ACTA ARITHMETICA
LXVIII.2 (1994)

K-nombres de Pisot et de Salem

par

M. J. Bertin (Paris)

Introduction. A. M. Bergé et J. Martinet [1] ont introduit en 1987 à propos de régulateurs relatifs la notion de hauteur relative d'un nombre algébrique par rapport à un corps de nombres K.

Cette notion permet la généralisation des notions et problèmes classiques : nombres de Pisot, nombres de Salem et problème de Lehmer. Elle éclaire d'un jour nouveau le problème de la répartition des mesures non réciproques.

Dans le premier paragraphe, après avoir donné la définition et des exemples, nous caractérisons les K-nombres de Pisot lorsque le corps K est totalement réel. Dans le deuxième paragraphe, nous donnons une généralisation de l'algorithme de Schur au cas des fonctions rationnelles f sur un corps de nombres totalement réel, ayant un pôle simple unique α, $0 < \alpha < 1$, dans le disque unité, bornées par 1 sur le cercle unité et telles que $|f(0)| < 1$. Enfin dans le dernier paragraphe, nous déterminons tous les $Q(\sqrt{2})$-nombres de Pisot de mesure de Mahler inférieure à 2,6.

1. Définitions. Exemples

Définition. Soit K un corps de nombres. Un entier algébrique $\theta \in \overline{\mathbb{Q}}^*$ est un K-*nombre de Salem* (resp. *Pisot*) si au-dessus de tout plongement τ de K dans $\mathbb{C}$, θ possède un unique conjugué θ_τ de module supérieur à 1 et au moins un (resp. aucun) conjugué de module 1.

Remarques. 1. Les $\mathbb{Q}$-nombres de Pisot (resp. Salem) sont les nombres de Pisot (resp. Salem).

2. Un entier rationnel $n > 1$ est un nombre de Pisot. Mais un entier de K n'est pas forcément un K-nombre de Pisot.

Par exemple, si $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$, le nombre $\theta = (5 + 3\sqrt{5})/2$ est un entier de K, mais n'est pas un K-nombre de Pisot. En effet, son polynôme minimal $X - (3 + \sqrt{5})/2$ sur K a pour polynôme conjugué $X - (3 - \sqrt{5})/2$ dont l'unique racine est de module strictement inférieur à 1.

3. Tout comme dans le cas $K = \mathbb{Q}$, les unités de K ne sont pas des K-nombres de Pisot.

4. Un $\mathbb{Q}$-nombre de Pisot n'est pas forcément un K-nombre de Pisot.

Considérons par exemple la racine $\theta = 3{,}17467\ldots$ du polynôme $P = z^2 - az - a$ avec $a = 1 + \sqrt{2}$. Alors θ est un nombre de Pisot mais n'est pas un $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Pisot puisque le polynôme conjugué $z^2 - bz - b$, où $b = 1 - \sqrt{2}$, a ses deux racines de module strictement inférieur à 1.

Plus généralement, un nombre de Pisot θ est un K-nombre de Pisot si et seulement si $\mathbb{Q}(\theta)$ et K sont linéairement disjoints.

Ainsi l'entier algébrique $\theta = 2{,}31651243\ldots$, unique racine de module supérieur à 1 du polynôme

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} + \frac{\sqrt{5}+1}{2}z - z^2,$$

est un nombre de Pisot mais n'est pas un $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$-nombre de Pisot car le polynôme

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{2}z + z^2$$

a toutes ses racines de module strictement inférieur à 1. Par suite, les corps $\mathbb{Q}(\theta)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ne sont pas linéairement disjoints.

5. *De même, un $\mathbb{Q}$-nombre de Salem τ est un K-nombre de Salem si et seulement si les corps $\mathbb{Q}(\tau)$ et K sont linéairement disjoints.*

Par exemple, le nombre de Salem $\tau_1 = 1{,}359997117\ldots$ de la table de Boyd [4], de polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$

$$z^8 - z^7 + z^6 - 2z^5 + z^4 - 2z^3 + z^2 - z + 1$$

n'est pas un $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$-nombre de Salem; en effet, son polynôme minimal sur $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ est le polynôme

$$z^4 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}z^3 + z^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2}z + 1$$

dont le polynôme conjugué ne possède que des racines de module 1.

De même, le nombre de Salem $\tau_2 = 1{,}8832035\ldots$ n'est pas un $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Salem.

En effet, son polynôme minimal P sur $\mathbb{Q}$ se décompose sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, puisque

$$P = z^4 - 2z^3 + z^2 - 2z + 1 = (z^2 - (1+\sqrt{2})z + 1)(z^2 - (1-\sqrt{2})z + 1).$$

Par suite, les corps $\mathbb{Q}(\tau_1)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ ne sont pas linéairement disjoints. Il en est de même des corps $\mathbb{Q}(\tau_2)$ et $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

6. Le polynôme minimal P d'un nombre de Pisot est unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$; d'où $|P(0)| \geq 1$.

Le polynôme minimal P_K sur K d'un nombre de Pisot relatif est à coefficients dans $\mathbb{Z}_K$, anneau des entiers de K, mais l'on n'a pas forcément $|P_K(0)| \geq 1$.

Toutefois si l'on suppose K totalement réel galoisien, il existe un plongement réel τ de K dans $\mathbb{R}$ tel que $|P_{\tau(K)}(0)| \geq 1$; comme $\tau(K) = K$, le polynôme $P_{\tau(K)}$ fournit un K-nombre de Pisot $\tau(\theta)$ dont le polynôme minimal vérifie $|P_K(0)| \geq 1$.

Dans toute la suite, on identifiera un K-nombre de Pisot θ avec l'ensemble $(\theta_\tau)_\tau$ de ses conjugués dans $A = \mathbb{R}^{r_1} \times \mathbb{C}^{r_2}$, où (r_1, r_2) est la signature du corps K.

2. Propriétés. On désigne par Λ le réseau image dans A de l'anneau des entiers de $\mathbb{Z}_K$.

Si K est totalement réel, le théorème suivant donne une caractérisation des K-nombres de Pisot analogue à celle des nombres de Pisot [8].

THÉORÈME. *Soit K un corps de nombres totalement réel et θ un K-nombre de Pisot, de K-degré différent de* 2. *Alors il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ d'entiers de K et un élément $\lambda \in K(\theta)$, $\lambda \neq 0$, tel que pour tout plongement τ de K dans $\mathbb{R}$, on ait pour tout $n \geq 0$,*

$$|\lambda_\tau \theta_\tau^n - a_{n,\tau}| = |\varepsilon_{n,\tau}|,$$
$$\sum_{n\geq 0} |\varepsilon_{n,\tau}|^2 < \infty \quad \text{et} \quad 0 < |\lambda_\tau| < |\theta_\tau|.$$

Réciproquement, soit K un corps de nombres totalement réel et $(\theta_\tau)_\tau \in A$ vérifiant $|\theta_\tau| > 1$. S'il existe pour tout $n \geq 0$ un élément $(a_{n,\tau})_\tau \in \Lambda$ et $(\lambda_\tau)_\tau \in A$ vérifiant pour tout plongement τ, $\lambda_\tau \neq 0$ et

$$\sum_{n\geq 0} |\lambda_\tau \theta_\tau^n - a_{n,\tau}|^2 < \infty,$$

alors θ_τ est un entier algébrique sur K dont les autres conjugués ont un module strictement inférieur à 1. *En outre, si les θ_τ sont conjugués sur $\mathbb{Q}$, le nombre $(\theta_\tau)_\tau$ est un K-nombre de Pisot.*

Preuve. L'idée générale est celle de la caractérisation des nombres de Pisot [8].

