ACTA ARITHMETICA
LXVIII.1 (1994)

Itération de polynômes et fonctions entières arithmétiques

par

JEAN-PAUL BÉZIVIN (Caen)

I. Introduction. Soit $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe. On dit que $f(z)$ est *arithmétique au sens de Pólya*, si on a $f(n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Un théorème de Pólya montre que si la croissance de f n'est pas trop grande, $f(z)$ est polynômiale ([PO]) :

THÉORÈME P. *Soit $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe. On pose $|f|(R) = \max(|f(z)| : z \in \mathbb{C},\ |z| \le R)$. Si on a, pour tout R assez grand,*

$$\log |f|(R) \le \delta R$$

avec $\delta < \log 2$, alors $f(z)$ est un polynôme.

Soit q un nombre entier naturel, avec $|q| > 1$. On suppose que la fonction $f(z)$ est telle que $f(q^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Un théorème de Gel'fond montre que, si la croissance de $f(z)$ n'est pas trop grande, $f(z)$ est un polynôme ([GU], théorème VIII, p. 179) :

THÉORÈME G. *Soit $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe z. Soit $q \in \mathbb{Z}$, $|q| > 1$. On suppose que $f(q^n) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que l'on a*

$$\log |f|(R) \le \frac{(\log R)^2}{4 \log |q|} - \frac{\log R}{2} - \omega(R)$$

pour tout R assez grand, où $\omega(R)$ est une fonction tendant vers l'infini si R tend vers l'infini. Alors $f(z)$ est un polynôme.

Dans cet article, nous allons obtenir une généralisation des deux résultats que nous venons de citer.

Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$, que nous supposerons dans tout le reste de l'article de degré ≥ 1. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 1$, on note $P^{[n]}$ le composé de $P(x)$ n fois avec lui-même, et par convention $P^{[0]}(x) = x$. Soit $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe, et $z \in \mathbb{Z}$. Nous supposons que

$$f(P^{[n]}(z)) \in \mathbb{Z}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On se propose de donner des conditions sur la croissance de f pour que cette condition implique que f est un polynôme.

Pour voir le rapport avec les théorèmes P et G, nous examinons deux cas particuliers.

Dans le cas où le polynôme P est égal à $x+1$, on voit que $P^{[n]}(x) = x+n$. Il en résulte que pour la valeur $z = 0$, les fonctions arithmétiques relative à ce polynôme et ce point sont les fonctions arithmétiques au sens de Pólya.

Dans le cas où le polynôme P est égal à qx, où q est un élément de $\mathbb{Z}$ tel que $|q| > 1$, on voit que $P^{[n]}(x) = q^n x$. Il en résulte que, pour le choix de $z = 1$, les fonctions arithmétiques relative à ce polynôme et ce point sont les fonctions arithmétiques au sens de Gel'fond.

Il est facile de voir que le cas où le polynôme P est de degré 1 se ramène en fait à l'un ou l'autre de ces deux cas.

Nous ferons désormais l'hypothèse que le degré de P est plus grand que 1, sauf mention expresse du contraire.

Nous ferons dans tout l'article l'hypothèse que le point z est choisi de façon que pour $k, j \in \mathbb{N}$, avec $k \neq j$, on ait $P^{[k]}(z) \neq P^{[j]}(z)$.

Nous notons le degré du polynôme P par d, et $L = L(z, P)$ la fonction de Green du bassin d'attraction du point à l'infini pour le polynôme P (cf. [BEGEMO]).

Il est facile de voir que la condition précédente sur z est vérifiée pour $|z|$ assez grand. Il résultera du lemme 2.10 qu'il faut et il suffit pour qu'il en soit ainsi que le point z ne soit pas dans l'ensemble de Julia rempli K_P associé à P.

