \leq (nr)^{\delta + C\varepsilon'}.$$

Si on choisit $\varepsilon' < (1-\delta)/(C+2)$, on a $\delta + C\varepsilon' < 1 - 2\varepsilon'$ et $\chi'_i(n) = o(n^{1-2\varepsilon'})$.

R e m a r q u e 5. Cette démonstration est bien sûr applicable aussi au cas $n_j = j$. On note alors $\chi_i(n)$ le nombre d'indices $j \leq n$ tels que $\lambda_j = i$ et $j\lambda_j$ ne soit pas (k, ε)-normal. On obtient de même, pour tout $\varepsilon' > 0$,

$\chi_i(n) \le n^{1-2\varepsilon'}$ pour n assez grand, d'où on déduit par le lemme la normalité de $0.(\lambda_1)(2\lambda_2)(3\lambda_3)\ldots$

Références

[BV] A. Bertrand-Mathis and B. Volkmann, *On (ε, k)-normal words in connecting dynamical systems*, Monatsh. Math. 107 (1989), 267–279.

[Be] A. S. Besicovitch, *The asymptotic distribution of the numerals in the decimal representation of the squares of the natural numbers*, Math. Z. 39 (1935), 146–156.

[BlDT] F. Blanchard, J. M. Dumont and A. Thomas, *Generic sequences, transducers and multiplication of normal numbers*, Israel J. Math. 80 (1992), 257–287.

[Ch] D. G. Champernowne, *The construction of decimals normal in the scale of ten*, J. London Math. Soc. 8 (1933), 254–260.

[CE] A. Copeland and P. Erdős, *Note on normal numbers*, Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 857–860.

[DT] J. M. Dumont et A. Thomas, *Une modification multiplicative des nombres g-normaux*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) 8 (1986/87), 367–376.

[G] P. Grabner, *On digit expansions with respect to second order linear recurring sequences*, in: Number Theoretic Analysis (Vienna, 1988–89), Lecture Notes in Math. 1452, Springer, Berlin, 1990, 58–64.

[NS1] Y.-N. Nakaï and I. Shiokawa, *A class of normal numbers*, Japan J. Math. 16 (1990), 17–29.

[NS2] —, —, *A class of normal numbers. II*, in: Number Theory and Cryptography (Sydney, 1989), J. H. Loxton (ed.), London Math. Soc. Lecture Note Ser. 154, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990, 204–210.

[NS3] —, —, *Discrepancy estimates for a class of normal numbers*, Acta Arith. 62 (1992), 271–284.

[Re] A. Rényi, *Calcul des probabilités*, Collect. Univ. Math. 21, Dunod, Paris, 1966.

[Sc] J. Schiffer, *Discrepancy of normal numbers*, Acta Arith. 47 (1986), 175–186.

[SV] P. Szüsz and B. Volkmann, *Sur des nombres normaux définis par un polynôme*, Séminaire de théorie des nombres, 1987–1988 (Talence, 1987–1988), Exp. No. 42, 4pp., Univ. Bordeaux I, Talence.

[V] B. Volkmann, *On modifying constructed normal numbers*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) 1 (1979), 269–285.

Jean Marie Dumont
LABORATOIRE
DE MATHÉMATIQUES DISCRÈTES
U.P.R. 9016, CASE 930
163, AVENUE DE LUMINY
F-13288 MARSEILLE CEDEX 9
FRANCE
E-mail: DUMONT@LUMIMATH.UNIV-MRS.FR

Alain Thomas
UFR-MIM
FACULTÉ DES SCIENCES DE ST CHARLES
UNIVERSITÉ DE PROVENCE
CASE F
3, PLACE VICTOR HUGO
F-13331 MARSEILLE CEDEX 3
FRANCE

Reçu le 26.10.1993
et révisé le 10.3.1994 (2512)