Soit P le polynôme minimal de θ sur K, P^* son polynôme réciproque, $P^*(z) = z^s P(1/z)$, τ un plongement de K dans $\mathbb{R}$. Alors

$$P_\tau(z) = (z - \theta_\tau)(z - \alpha_{1,\tau}) \ldots (z - \alpha_{s-1,\tau})$$

avec $s = d^\circ(\theta)$, $|\theta_\tau| > 1$, $|\alpha_{i,\tau}| < 1$, $1 \leq i \leq s-1$.

Puisque τ est un plongement réel, les coefficients de P_τ, sont réels; donc si $\alpha_{i,\tau}$ est racine de P_τ, il en est de même de $\overline{\alpha}_{i,\tau}$.

On peut donc écrire

$$\frac{P_\tau(z)}{P_\tau^*(z)} = \frac{z-\theta_\tau}{1-\theta_\tau z}\frac{z-\alpha_{1,\tau}}{1-\overline{\alpha}_{1,\tau}z}\cdots\frac{z-\alpha_{s-1,\tau}}{1-\overline{\alpha}_{s-1,\tau}z}.$$

En outre θ_τ est réel. Par suite,

$$\left|\frac{P_\tau(z)}{P_\tau^*(z)}\right| \le 1 \quad \text{si } |z|=1$$

et

$$\left|\frac{z-\alpha_{i,\tau}}{1-\overline{\alpha}_{i,\tau}z}\right| \le 1 \quad \text{pour } |z|\le 1 \text{ et } 1\le i\le s-1. \tag{1}$$

Notons

$$f(z) = \frac{\lambda}{1-\theta z} - \frac{P(z)}{P^*(z)}$$

avec $\lambda = -\theta\,\mathrm{Res}(P/P^*, z=1/\theta)$. On a donc

$$\lambda_\tau = \left(\frac{1}{\theta_\tau}-\theta_\tau\right)\frac{1/\theta_\tau-\alpha_{1,\tau}}{1-\overline{\alpha}_{1,\tau}(1/\theta_\tau)}\cdots\frac{1/\theta_\tau-\alpha_{s-1,\tau}}{1-\overline{\alpha}_{s-1,\tau}(1/\theta_\tau)}. \tag{2}$$

Montrons que si θ est de degré différent de 2 sur K alors $\lambda_\tau \ne 0$, pour tout τ. En effet, sinon il existerait i et τ tels que $\alpha_{i,\tau} = 1/\theta_\tau$. Considérons le polynôme R à coefficients dans $\mathbb{Z}$,

$$R = \prod_\tau (X-\theta_\tau)(X-\alpha_{1,\tau})\dots(X-\alpha_{s-1,\tau}),$$

L le corps de décomposition de R et $\sigma \in \mathrm{Gal}\,(L/\mathbb{Q})$ tel que $\sigma(\theta_\tau) = \theta_{\tau'}$, $\tau' \ne \tau$.

On aurait donc

$$\sigma(1/\theta_\tau) = 1/\sigma(\theta_\tau) = \sigma(\alpha_{i,\tau}) = 1/\theta'_\tau.$$

Par suite, pour tout plongement τ' de K, il existerait une racine de R de module strictement inférieur à 1 égale à $1/\theta_{\tau'}$. Le produit des racines de R serait donc strictement inférieur à 1 si $\deg_K\theta \ne 2$, ce qui est impossible car ce produit est un entier non nul.

Notons

$$\sum_{n\ge 0} a_n z^n = \frac{P(z)}{P^*(z)}$$

le développement en série de Taylor de P/P^* au voisinage de l'origine; on a donc $a_n \in \mathbb{Z}_K$ car $P^*(0)=1$.

En outre pour tout plongement τ de K, la fonction

$$f_\tau(z) = \frac{\lambda_\tau}{1-\theta_\tau z} - \frac{P_\tau(z)}{P_\tau^*(z)} = \sum_{n\ge 0}(\lambda_\tau\theta_\tau^n - a_{n,\tau})z^n$$

est holomorphe dans un disque de rayon strictement supérieur à 1, d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_\tau \theta_\tau^n - a_{n,\tau}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f_\tau(e^{i\theta})|^2 \, d\phi \le \max_{|z|=1} |f_\tau(z)|^2.$$

On déduit de (1) et (2) les inégalités

$$1 < |\lambda_\tau| \le \left|\theta_\tau - \frac{1}{\theta_\tau}\right| < |\theta_\tau|, \qquad \max_{|z|=1} |f_\tau(z)| < \frac{|\theta_\tau|}{|\theta_\tau| - 1} + 1.$$

Réciproquement, supposons K totalement réel. Posons $a'_{i,\tau} = a_{i,\tau} - \theta_\tau a_{i-1,\tau}$. Pour un plongement τ fixé, écrivons après combinaison des colonnes,

$$D_{n,\tau} = \begin{vmatrix} a_{0,\tau} & \ldots & a_{n,\tau} \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ a_{n,\tau} & \ldots & a_{2n,\tau} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{0,\tau} & a'_{1,\tau} & \ldots & a'_{n,\tau} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n,\tau} & a'_{n+1,\tau} & \ldots & a'_{2n,\tau} \end{vmatrix};$$

puis après combinaison linéaire des lignes

$$D_{n,\tau} = \begin{vmatrix} a_{0,\tau} & a_{1,\tau} & \ldots & a'_{n,\tau} \\ a'_{1,\tau} & a'_{2,\tau} - \theta_\tau a'_{1,\tau} & \ldots & a'_{n+1,\tau} - \theta_\tau a'_{n,\tau} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a'_{n,\tau} & a'_{n+1,\tau} - \theta_\tau a'_{n,\tau} & \ldots & a'_{2n,\tau} - \theta_\tau a'_{2n-1,\tau} \end{vmatrix}.$$

En majorant par l'inégalité de Hadamard et en utilisant la convergence de la série de terme général $|a'_{n,\tau}|^2 = |\varepsilon_{n,\tau} - \theta_\tau \varepsilon_{n-1,\tau}|^2$, on en déduit que $D_{n,\tau}$ tend vers 0 quand n tend vers ∞. Comme $\prod_\tau D_{n,\tau} \in \mathbb{Z}$, ceci entraîne $D_{n,\tau} = 0$. Par suite, $(a_{n,\tau})_{n\ge 0}$ est une suite récurrente linéaire à coefficients dans K, d'où

$$\sum_{n\ge 0} a_{n,\tau} z^n = \frac{P_\tau(z)}{Q_\tau(z)}, \qquad P_\tau \text{ et } Q_\tau \in K[z],\ a_{n,\tau} \in \mathbb{Z}_K.$$

D'après le lemme de Fatou pour les corps de nombres, on peut choisir P_τ et Q_τ à coefficients dans $\mathbb{Z}_K$ vérifiant $Q_\tau(0) = 1$. Par suite, $1/\theta_\tau$ est l'inverse d'un entier algébrique sur K dont tous les autres conjugués ont un module strictement inférieur à 1; donc $(\theta_\tau)_\tau$ est un K-nombre de Pisot.

3. Généralisation de l'algorithme de Schur. Les théorèmes suivants généralisent ceux de Dufresnoy et Pisot [7]. Ils nous permettent de généraliser l'algorithme de Schur au cas des corps quadratiques réels et de déterminer les $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$-nombres de Pisot de petite mesure.

On désigne par K un corps de nombres totalement réel, par $\mathbb{Z}_K$ son anneau d'entiers.

On note P^* le polynôme réciproque du polynôme P, i.e. $P^*(z) = z^{d^\circ P} P(1/z)$.