Notre but principal est le résultat suivant :

Théorème 1. *Soit $f(z)$ une fonction entière d'une variable complexe, et $P \in \mathbb{Z}[x]$, de degré $d \geq 2$, $z \in \mathbb{Z}$ vérifiant les hypothèses précédentes. On suppose que $f(P^{[n]}(z)) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et de plus que l'on a la majoration*

$$\log|f|(R) \leq \frac{\log R \log\log R - \log R \log\log\log R}{\log d} - \lambda \log R$$

pour tout R assez grand, avec

$$\lambda > \frac{L}{d} - \frac{\log\log d}{\log d}.$$

Alors f est un polynôme.

La démonstration utilise la méthode de la série d'interpolation, qui est à la base des démonstrations des théorèmes P et G.

Nous montrerons de plus que le résultat, comme ceux des théorèmes P et G, est le meilleur possible :

PROPOSITION 2. *La fonction*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=0}^{k-1}(x-P^{[j]}(z))}{\prod_{j=0}^{k-1}(P^{[k]}(z)-P^{[j]}(z))}$$

est une fonction entière de la variable complexe x, non polynômiale, telle que

$$\log|f|(R)\le\frac{\log R\log\log R-\log R\log\log\log R}{\log d}+O(\log R)$$

pour tout R assez grand, et vérifie $f(P^{[n]}(z))\in\mathbb{Z}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

COROLLAIRE 3. *Soit $d\in\mathbb{Z}$, $d\ge 2$ et $z\in\mathbb{Z}$, $|z|>1$. Soit $f(x)$ une fonction entière de la variable complexe x. On suppose que $f(z^{d^n})\in\mathbb{Z}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, et que f vérifie l'estimation*

$$\log|f|(R)\le\frac{\log R\log\log R-\log R\log\log\log R}{\log d}-\lambda\log R$$

pour tout R assez grand, avec

$$\lambda>\frac{\log|z|}{d}-\frac{\log\log d}{\log d}.$$

Alors f est un polynôme.

COROLLAIRE 4. *Soit $z\in\mathbb{Z}$, $|z|\ge 3$. Soit ω la racine de module plus grand que 1 de l'équation $X^2-(z/2)X+1=0$. Soit $f(x)$ une fonction entière d'une variable complexe telle que $f(\omega^{2^n}+\omega^{-2^n})\in\mathbb{Z}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. On suppose de plus que f vérifie l'estimation*

$$\log|f|(R)\le\frac{\log R\log\log R-\log R\log\log\log R}{\log 2}-\lambda\log R$$

pour tout R assez grand, avec

$$\lambda>\frac{\log\left|\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right|}{2}-\frac{\log\log 2}{\log 2}.$$

Alors f est un polynôme.

Remarque. Dans tout le texte, un produit sur un ensemble vide d'indices sera pris égal à 1, et une somme sur un ensemble vide d'indices à zéro.

II. Lemmes préliminaires. Soit A un anneau commutatif intègre unitaire, et $P\in A[x]$ un polynôme de degré $d\ge 1$. Soit n un entier naturel et

$k \in \{0, \ldots, n\}$. On pose

$$Q_{k,n}(x) = \prod_{0 \le j \le n, j \ne k} (P^{[j]}(x) - P^{[k]}(x)).$$

Il est facile de voir que le polynôme $Q_{k,n}(x)$ ne peut être nul que si P est de la forme $P(x) = x$ ou $P(x) = ax + b$ avec a racine de l'unité différente de 1 et b quelconque (auquel cas on a $P^{[n]}(x) = x$ si $a^n = 1$). Nous supposerons dans toute la suite que P n'est pas de cette forme. On a alors le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Tous les polynômes $Q_{k,n}(x)$, $k = 0, \ldots, n$, divisent le polynôme $Q_{n,n}(x)$ dans $A[x]$.*

Remarque. La proposition 2.1 ci-dessus nous paraît avoir un intérêt propre. Elle contient comme cas particuliers les lemmes de nature analogue utilisés dans les démonstrations des théorèmes P et G.

Le démonstration de la proposition 2.1 résultera des lemmes qui suivent.

Nous supposons tout d'abord que le degré d de P est supérieur ou égal à 2, et nous éliminerons cette restriction à la fin de la démonstration. Pour les lemmes 2.2 à 2.6, l'anneau A est pris égal à $\mathbb{C}$.