Soit f une fraction rationnelle, $f = A/Q$, $(A, Q) = 1$, A et Q éléments de $\mathbb{Z}_K[z]$, $Q(0) = 1$, f ne possédant dans $|z| \leq 1$ qu'un seul pôle simple α, $0 < \alpha < 1$ et vérifiant $|f(z)| \leq 1$ sur $|z| = 1$.

Si $A \neq \pm Q^*$, on dit que f est une fraction rationnelle de *rang infini*. Sinon, f est dite de *rang* s, s désignant le degré de Q.

On désigne par $(f_i(z))_{i\geq 0}$ la suite des transformés de Schur de f, définie par récurrence, à partir de $f_0(z) = f(z)$ et aussi longtemps que $|f_{i-1}(0)| < 1$, par la formule

$$f_i(z) = \frac{f_{i-1}(z) - f_{i-1}(0)}{z[1 - f_{i-1}(z)f_{i-1}(0)]}.$$

Les f_i sont alors bornées par 1 sur $|z| \leq 1$.

On désigne par p le plus petit entier $p \geq 0$ tel que $|f_p(0)| \geq 1$ (cf. Chamfy [6]).

On suppose en outre si $p = 0$, $f_0(0) = f(0) \geq 1$ (c'est le cas traité par Dufresnoy et Pisot [7]) et si $p \geq 1$, $0 < f_0(0) = f(0) < 1$.

On note N_p l'ensemble des fractions rationnelles vérifiant les conditions précédentes.

On rappelle également le lemme suivant (cf. [7]).

Lemme. *Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $|B(x)| \leq |A(x)|$ pour $|x| = 1$ et soit ϕ la fonction $\phi(x) = B(x)f(x) - A(x)$ où $f \in N_0$. Pour $\phi \not\equiv 0$, on note $\phi(z) = \sum_{n\geq k} a_n z^n$ le développement en série de Taylor de ϕ au voisinage de l'origine, avec $a_k \neq 0$. Alors le polynôme A possède exactement $k - 1$ zéros dans $|z| < 1$.*

Réciproquement, si A possède exactement $k-1$ zéros dans $|z| < 1$, alors, si z est de module strictement inférieur à 1, ϕ ne s'annule que pour $z = 0$ et $a_k \neq 0$; si en outre $A(1) \neq 0$, alors $A(1)\phi(x)(x - \alpha) < 0$ pour x réel, $0 < x < 1$, et par conséquent $A(1)a_k > 0$.

Théorème 1. *Soit $f \in N_p$ et $F = \sum_{n\geq 0} u_n z^n$ son développement en série de Taylor au voisinage de l'origine. On désigne, lorsqu'ils existent, par D_n et $E_n = -D_n^*$ (resp. D_n^+ et $E_n^+ = (D_n^+)^*$) les uniques polynômes à coefficients dans K de degré n vérifiant $E_n(0) = 1$ (resp. $E_n^+(0) = 1$) et tels qu'au voisinage de l'origine on ait le développement*

$$\frac{D_n}{E_n} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1}z^{n-1} + w_n z^n + \ldots \tag{1}$$

(*resp.*

$$\frac{D_n^+}{E_n^+} = u_0 + u_1 z + \ldots + u_{n-1}z^{n-1} + w_n^+ z^n + \ldots). \tag{1'}$$

On note s le rang de f fini ou non, en remarquant que si $|f_p(0)| > 1$ alors $s \geq p + 1$ et si $|f_p(0)| = 1$ alors $s > p + 1$.

(a) *Si* $|f_p(0)| > 1$, *les polynômes* D_n, E_n, D_n^+, E_n^+ *existent pour tout* $1 \le n \le s+1$ *et vérifient*

$$w_i < u_i < w_i^+, \quad 1 \le i \le p-1,$$
$$u_p < w_p < w_p^+ \quad si\ f_p(0) < -1, \quad w_p < w_p^+ < u_p \quad si\ f_p(0) > 1.$$

(i) *Si* $s > p+1$, *on a*

$$u_{p+1} < w_{p+1}^+ < w_{p+1} \quad si\ f_p(0) < -1,$$
$$w_{p+1}^+ < w_{p+1} < u_{p+1} \quad si\ f_p(0) > 1,$$
$$w_{p+h} < u_{p+h} < w_{p+h}^+, \quad 2 \le h \le s-p-1.$$

Si $f(1) = 1$, *on a*

$$w_s < u_s = w_s^+ \quad (d\text{'}o\grave{u}\ f = D_s^+/E_s^+).$$

Si $f(1) = -1$, *on a*

$$w_s = u_s < w_s^+ \quad (d\text{'}o\grave{u}\ f = D_s/E_s).$$

(ii) *Si* $s = p+1$, *on a*

$$u_{p+1} = w_{p+1}^+ < w_{p+1} \quad si\ f_p(0) < -1 \quad (d\text{'}o\grave{u}\ f = D_s^+/E_s^+),$$
$$w_{p+1}^+ < w_{p+1} = u_{p+1} \quad si\ f_p(0) > 1 \quad (d\text{'}o\grave{u}\ f = D_s/E_s),$$
$$w_n = u_n = w_n^+, \quad n \ge s+1.$$

(b) *Si* $f_p(0) = 1$, *les polynômes* D_n *et* E_n (*resp.* D_n^+ *et* E_n^+) *existent pour tout* $1 \le n \le s+1$ (*resp.* $1 \le n \le s+1$, $n \ne p+2$) *et vérifient*

$$w_i < u_i < w_i^+, \quad 1 \le i \le p-1,$$
$$w_p < u_p = w_p^+,$$
$$w_{p+1} = w_{p+1}^+ < u_{p+1}.$$

(i) *Si* $s > p+2$, *on a*

$$w_{p+2} < u_{p+2},$$
$$w_{p+h} < u_{p+h} < w_{p+h}^+, \quad 3 \le h \le s-p-1.$$

Si $f(1) = 1$, *on a*

$$w_s < u_s = w_s^+ \quad (d\text{'}o\grave{u}\ f = D_s^+/E_s^+).$$

Si $f(1) = -1$, *on a*

$$w_s = u_s < w_s^+ \quad (d\text{'}o\grave{u}\ f = D_s/E_s).$$

(ii) *Si* $s = p+2$, *on a*

$$w_{p+2} = u_{p+2} \quad (d\text{'}o\grave{u}\ f = D_s/E_s),$$
$$w_n = u_n = w_n^+, \quad n \ge s+1.$$

(c) *Si* $f_p(0) = -1$, *les polynômes* D_n *et* E_n (*resp.* D_n^+ *et* E_n^+) *existent pour tout* $n \geq 1$, $n \neq p+2$ (*resp.* $n \geq 1$) *et vérifient*

$$w_i < u_i < w_i^+, \quad 1 \leq i \leq p-1,$$
$$u_p = w_p < w_p^+, \quad u_{p+1} < w_{p+1}^+ = w_{p+1}.$$

(i) *Si* $s > p+2$, *on a*

$$u_{p+2} < w_{p+2}^+,$$
$$w_{p+h} < u_{p+h} < w_{p+h}^+, \quad 3 \leq h \leq s-p-1.$$

Si $f(1) = 1$, *on a*

$$w_s < u_s = w_s^+ \quad (d\text{'où } f = D_s^+/E_s^+).$$

Si $f(1) = -1$, *on a*

$$w_s = u_s < w_s^+ \quad (d\text{'où } f = D_s/E_s).$$

(ii) *Si* $s = p+2$, *on a*

$$u_{p+2} = w_{p+2}^+ \quad (d\text{'où } f = D_s^+/E_s^+),$$
$$w_n = u_n = w_n^+, \quad n \geq s+1.$$

Preuve. Le cas $p = 0$ a été traité par Pisot. Supposons donc $p > 1$, le cas $p = 1$ étant tout à fait similaire. Notons

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} D_n^+ E_n - D_n E_n^+ \equiv (w_n^+ - w_n) z^n, \\ D_{n+1} E_n - D_n E_{n+1} \equiv (u_n - w_n) z^n (1-z), \end{cases}$$

$$\text{(I)} \qquad \begin{cases} D_{n+1} E_n^+ - D_n^+ E_{n+1} \equiv (u_n - w_n^+) z^n (1+z), \\ D_{n+1}^+ E_n - D_n E_{n+1}^+ \equiv (u_n - w_n) z^n (1+z), \end{cases}$$

$$\text{(I)} \qquad D_{n+1}^+ E_n^+ - D_n^+ E_{n+1}^+ \equiv (u_n - w_n^+) z^n (1-z);$$

$$\text{(II)} \qquad D_{n+1} = \frac{w_n^+ - u_n}{w_n^+ - w_n}(1+z) D_n + \frac{u_n - w_n}{w_n^+ - w_n}(1-z) D_n^+,$$

$$\text{(II)} \qquad D_{n+1}^+ = \frac{w_n^+ - u_n}{w_n^+ - w_n}(1-z) D_n + \frac{u_n - w_n}{w_n^+ - w_n}(1+z) D_n^+;$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{cases} D_{n+2} \equiv (1+z) D_{n+1} - ((u_{n+1} - w_{n+1})/(u_n - w_n)) z D_n, \\ D_{n+2}^+ \equiv (1+z) D_{n+1}^+ - ((u_{n+1} - w_{n+1}^+)/(u_n - w_n^+)) z D_n^+; \end{cases}$$

$$\text{(IV)} \qquad f_n = \frac{(E_n^+ + E_n) f - (D_n^+ + D_n)}{(E_n - E_n^+) f - (D_n - D_n^+)};$$

$$\text{(V)} \qquad f_n(0) = \frac{2u_n - w_n - w_n^+}{w_n^+ - w_n};$$

$$\text{(VI)} \qquad D_n(1) < 0, \quad D_n^+(1) > 0.$$

Considérons les polynômes

$$D_1 = u_0 - z, \qquad D_2 = u_0 + (u_1/(1+u_0))z - z^2,$$
$$D_1^+ = u_0 + z, \qquad D_2^+ = u_0 + (u_1/(1-u_0))z + z^2.$$

Ils vérifient (1) (resp. (1′)), la première relation de (I), (IV) et (V) pour $n = 1$ et $n = 2$, (I), (II) et (VI) pour $n = 1$. Et l'on a $w_1 = u_0^2 - 1 < 0$ et $w_1^+ = 1 - u_0^2$. Comme $w_1^+ - w_1 > 0$ et $|f_1(0)| < 1$, on déduit de (V) pour $n = 1$ les inégalités

$$w_1 < u_1 < w_1^+.$$

De la première relation de (I) on déduit, pour $n = 2$, $2D_2(1)D_2^+(1) = w_2 - w_2^+$, et de (II) et (VI) pour $n = 1$, $D_2(1) < 0$ et $D_2^+(1) > 0$, d'où

$$w_2^+ - w_2 > 0.$$

Par suite, il découle de (V) pour $n = 2$ et de $|f_2(0)| < 1$,

$$w_2 < u_2 < w_2^+.$$

On définit alors les polynômes D_3, E_3, D_3^+, E_3^+ par les relations (III) pour $n = 1$. On a

$$(2) \qquad E_3 f - D_3 = (1+z)(E_2 f - D_2) - ((u_2 - w_2)/(u_1 - w_1))z(E_1 f - D_1).$$

Donc le développement de D_3/E_3 coïncide avec celui de f jusqu'au rang 2 et

$$E_3 f - D_3 = (u_3 - w_3)z^3 + \ldots$$

De même

$$(3) \qquad \begin{aligned} E_3^+ f - D_3^+ &= (1+z)(E_2^+ f - D_2^+) - \frac{u_2 - w_2^+}{u_1 - w_1^+}(E_1^+ f - D_1^+) \\ &= (u_3 - w_3^+)z^3 + \ldots \end{aligned}$$

On en déduit les relations (I) et (II) pour $n = 2$ ainsi que la première relation de (I) pour $n = 3$.

De (2) et (3) on déduit (IV) et (V) pour $n = 3$.

On peut donc continuer la construction précédente jusqu'au rang $n = p$. On a alors (I), (II), (VI) pour $n < p$, (III) pour $n < p - 1$, la première relation de (I), (IV) et (V) pour $n \le p$ et $w_n < u_n < w_n^+$ pour $n < p$.

(a) Supposons $|f_p(0)| > 1$. D'après (II) et (VI) pour $n = p - 1$, on a

$$(4) \qquad D_p(1) < 0 \quad \text{et} \quad D_p^+(0) > 0;$$

d'où $w_p^+ - w_p > 0$, d'après la première relation de (I) pour $n = p$.

La relation (V) pour $n = p$ entraîne alors : si $f_p(0) > 1$,

$$(5) \qquad w_p < w_p^+ < u_p$$

et si $f_p(0) < -1$,

$$u_p < w_p < w_p^+. \tag{6}$$

Par suite $D_{p+1},\ E_{p+1}, D_{p+1}^+,\ E_{p+1}^+$ peuvent être définis par (III) et l'on obtient la première relation de (I) pour $n = p+1$ ainsi que (I) et (II) pour $n < p+1$.

La $p+1$-ième fonction de Schur est dans ce cas définie par

$$f_{p+1} = z\frac{f_p(0)f_p - 1}{f_p - f_p(0)}.$$

On déduit alors de (IV), (V) et (II) pour $n = p$,

$$f_{p+1} = \frac{(E_{p+1}^+ - E_{p+1})f - (D_{p+1}^+ - D_{p+1})}{(E_{p+1}^+ + E_{p+1})f - (D_{p+1}^+ + D_{p+1})} \tag{7}$$

et

$$f_{p+1}(0) = \frac{w_{p+1}^+ - w_{p+1}}{w_{p+1}^+ + w_{p+1} - 2u_{p+1}}.$$

Le lemme appliqué à $f_p(z) - f_p(0)$ prouve que $f_{p+1}(z)$ est holomorphe et bornée par 1 dans $|z| \le 1$; par suite, $|f_{p+1}(0)| \le 1$.

Supposons d'abord $|f_{p+1}(0)| < 1$. Si $f_p(0) > 1$, on déduit de (4), (5) et (II) que

$$D_{p+1}(1) > 0,\ \ E_{p+1}(1) < 0,\ \ D_{p+1}^+(1) > 0, \quad \text{d'où } w_{p+1} - w_{p+1}^+ > 0.$$

Puisque $E_{p+1}(0) = 1$ et $E_{p+1}(1) < 0$, E_{p+1} possède au moins une racine α_{p+1}, $0 < \alpha_{p+1} < 1$. Par suite, D_{p+1} possède au moins une racine strictement supérieure à 1. Or $u_{p+1} - w_{p+1} \neq 0$ car $|f_{p+1}(0)| < 1$. Donc d'après le lemme appliqué à

$$\phi = E_{p+1}f - D_{p+1} = (u_{p+1} - w_{p+1})z^{p+1} + \dots,$$

D_{p+1} possède au moins p zéros dans $|z| < 1$. Comme D_{p+1} est de degré $p+1$, on en déduit qu'il possède exactement p zéros dans $|z| < 1$. Le lemme entraîne également $u_{p+1} - w_{p+1} > 0$. On a donc :

$$w_{p+1}^+ < w_{p+1} < u_{p+1}.$$

Si $f_p(0) < -1$, un raisonnement analogue conduirait à

$$u_{p+1} < w_{p+1}^+ < w_{p+1}.$$

Dans les deux cas, on définit D_{p+2}, E_{p+2}, D_{p+2}^+, E_{p+2}^+ par (II) et l'on trouve grâce à (II) que $D_{p+2}(1) > 0$ et $D_{p+2}^+(1) < 0$, d'où

$$w_{p+2}^+ - w_{p+2} > 0.$$

On définit alors la fonction holomorphe et bornée par 1, dans $|z| \leq 1$,

$$f_{p+2} = \frac{f_{p+1} - f_{p+1}(0)}{z(1 - f_{p+1}f_{p+1}(0))}.$$

Cette fonction vérifie (IV) et (V) pour $n = p + 2$.