Lemme 2.2. *Soit ω un nombre complexe. On suppose qu'il existe un entier non nul m tel que $P^{[m]}(\omega) = \omega$. Alors il existe un plus petit entier $l = l(\omega) \ge 1$ tel que l'on ait $P^{[l]}(\omega) = \omega$; nous dirons que $l(\omega)$ est l'ordre de ω. De plus, une égalité $P^{[m]}(\omega) = \omega$ avec $m \ge 1$ implique que l divise m.*

Démonstration. Seule est à démontrer la seconde affirmation, la première étant claire. Posons $m = kl+r$ avec $0 \le r < l$. On a immédiatement que $P^{[r]}(\omega) = \omega$, et la définition de $l(\omega)$ implique alors $r = 0$ et le résultat.

Lemme 2.3. *Soit $z \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$. On suppose que $\omega_k = P^{[k]}(z)$ a un ordre. Les indices $j \in \mathbb{N}$ tels que $P^{[k]}(z) = P^{[j]}(z)$ sont de la forme $j = j_0 + hl(\omega_k)$, où j_0 est le plus petit d'entre eux, et $h \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. Il est clair que si j_0 est un entier tel que $P^{[k]}(z) = P^{[j_0]}(z)$, alors tout entier j de la forme $j = j_0 + hl$ vérifie aussi une telle égalité. Réciproquement, soit j un entier tel que $P^{[k]}(z) = P^{[j]}(z)$; posons $j - j_0 = hl + r$ avec $0 \le r < l$. On a $h \in \mathbb{N}$ en raison de la définition de j_0, de sorte que

$$P^{[j]}(z) = P^{[r]}(P^{[hl]}(P^{[j_0]}(z))) = P^{[r]}(P^{[hl]}(P^{[k]}(z))) = P^{[r]}(P^{[j_0]}(z)).$$

Comme $P^{[j]}(z) = P^{[j_0]}(z) = P^{[k]}(z)$, il vient $P^{[r]}(\omega_k) = \omega_k$, et donc $r = 0$ d'après la définition de $l(\omega_k)$.

Lemme 2.4. *Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé. On suppose qu'il existe un entier $N \ge 1$ tel que $\omega_N = P^{[N]}(z)$ ait un ordre. Alors la fonction $k \to l(P^{[k]}(z))$ est définie et décroissante pour $k \ge N$.*

D é m o n s t r a t i o n. Soit $l = l(\omega_N)$. On a donc $P^{[l]}(\omega_N) = \omega_N$, et par suite, en composant avec un polynôme $P^{[h]}$ il vient $P^{[l]}(\omega_{N+h}) = \omega_{N+h}$; ceci démontre que ω_{N+h} a un ordre et que celui-ci divise l d'après le lemme 2.2, d'où le résultat.

LEMME 2.5. *Soit $z \in \mathbb{C}$. On note $M(z,k)$ la multiplicité de la racine z dans le polynôme $P^{[k]}(x)-P^{[k]}(z)$. Alors $M(z,k)$ est une fonction croissante de k.*

D é m o n s t r a t i o n. On peut écrire

$$P(U) - P(V) = (U - V)Q(U,V)$$

où $Q(U,V)$ est un polynôme des deux variables U, V. On en déduit que

$$P^{[k+1]}(x) - P^{[k+1]}(z) = (P^{[k]}(x) - P^{[k]}(z))Q(P^{[k]}(x), P^{[k]}(z))$$

et le lemme en résulte.

LEMME 2.6. *Le résultat de la proposition* 2.1 *est vrai dans le cas où $A = \mathbb{C}$, et sous l'hypothèse supplémentaire que tous les polynômes $P^{[k]}(x)-x$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, n'aient pas de racines multiples dans $\mathbb{C}$.*

D é m o n s t r a t i o n. On fixe un entier n et un entier k tel que $0 \leq k \leq n$. On peut clairement supposer que $k < n$. Soit $z \in \mathbb{C}$ une racine de $Q_{k,n}(x)$. Alors il existe un indice j tel que $P^{[k]}(z) = P^{[j]}(z)$ avec $j \neq k$. En composant par un polynôme de la forme $P^{[h]}(x)$ pour un h convenable, on montre qu'il existe un entier $j' < n$ tel que $P^{[n]}(z) = P^{[j']}(z)$, donc z est racine du polynôme $Q_{n,n}(x)$.