D'où, si $|f_{p+2}(0)| < 1$,

$$w_{p+2} < u_{p+2} < w^+_{p+2},$$

et en poursuivant le raisonnement par récurrence

$$w_{p+h} < u_{p+h} < w^+_{p+h}, \quad 2 \leq h \leq s - p - 1.$$

Si $f_p(0) = 1$ alors $f_{p+2}(z) \equiv 1$, d'où $f = D^+_{p+2}/E^+_{p+2} = D^+_s/E^+_s$. C'est le cas $f(1) = 1$ et $w_p < u_s = w^+_s$.

Si $f_{p+2}(0) = -1$ alors $f_{p+2}(z) \equiv -1$, d'où $f = D_{p+2}/E_{p+2} = D_s/E_s$. C'est le cas $f(1) = -1$ et $w_s = u_s < w^+_s$.

On a alors dans les deux cas

$$w_n = u_n = w^+_n \quad \text{pour } n \geq s + 1.$$

Supposons $|f_p(0)| = 1$. Alors $s = p + 1$.

Le cas $f_p(0) = 1$ entraîne $u_{p+1} = w_{p+1}$ et par suite $w^+_{p+1} < w_{p+1} = u_{p+1}$. On a alors $f_{p+1}(z) \equiv 1$ et $f = D_{p+1}/E_{p+1} = D_s/E_s$ d'après (7).

Le cas $f_p(0) = -1$ entraîne $u_{p+1} = w^+_{p+1}$, puis $u_{p+1} = w^+_{p+1} < w_{p+1}$. On a alors $f_{p+1}(z) \equiv -1$ et $f = D^+_{p+1}/E^+_{p+1} = D^+_s/E^+_s$ d'après (7).

On déduit alors de (II) que

$$D^+_{p+2} = (1 + z)D^+_{p+1}, \quad D_{p+2} = (1 - z)D^+_{p+1};$$

d'où $f = D_{p+2}/E_{p+2} = D^+_{p+2}/E^+_{p+2}$, ce qui entraîne $u_n = w_n = w^+_n$ pour tout $n \geq s + 1$.

(b) Supposons $|f_p(0)| = 1$. Alors $f_p(z) = \varepsilon_p + U_p z + \ldots$ avec $\varepsilon_p = \pm 1$ et l'on considère la fonction

$$g_{p+2}(z) = \frac{(z^2 + \varepsilon_p U_p z - 1)\varepsilon_p f_p(z) - (z^2 - 1)}{\varepsilon_p(z^2 - \varepsilon_p U_p z - 1) - (z^2 - 1)f_p(z)}.$$

Le cas $\varepsilon_p = 1$ est traité dans [7]; le cas $\varepsilon_p = -1$ se traite de façon analogue. Ceci conduit aux résultats énoncés dans le théorème.

Corollaire. *Les polynômes* D_n, E_n, D^+_n, E^+_n, *lorsqu'ils existent*, *vérifient les relations* (I), (II) *et* (III).

Ceci résulte de la construction précédente.

En résumé, lorsque $f \in N_p$ *on a pour* $n \leq p$ *le même type de résultats que pour une fonction de Schur, c'est-à-dire une fonction holomorphe et bornée par* 1 *dans* $|z| \leq 1$ *et pour* $n > p$ *le même type de résultats que pour une fonction appartenant à* N_0.

Théorème 2. *Pour* $n \le p$, *les polynômes* D_n *et* D_n^+ *n'ont pas de racine dans* $]1,\infty[$.

(a) *Si* $f_p(0) > 1$, *seul* D_{p+1} *possède une unique racine* $\alpha_{p+1} \in]1,\infty[$ *et pour* $h \ge p+2$ *les polynômes* D_h (*resp.* D_h^+) *ont une unique racine* α_h (*resp.* α_h^+) *dans* $]1,\infty[$. *On a en outre*

$$1 < \alpha_{p+1} < 1/\alpha, \quad \alpha_h < 1/\alpha < \alpha_h^+, \quad p+2 \le h < s.$$

(b) *Si* $f_p(0) = 1$, *seul* D_{p+2} *possède une unique racine* α_{p+2} *dans* $]1,\infty[$ *et pour* $h \ge p+3$, D_h (*resp.* D_h^+) *possède une unique racine* α_h (*resp.* α_h^+) *dans* $]1,\infty[$. *On a en outre*

$$\alpha_{p+2} < 1/\alpha, \quad \alpha_h < 1/\alpha < \alpha_h^+, \quad p+3 \le h < s.$$

Dans les deux cas (a) *et* (b), *on a ensuite*

$$\begin{gathered} \alpha_s = 1/\alpha < \alpha_s^+ \quad \textit{si } f(1) = -1, \\ \alpha_s < 1/\alpha = \alpha_s^+ \quad \textit{si } f(1) = 1, \\ \alpha_{s+1} = 1/\alpha = \alpha_{s+1}^+. \end{gathered}$$

(c) *Si* $f_p(0) < -1$, *seul* D_{p+1}^+ *a une unique racine* α_{p+1}^+ *dans* $]1,\infty[$ *et pour* $h \ge p+2$, D_h (*resp.* D_h^+) *possède une unique racine* α_h (*resp.* α_h^+) *dans* $]1,\infty[$ *telles que*

$$1 < \alpha_{p+1}^+ < 1/\alpha, \quad \alpha_h^+ < 1/\alpha < \alpha_h, \quad p+2 \le h < s.$$

(d) *Si* $f_p(0) = -1$, D_{p+2}^+ *possède une racine unique* α_{p+2}^+ *dans* $]1,\infty[$ *et pour* $h \ge p+3$, D_h (*resp.* D_h^+) *possède une unique racine* α_h (*resp.* α_h^+) *dans* $]1,\infty[$ *telles que*

$$1 < \alpha_{p+2}^+ < 1/\alpha, \quad \alpha_h^+ < 1/\alpha < \alpha_h, \quad p+3 \le h < s.$$

Dans les cas (c) *et* (d), *on a ensuite*

$$\begin{gathered} \alpha_s^+ = 1/\alpha < \alpha_s \quad \textit{si } f(1) = 1, \\ \alpha_s^+ < \alpha_s = 1/\alpha \quad \textit{si } f(1) = -1, \\ \alpha_{s+1} = 1/\alpha = \alpha_{s+1}^+. \end{gathered}$$

Preuve. Pour $n \le p$, en appliquant le lemme à $\phi = E_n f - D_n$ (resp. $\psi = E_n^+ f - D_n^+$) on voit que les polynômes D_n et D_n^+ ont au moins $n-1$ zéros dans $|z| < 1$, donc au plus une racine dans $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[$.

Or $D_1^+(-1) < 0$ et $D_1(-1) > 0$. D'après (II), pour $n \le p$, $D_n(-1)$ (resp. $D_n^+(-1)$) est du signe de $-(-1)^n$ (resp. $(-1)^n$).

En outre, d'après la démonstration du théorème précédent,

$$\begin{gathered} D_n(1) < 0, \quad D_n^+(1) > 0, \quad D_n(\infty) = -\infty, \\ D_n^+(\infty) = \infty, \quad D_n(-\infty) = -(-1)^n\infty, \quad D_n^+(-\infty) = (-1)^n\infty. \end{gathered}$$

Par suite, D_n et D_n^+ sont sans racine dans $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[$.

Les assertions suivantes du théorème résultent de l'étude faite par Pisot lorsque $f_p(0) \geq 1$ et d'une étude tout à fait semblable lorsque $f_p(0) \leq -1$.

4. Application. Dans ce paragraphe, le surlignement désignera la conjugaison dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et non la conjugaison complexe comme dans le paragraphe précédent.

L'algorithme précédent nous permet alors de déterminer tous les $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombres de Pisot de mesure inférieure à 2,6 ainsi que tous les nombres de Pisot inférieurs à $\sqrt{2{,}6}$ dont le polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ se décompose sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

On obtient le théorème suivant.

THÉORÈME. *Les* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$*-nombres de Pisot de mesure inférieure à* 2,6 *sont par mesure croissante*, *les nombres*

- $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ *de mesure* 2, *de polynôme minimal* $z - \sqrt{2}$,
- $(1{,}53\ldots, -1{,}53\ldots)$ *de mesure* $2{,}348594\ldots$, *de polynôme minimal* $z^4 - z^2 - \sqrt{2}z - 1$,
- $(1{,}28060089\ldots, -1{,}859147\ldots)$ *de mesure* $2{,}3808255\ldots$, *de polynôme minimal* $z^4 - \sqrt{2}z^3 + z - 1$,
- $(1{,}28748786\ldots, 1{,}95218397\ldots)$ *de mesure* $2{,}51341317\ldots$, *de polynôme minimal* $z^3 + z^2(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}z - 1$,
- $(1{,}158851\ldots, -2{,}209346\ldots)$ *de mesure* $2{,}56\ldots$, *de polynôme minimal* $z^3 - (\sqrt{2} - 1)z^2 - 1$.

Les nombres de Pisot inférieurs à $\sqrt{2{,}6}$ *sont des* $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$*-nombres de Pisot.*

P r e u v e

(a) *Principe*. Soit (θ_1, θ_2) un $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Pisot et P le polynôme minimal de θ_1 sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. On peut toujours supposer $\theta_1 > 1$, sinon on considère $P(-z)$ au lieu de $P(z)$. On note A (resp. B) un majorant explicite de θ_1 (resp. $|\theta_2|$).

On considère alors $f(z) = \varepsilon P(z)/P^*(z)$ où $\varepsilon = \pm 1$ est déterminé par la condition $\varepsilon P(0) > 0$. Par suite, f possède le développement en série de Taylor au voisinage de l'origine

$$f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots + u_i z^i + \ldots, \qquad u_i \in \mathbb{Z}_K,\ u_0 > 0.$$

Soit $\bar{f}(z)$ la fraction rationnelle conjuguée

$$\bar{f}(z) = \overline{u}_0 + \overline{u}_1 z + \ldots$$

Comme $u_0 \overline{u}_0 \in \mathbb{Z}$, on a ou bien $u_0 \geq 1$, ou bien $|\overline{u}_0| \geq 1$. Par suite, l'une des cinq fonctions au moins, $f(z), \bar{f}(z), -\bar{f}(z), \bar{f}(-z), -\bar{f}(-z)$ appartient à N_0.

Supposons $f \in N_0$. D'après le théorème 1, si l'on connait les D_k et E_k pour $k \leq n$, D_{n+1} et E_{n+1} sont déterminés par (III). D'après le théorème

2, on a $u_n - w_n \geq 0$ et les inégalités $\alpha_{n+1} \leq 1/\alpha \leq A$ entraînent $D_{n+1}(A) \leq 0$. D'où

$$w_n \leq u_n \leq w_n + \frac{1+A}{A}\frac{D_n(A)}{D_{n-1}(A)}(u_{n-1} - w_{n-1}). \tag{1}$$

Si $\bar{f} \in N_0$, on a le même type d'inégalités, c'est-à-dire

$$\overline{w}_n \leq \overline{u}_n \leq \overline{w}_n + \frac{1+B}{B}\frac{\overline{D}_n(B)}{\overline{D}_{n-1}(B)}(\overline{u}_{n-1} - \overline{w}_{n-1}). \tag{2}$$

Par suite, les inégalités (1) et (2) donnent un nombre fini de valeurs possibles pour $u_n \in \mathbb{Z}_K$, puisque l'image de $\mathbb{Z}_K$ dans $\mathbb{R}^2$ par les deux plongements réels de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un réseau de $\mathbb{R}^2$.

Si $\bar{f} \in N_p$ (et l'on peut toujours se ramener à ce cas en considérant l'une des quatre fonctions $\bar{f}(z), -\bar{f}(z), \bar{f}(-z), -\bar{f}(-z)$), l'entier p est inconnu et l'on est obligé d'utiliser les inégalités les plus défavorables fournies par le théorème 2, à savoir

$$(1-\overline{u}_0)\frac{-\overline{u}_0 - B^2}{B} \leq \overline{u}_1 \leq \frac{B^2 - \overline{u}_0}{B}(1+\overline{u}_0) \tag{3}$$

et pour $n > 1$,

$$\begin{aligned}\overline{w}_n^+ - \frac{1+B}{B}\frac{\overline{D}_n^+(B)}{\overline{D}_{n-1}^+(B)}(\overline{w}_{n-1}^+ - \overline{u}_{n-1}) \\ \leq \overline{u}_n \leq \overline{w}_n + \frac{1+B}{B}\frac{\overline{D}_n(B)}{\overline{D}_{n-1}(B)}(\overline{u}_{n-1} - \overline{w}_{n-1}).\end{aligned} \tag{4}$$

Ceci fournit également un nombre fini de valeurs de u_n.

Avant d'énoncer les résultats, nous allons démontrer un lemme utile dans la détermination des familles infinies dont les plus petits éléments sont de mesure inférieure à 2,6.

Lemme. *Soit $f = A/Q \in N_0$, possédant le développement en série de Taylor au voisinage de l'origine*

$$f(z) = 1 + (a+b)z + b(a+b)z^2 + \ldots, \qquad a^2 < b^2.$$

Alors si $a^2 - b^2$ est une unité de K, la fraction rationnelle

$$\phi(z) = \frac{(1 - bz - z^2)A - (1 + az - z^2)Q}{(1 + bz - z^2)Q - (1 - az - z^2)A}$$

est holomorphe et bornée par 1 dans $|z| < 1$. Si en outre, $\overline{a}^2 < \overline{b}^2$, il en est de même de $\overline{\phi}$. Par suite, ou bien $\phi(z) \equiv \pm z^n$ ou bien $\phi \equiv 0$.

Preuve. La relation $a^2 < b^2$ entraîne $|1 - az - z^2| < |1 + bz - z^2|$ sur $|z| = 1$.

L'inégalité $|(1-az-z^2)A| < |(1+bz-z^2)Q|$ sur $|z|=1$ entraîne d'après le théorème de Rouché, que le dénominateur de ϕ possède exactement deux zéros dans $|z|<1$.

Or

$$(1+bz-z^2)Q-(1-az-z^2)A = z^2(a^2-b^2)+z^3\mu+\ldots,$$

d'où l'on déduit que

$$\phi(z)=\frac{z^3d_1+\ldots}{z^2(a^2-b^2)+\ldots}$$

est holomorphe dans $|z|\le 1$ où elle possède un développement en série entière à coefficients entiers de K puisque a^2-b^2 est une unité de K. On vérifie aisément que ϕ est bornée par 1 dans le disque unité.