Nous allons maintenant démontrer que la multiplicité de z dans $Q_{k,n}(x)$ est inférieure ou égale à la multiplicité de z dans $Q_{n,n}(x)$.

Considérons tout d'abord un indice j tel que $0 \leq j < k$, avec $P^{[k]}(z) = P^{[j]}(z)$. On écrit

$$P^{[k]}(x) - P^{[j]}(x) = P^{[k-j]}(P^{[j]}(x)) - P^{[j]}(x).$$

Le polynôme $P^{[k-j]}(x) - x$ n'ayant que des racines simples, il en résulte que la multiplicité de z dans le polynôme $P^{[k]}(x) - P^{[j]}(x)$ est égale à la multiplicité de z dans le polynôme $P^{[j]}(x) - P^{[j]}(z)$.

Un raisonnement analogue montre que la multiplicité de z dans $P^{[k]}(x) - P^{[j]}(x)$ quand $j > k$ est égale à celle de z dans $P^{[k]}(x) - P^{[k]}(z)$.

On rappelle que $M(z,m)$ est la multiplicité de z dans $P^{[m]}(x) - P^{[m]}(z)$. D'après ce qui précède, la multiplicité de z dans $Q_{k,n}(x)$ est

$$\sum_{0 \leq j < k, P^{[k]}(z) = P^{[j]}(z)} M(z,j) + \sum_{k < j \leq n, P^{[k]}(z) = P^{[j]}(z)} M(z,k),$$

tandis que la multiplicité de z dans $Q_{n,n}(x)$ est

$$\sum_{0\le j'<n, P^{[n]}(z)=P^{[j']}(z)} M(z,j').$$

Considérons un entier j tel que $k<j\le n$ et $P^{[k]}(z)=P^{[j]}(z)$. En composant avec $P^{[n-j]}(x)$, il vient $P^{[n]}(z)=P^{[n-j+k]}(z)$. Posons $j'=n-j+k$. On a $j'\ge k$ car $n\ge j$, et $j'<n$ car $j>k$.

Le lemme 2.5 montre que $M(z,k)\le M(z,j')$, donc

$$\sum_{k<j\le n, P^{[k]}(z)=P^{[j]}(z)} M(z,k) \le \sum_{k\le j'<n, P^{[n]}(z)=P^{[j']}(z)} M(z,j').$$

Il nous reste à démontrer que

$$\sum_{0\le j<k, P^{[k]}(z)=P^{[j]}(z)} M(z,j) \le \sum_{0\le j'<k, P^{[n]}(z)=P^{[j']}(z)} M(z,j').$$

Soit j_0 le premier indice ≥ 0 tel que $P^{[j]}(z)=P^{[k]}(z)$. Si $j_0=k$, il n'y a rien à démontrer, de sorte que nous pouvons supposer $j_0<k$. Le lemme 2.3 montre que les entiers j sur lesquels se fait la première sommation sont les entiers j de la forme $j=j_0+hl$ avec $l=l(P^{[k]}(z))$ et $0\le h<(k-j_0)/l\in\mathbb{N}$. Posons $n-j_0=\alpha l+\beta$ avec $\alpha\in\mathbb{N}$ et $\beta\in\mathbb{N}$, $0\le\beta<l$. On a alors

$$P^{[n]}(z)=P^{[j_0+\alpha l+\beta]}(z)=P^{[\beta]}(P^{[\alpha l]}(P^{[j_0]}(z)))=P^{[j_0+\beta]}(z),$$

ce qui montre que $j_0'=j_0+\beta$ est un indice tel que $P^{[j_0']}(z)=P^{[n]}(z)$. Pour $h<(k-j_0)/l$, on pose $j'=j_0'+hl$. On a $j'\ge 0$, $j'\ge j=j_0+hl$, et d'autre part,

$$j'=j_0+\beta+hl\le j_0+\beta+\left(\frac{k-j_0}{l}-1\right)l=k+\beta-l<k.$$

Enfin, on a

$$P^{[j']}(z)=P^{[j_0+\beta+hl]}(z)=P^{[\beta]}(P^{[hl]}(P^{[j_0]}(z)))=P^{[\beta+j_0]}(z)=P^{[n]}(z).$$