Comme $\overline{a}^2<\overline{b}^2$, $\overline{\phi}$ possède les mêmes propriétés. Donc si ϕ n'est pas identiquement nulle,

$$\phi(z)=\alpha z^n+\ldots,\qquad n\ge 1,\ \alpha\in\mathbb{Z}_K.$$

En appliquant le principe du maximum à ϕ/z^n, on trouve $|\alpha|\le 1$. Par un raisonnement analogue, on obtient $|\overline{\alpha}|\le 1$; d'où $\alpha=\overline{\alpha}=\pm 1$. On a donc

$$\phi(z)=\pm z^n+\gamma z^p+\ldots;$$

l'inégalité de Parseval entraîne alors $\phi(z)=\pm z^n$.

R e m a r q u e. Ce lemme est une généralisation d'un lemme dû à Dufresnoy et Pisot [7].

(b) *Les résultats*. On a donc $u_0>0$, $1\le\theta_1|\theta_2|\le 2{,}6$. On peut supposer par exemple $\theta_1\le\sqrt{2{,}6}$. On prend alors $A=\sqrt{2{,}6}$ et $B=2{,}6$.

La fonction $h(z)=f(z)(1-\theta_1 z)/(\theta_1-z)$ étant holomorphe et bornée par 1 dans $|z|\le 1$, on a, d'après le principe du maximum, $|h(0)|=u_0/\theta_1<1$. D'où

$$0<u_0<A.$$

De même, en considérant $k(z)=\bar{f}(z)(1-\theta_2 z)/(\theta_2-z)$, on en déduit $|k(0)|=|\overline{u}_0|/|\theta_2|<1$, c'est-à-dire

$$-B\le\overline{u}_0\le B.$$

En posant $u_0=a+b\sqrt{2}$, a et b entiers rationnels, et en résolvant les inégalités précédentes, on obtient alors comme u_0 possibles :

$$u_0=1,\quad u_0=\sqrt{2}\quad\text{et}\quad u_0=\sqrt{2}-1.$$

Si $u_0=\sqrt{2}-1$, alors $-\bar{f}(z)\in N_0$ si $\theta_2>0$ et $-\bar{f}(-z)\in N_0$ si $\theta_2<0$.

Si l'on note $\overline{D}_n$ les polynômes associés selon les cas soit à $-\bar{f}(z)$ soit à $-\bar{f}(-z)$, on a dans les deux cas :

$$\overline{D}_1(z)=\sqrt{2}+1-z,\qquad \overline{w}_1=2+\sqrt{2}.$$

Par suite, $\overline{\alpha}_1 = 2{,}414\ldots$ et d'après le théorème 2, $|\theta_2| \geq 2{,}414\ldots$ L'inégalité $\theta_1|\theta_2| < 2{,}6$ entraîne $\theta_1 < 1{,}0769\ldots$

On prend alors $A = 1{,}077$ et $B = 2{,}6$.

Si $\theta_2 > 0$, on a $-\bar{f}(z) = \sqrt{2} + 1 - \overline{u}_1 z + \ldots \in N_0$.

D'après le théorème 1, $-\overline{u}_1 - \overline{w}_1 \geq 0$ et les inégalités $\overline{\alpha}_2 \leq 1/|\theta_2| \leq B$ du théorème 2 entraînent $\overline{D}_2(B) \leq 0$.

Comme $\overline{D}_2(z) = \sqrt{2} + 1 - \overline{u}_1 z/(2+\sqrt{2}) - z^2$, on obtient

$$-5{,}70\ldots \leq \overline{u}_1 \leq -(2+\sqrt{2}).$$

Or si $\theta_2 > 0$, on sait que $f(z) = \sqrt{2} - 1 + u_1 z + \ldots$ appartient à N_p pour un p positif inconnu; par suite, on peut seulement utiliser une inégalité analogue à (3) obtenue avec la borne 1,077; d'où

$$-0{,}85\ldots \leq u_1 \leq 0{,}97\ldots$$

Un raisonnement analogue peut être fait à partir de la fonction $-f(-z)$ dans le cas $\theta_2 < 0$.

On trouve alors, pour $\theta_2 > 0$,

$$-0{,}85\ldots \leq u_1 \leq 0{,}97\ldots, \qquad -5{,}70\ldots \leq \overline{u}_1 \leq -4{,}82\ldots,$$

et pour $\theta_2 < 0$,

$$-0{,}85\ldots \leq u_1 \leq 0{,}97\ldots, \qquad 4{,}82\ldots \leq \overline{u}_1 \leq 5{,}706\ldots$$

Le seul entier de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ vérifiant ces inégalités est $u_1 = 2 - \sqrt{2} = w_1$; on en déduit alors $f = (u_0 - z)/(1 - u_0 z)$ et $\theta_1 = \sqrt{2} - 1 < 1$, ce qui est impossible.

Si $u_0 = \sqrt{2}$ et si $\theta_2 > 0$, on obtient $u_1 = \sqrt{2}$ et le système est impossible pour u_2; par suite, on a seulement $\theta_2 < 0, u_1 = 1$ et $f(z) = (\sqrt{2} - z)/(1 - \sqrt{2}z)$.

On obtient alors le $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Pisot $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

Si $u_0 = 1$ et $\theta_2 > 0$ on obtient $u_1 = 1$ ou $u_1 = 2 - \sqrt{2}$ ou $u_1 = 3 - \sqrt{2}$, tandis que si $\theta_2 < 0$, on a $u_1 = \sqrt{2}$ ou $u_1 = \sqrt{2} - 1$ ou $u_1 = 2\sqrt{2} - 1$.

(A) Supposons $\theta_2 < 0$.

(α) Le cas $u_1 = 2\sqrt{2} - 1$ est impossible car il fournirait des nombres de trop grande mesure.

(β) Le cas $u_1 = \sqrt{2}$ donne ou bien le cas impossible $u_2 = 1$ ou bien $u_2 = 2$, d'où $u_3 = 2\sqrt{2}$, puis ou bien $u_4 = 4$ ou bien $u_4 = 5$.

Le cas $u_4 = 4$ donne

$$f(z) = \frac{1 + \sqrt{2}z + z^2 - z^4}{1 - z^2 - \sqrt{2}z^3 - z^4}$$

et l'on obtient le $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Pisot $(1{,}53\ldots, -1{,}53\ldots)$ de mesure le nombre de Pisot $\mu = 2{,}348594\ldots$

Le cas $u_4 = 5$ donne $u_5 = 5\sqrt{2}$, puis $u_6 = 11$ ou 12; mais ces deux derniers cas sont impossibles; en effet, si $u_6 = 11 = w_6$, on obtient $f = D_6/E_6$ et si

$u_6 = 12 = w_6^+$, on a $f = D_6^+/E_6^+$ mais les coefficients des polynômes D_6 et D_6^+ n'appartiennent pas à l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

(γ) Le cas $u_1 = \sqrt{2}-1$ donne ou bien $u_2 = 2-\sqrt{2}$ ou bien $u_2 = 3-2\sqrt{2}$.