En utilisant encore la croissance de la fonction $m\to M(z,m)$, il en résulte

$$\sum_{0\le j<k, P^{[k]}(z)=P^{[j]}(z)} M(z,j) \le \sum_{0\le j'<k, P^{[n]}(z)=P^{[j']}(z)} M(z,j'),$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Nous fixons un entier $d\ge 2$, et nous considérons dans $\mathbb{Z}[t_0,\dots,t_d,x]$ le polynôme $P(x)=t_dx^d+\dots+t_0$.

Lemme 2.7. *Pour $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 1$, le discriminant de $P^{[k]}(x)-x$ est une fonction polynômiale de $t_0,\dots,t_d$, qui n'est pas identiquement nulle.*

D é m o n s t r a t i o n. Le fait que le discriminant en question soit une fonction polynômiale de $t_0, \dots, t_d$ vient du fait que le discriminant d'un polynôme est fonction polynômiale de ses coefficients, et que les coefficients de $P^{[k]}(x) - x$ sont des fonctions polynômiales de $t_0, \dots, t_d$.

Pour prouver que ce discriminant est un polynôme non nul, il suffit de donner un exemple. Posons $P(x) = (1+x)^d - 1$. Ce polynôme est de degré exactement d, et on a la formule

$$P^{[k]}(x) = (1+x)^{d^k} - 1.$$

Un calcul immédiat montre que $P^{[k]}(x) - x$ n'a pas de racines multiples dans $\mathbb{C}$, d'où le résultat.

D é m o n s t r a t i o n d e l a p r o p o s i t i o n 2.1. Soient $t_0, \dots, t_d$ des variables. Il suffit de démontrer ce résultat dans le cas de $A = \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_d]$, pour le polynôme $P(x) = t_d x^d + \ldots + t_0$. Nous fixons un entier n non nul, et un entier $k \in \{0, \dots, n\}$, et nous effectuons la division euclidienne de $Q_{n,n}(x)$ par $Q_{k,n}(x)$ dans l'anneau $\mathbb{Q}(t_0, \dots, t_d)[x]$. On a

$$Q_{n,n}(x) = H_{k,n}(x) Q_{k,n}(x) + R_{k,n}(x),$$

le degré en x du polynôme $R_{k,n}$ étant inférieur à celui de $Q_{k,n}$. Les coefficients de $H_{k,n}(x)$ et de $R_{k,n}(x)$ sont des fonctions rationnelles des variables $t_0, \dots, t_d$. Soit $B(t_0, \dots, t_d) \in \mathbb{Z}[t_0, \dots, t_d]$ le plus petit commun multiple des dénominateurs de ces coefficients, et posons

$$\overline{H}_{k,n}(x) = B(t_0, \dots, t_d) H_{k,n}(x)$$

et

$$\overline{R}_{k,n}(x) = B(t_0, \dots, t_d) R_{k,n}(x).$$

On a

$$B(t_0, \dots, t_d) Q_{k,n}(x) = \overline{H}_{k,n}(x) Q_{k,n}(x) + \overline{R}_{k,n}(x),$$

l'égalité ayant lieu dans $\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_d, x]$. On spécialise maintenant les variables $t_0, \dots, t_d$ en $a_0, \dots, a_d$ dans $\mathbb{C}$, de façon que l'on ait a_d non nul, $B(a_0, \dots, a_d)$ non nul, que le discriminant des $P^{[i]}(x) - x$, $1 \leq i \leq n$, après spécialisation, soit non nul (ce qui est possible d'après le résultat du lemme 2.7). Le polynôme spécialisé $\overline{P}$ vérifie alors les hypothèses du lemme 2.6. Par suite, le polynôme $\overline{R}_{k,n}(x)$ spécialisé est nul, pour tout choix d'une telle spécialisation. Le polynôme $\overline{R}_{k,n}(x)$ est donc le polynôme nul. Il en résulte que $Q_{k,n}(x)$ divise le polynôme $Q_{n,n}(x)$ dans $\mathbb{Q}(t_0, \dots, t_d)[x]$.

Les coefficients de $Q_{k,n}(x)$ sont des éléments de l'anneau factoriel $\mathbb{Z}[t_0, \dots, t_d]$ premiers entre eux dans leur ensemble. Pour le voir, il suffit de remarquer que le coefficient du terme de plus haut degré dans $Q_{k,n}(x)$ est une puissance de t_d, et que si on fait $t_d = 0$, sans changer les autres variables $t_0, \dots, t_{d-1}$, on trouve un polynôme non nul. Il existe donc au moins un coefficient de $Q_{k,n}(x)$ qui est premier à t_d, d'où le résultat.

Il en résulte que $Q_{k,n}(x)$ divise $Q_{n,n}(x)$ dans l'anneau $\mathbb{Z}[t_0,\dots,t_d][x]$, ce qui termine la démonstration de la proposition 2.1 dans le cas d'un degré $d \geq 2$. Mais il est clair que l'on obtient le cas $d=1$ à partir du cas $d=2$ en faisant $t_2=0$ dans les formules précédentes, ce qui complète la démonstration.

On note dans toute la suite $b(n)$ le n-ième coefficient d'interpolation de la fonction entière $f(z)$ sur la suite $u(n)=P^{[n]}(z)$.

Les résultats suivants sont bien connus (cf. [GU], p. 34, formule 54, et p. 163–164, formules 122 et 123) :

Lemme 2.8. *Le coefficient $b(n)$ est donné par les deux expressions suivantes* :

(i) $$b(n)=\frac{1}{2i\pi}\int_{|t|=R}\frac{f(t)}{\prod_{j=0}^{n}(t-u(j))}\,dt$$

pour tout $R>\max\{|u(j)| : j=0,\dots,n\}$,

(ii) $$b(n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f(u(k))}{\prod_{j\neq k,0\leq j\leq n}(u(k)-u(j))}.$$

Lemme 2.9. *On a la formule suivante* :

$$f(x) =\sum_{k=0}^{n}b(k)\prod_{j=0}^{k-1}(x-u(j))+\frac{1}{2i\pi}\prod_{j=0}^{n}(x-u(j))\int_{|t|=R}\frac{f(t)}{(t-x)\prod_{j=0}^{n}(t-u(j))}\,dt$$

pour $x\in\mathbb{C}$ *et* $R>\max\{|x|,|u(j)| : j=0,\dots,n\}$.

Lemme 2.10. *Soit $z\in\mathbb{Z}$ tel que pour $k\neq j$ on ait $P^{[k]}(z)\neq P^{[j]}(z)$. Alors la suite $|P^{[n]}(z)|$ tend vers l'infini si n tend vers l'infini.*

Démonstration. Si la suite $|u(n)|$ d'éléments de $\mathbb{N}$ est bornée, elle prend un nombre fini de valeurs et ne peut donc pas être injective.

Puisque le polynôme $P(x)$ est de degré ≥ 2, il existe un réel positif A tel que $x\in\mathbb{C}, |x|>A$ implique $|P(x)|>2|x|$.

Soit alors N un entier tel que $|u(N)|>A$. Une récurrence immédiate montre que $|u(N+m)|\geq 2^m|u(N)|$ pour tout $m\in\mathbb{N}$, d'où le lemme.