(i) Si $(u_0, u_1, u_2, \ldots) = (1, \sqrt{2}-1, 2-\sqrt{2}, \ldots)$, on obtient, grâce au lemme, la famille infinie de fractions rationnelles

$$f_n = \frac{z^n(1+\sqrt{2}z-z^2)+\varepsilon(1-z-z^2)}{z^n(1+z-z^2)+\varepsilon(1-\sqrt{2}z-z^2)} \tag{1}$$

qui tend pour $n \to \infty$ vers la fraction rationnelle

$$f = \frac{1-z-z^2}{1-\sqrt{2}z-z^2}$$

associée au $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Pisot $(1{,}93\ldots, -1{,}93\ldots) = ((\sqrt{2}+\sqrt{6})/2, -(\sqrt{2}+\sqrt{6})/2)$ de mesure $\nu = 2+\sqrt{3} = 3{,}73\ldots$ racine du polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$,

$$X^2 - 4X + 1 = (X-(2+\sqrt{3}))(X-(2-\sqrt{3})).$$

Par suite, ν est un nombre de Pisot tel que $(\sqrt{\nu}, -\sqrt{\nu})$ appartienne à l'ensemble dérivé de l'ensemble des entiers algébriques de module > 1 ayant exactement un autre conjugué de module supérieur à 1 et tous les autres conjugués de module strictement inférieur à 1.

Si l'on note pour simplifier $M(f_n)$ la mesure du $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Pisot associé à la fraction rationnelle f_n, on obtient une suite de nombres de Perron $M(f_n)$ (cf. [5]) tendant vers le nombre de Pisot $2+\sqrt{3}$.

De plus, si l'on désigne par α_n le zéro de plus grand module de f_n, la suite (α_n) est une suite de nombres de Perron tendant vers le nombre $\sqrt{\nu}$ qui n'est pas un nombre de Perron.

Enfin les $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombres de Pisot appartenant à la famille (1) et de mesure inférieure à 2,6 sont

- $(1{,}28060099\ldots, -1{,}85\ldots)$ de polynôme minimal sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $1-z+\sqrt{2}z^3-z^4$, de mesure $2{,}38\ldots$ obtenu pour $\varepsilon = 1$ et $n = 2$,
- $(1{,}15\ldots, -2{,}20\ldots)$ de polynôme minimal $1-(1-\sqrt{2})z-z^3$, de mesure $2{,}56\ldots$ obtenu pour $\varepsilon = 1$ et $n = 1$.

(ii) Si $(u_0, u_1, u_2, \ldots) = (1, \sqrt{2}-1, 3-2\sqrt{2}, \ldots)$ on trouve, grâce au lemme, la famille infinie

$$f_n = \frac{z^n(1+(\sqrt{2}-1)z-z^2)+\varepsilon(1-z^2)}{z^n(1-z^2)+\varepsilon(1-(\sqrt{2}-1)z-z^2)} \tag{2}$$

qui tend vers la fraction rationnelle

$$f = \frac{1-z^2}{1-(\sqrt{2}-1)z-z^2}$$

associée au $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Pisot $(1{,}23\ldots, -2{,}77\ldots)$ de mesure $3{,}40\ldots$

Cependant, tous les $\mathbb{Q}$-nombres de Pisot de cette famille ont une mesure supérieure à 2,6.

(B) Supposons $\theta_2 > 0$. Le cas $u_1 = 3 - \sqrt{2}$ donne des nombres de trop grande mesure et le cas $u_1 = 2 - \sqrt{2}$ donne $u_2 = w_2 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $f = D_2/E_2$ avec $D_2 = 1 + (2 - \sqrt{2})z/2 - z^2$; par suite, ces deux cas sont impossibles.

Il reste donc $u_1 = 1$, qui donne ou bien $u_2 = 1$ ou $u_2 = 2$ ou $u_2 = 2 - \sqrt{2}$.

Le cas $(1, 1, 1, \ldots)$ donne, grâce au lemme, la famille infinie de nombres de Pisot associée à la suite

$$f_n = \frac{1 - z^2 + \varepsilon z^n(1 + z - z^2)}{1 - z - z^2 + \varepsilon z^n(1 - z^2)}$$

et tendant vers le nombre d'or $(\sqrt{5} + 1)/2$ (cf. [7]).

On obtient les nombres de Pisot de cette famille inférieurs à $\sqrt{2{,}6}$, pour $\varepsilon = 1$ et $n \le 20$.

Le cas $(1, 1, 2, \ldots)$ donne le nombre de Pisot $\theta'' = 1{,}561752\ldots$ racine du polynôme $1 - z + z^2 - z^4 + 2z^5 - z^6$ ainsi que la deuxième famille infinie de nombres de Pisot tendant vers le nombre d'or, c'est-à-dire les racines supérieures à 1 des polynômes

$$(z^{2n}(1 + z - z^2) - 1)/(z - 1) \quad \text{et} \quad (z^{2n+1}(1 + z - z^2) - 1)/(z^2 - 1).$$

Ces nombres sont de mesure inférieure à $\sqrt{2{,}6}$ pour $n \le 4$.

Enfin le cas $(1, 1, 2 - \sqrt{2}, \ldots)$ donne grâce au lemme la famille infinie de fractions rationnelles

$$f_n = \frac{z^n(1 + (2 - \sqrt{2})z - z^2) + \varepsilon(1 + (\sqrt{2} - 1)z - z^2)}{z^n(1 - (\sqrt{2} - 1)z - z^2) + \varepsilon(1 - (2 - \sqrt{2})z - z^2)}$$

tendant vers la fraction rationnelle

$$f = \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)z - z^2}{1 - (2 - \sqrt{2})z - z^2}$$

associée au $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Pisot $(1{,}33490399\ldots, 3{,}68554393\ldots)$.

Le seul $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombre de Pisot de mesure inférieure à 2,6 appartenant à cette famille est le nombre obtenu pour $n = 1$ et $\varepsilon = 1$, $(1{,}28748786\ldots, 1{,}95218397\ldots)$ de mesure $2{,}51341317\ldots$ de polynôme minimal $z^3 + z^2(\sqrt{2} - 1) - \sqrt{2}z - 1$.

L'étude précédente nous ayant donné tous les polynômes unitaires à coefficients entiers rationnels irréductibles ayant deux (resp. une) racines réelles hors du disque unité et les autres racines à l'intérieur du disque unité, de mesure inférieure à 2,6 (resp. inférieure à $\sqrt{2{,}6}$) et se décomposant sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, on en déduit que tous les nombres de Pisot inférieurs à $\sqrt{2{,}6}$ sont des $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$-nombres de Pisot, i.e. leur polynôme minimal sur $\mathbb{Q}$ reste irréductible sur $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Ceci achève la preuve du théorème.

Références

[1] A.-M. Bergé et J. Martinet, *Notions relatives de régulateurs et de hauteurs*, Acta Arith. 54 (1989), 155–170.

[2] M. J. Bertin, *Hauteurs et nombres de Pisot relatifs*, Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, Paris, 1990.

[3] —, *K-nombres de Pisot et de Salem*, dans : Advances in Number Theory, F. Gouvêa and N. Yui (eds.), Oxford Science Publications, 1993, 391–397.

[4] D. W. Boyd, *Reciprocal polynomials having small measure*, Math. Comp. 35 (1980), 1361–1377.

[5] —, *Inverse problems for Mahler's measure*, dans: London Math. Soc. Lecture Note Ser. 109, Cambridge Univ. Press, 1986, 147–158.

[6] Ch. Chamfy, *Fonctions méromorphes dans le cercle-unité et leurs séries de Taylor*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 8 (1958), 211–261.

[7] J. Dufresnoy et Ch. Pisot, *Etude de certaines fonctions méromorphes bornées sur le cercle unité. Application à un ensemble fermé d'entiers algébriques*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 72 (1955), 69–92.

[8] Ch. Pisot, *Répartition* (mod 1) *des puissances successives des nombres réels*, Comment. Math. Helv. 19 (1947), 153–160.

UNIVERSITÉ DE PARIS VI
MATHÉMATIQUES
4, PLACE JUSSIEU
75252 PARIS CEDEX 05, FRANCE

Reçu le 17.2.1993
et révisé le 26.10.1993 (2378)