Lemme 2.11. *Soit $z\in\mathbb{C}$, on suppose la suite $u(n)=P^{[n]}(z)$ injective. Il existe alors une constante $L>0$ telle que*

$$\log|u(n)|=Ld^n+O(1)$$

si n tend vers l'infini. La constante L n'est autre que la valeur au point z de la fonction de Green du bassin d'attraction du point à l'infini pour le polynôme P.

Démonstration. On a $u(n+1) = P(u(n))$, et on sait d'après le lemme 2.10 que la suite $|u(n)|$ tend vers l'infini. Posons $P(x) = qx^d + \dots$ Il en résulte que, si $v(n) = \log |u(n)|$, on a la relation

$$v(n+1) = dv(n) + \log |q| + \varepsilon(n)$$

pour tout n assez grand, la suite $\varepsilon(n)$ étant de limite nulle à l'infini. Posons $w(n) = v(n)/d^n$. On a alors

$$w(n+1) = w(n) + \frac{\log |q| + \varepsilon(n)}{d^{n+1}},$$

d'où, pour un entier convenable N,

$$w(n) = w(N) + \sum_{k=N}^{n-1} \frac{\log |q| + \varepsilon(k)}{d^{k+1}}.$$

On voit immédiatement que la série au second membre de l'égalité précédente converge, de sorte que $w(n)$ admet une limite finie, que nous notons L. De plus, on a l'égalité

$$w(n) - L = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\log |q| + \varepsilon(k)}{d^{k+1}},$$

d'où on déduit qu'il existe une constante positive c telle que

$$|w(n) - L| \le c/d^{n+1}.$$

En reprenant l'égalité $v(n) = w(n)d^n$, on voit que l'on a démontré l'estimation du lemme, à l'exception de la positivité de la constante L. Or, si celle-ci est négative ou nulle, il résulte de ce qui précède que la suite $|u(n)|$ ne tend pas vers l'infini si n tend vers l'infini, ce qui démontre cette assertion. La valeur de la constante L résulte immédiatement de la définition de la fonction de Green (cf. [BEGEMO], p. 283, formule 5).

LEMME 2.12. *Pour $z \in \mathbb{Z}$ tel que la suite $u(n) = P^{[n]}(z)$ soit injective, on a*

$$\log |Q_{n,n}(z)| = nLd^n + O(n)$$

si n tend vers l'infini.

Démonstration. On a

$$\log |Q_{n,n}(z)| = \sum_{0 \le j < n} \log |u(n) - u(j)|.$$

En prenant n assez grand pour que $u(n) \neq 0$, il vient donc

$$\log |Q_{n,n}(z)| = n \log |u(n)| + \sum_{0 \le j < n} \log \left| 1 - \frac{u(j)}{u(n)} \right|.$$

On a déjà vu que, pour un entier N assez grand, on a une inégalité de la forme $|u(N+m)| \geq 2^m |u(N)|$, ce qui permet de majorer la somme au second membre de l'égalité précédente par une constante indépendante de n.

Le lemme résulte alors immédiatement du lemme 2.11.

Lemme 2.13. *Soit $f(x)$ une fonction entière d'une variable complexe, et $z \in \mathbb{Z}$. On suppose que la suite $u(n) = P^{[n]}(z)$ est injective et que f vérifie l'estimation*

$$\log |f|(R) \leq \frac{\log R \log\log R - \log R \log\log\log R}{\log d} - \mu \log R$$

avec $\mu > -(\log\log d)/\log d$. Alors f est somme de sa série de Newton aux points de la suite $u(n)$.

Démonstration. Nous allons majorer le reste

$$R_n(x) = \frac{1}{2i\pi} \prod_{j=0}^{n} (x - u(j)) \int\limits_{|t|=R} \frac{f(t)}{(t-x)\prod_{j=0}^{n}(t-u(j))}\, dt$$

et montrer que celui-ci tend vers zéro si n tend vers l'infini, x étant fixé. On a la majoration

$$|R_n(x)| \leq \frac{\prod_{j=0}^{n}(|x| + |u(j)|) R |f|(R)}{(R - |x|)\prod_{j=0}^{n}(R - |u(j)|)},$$

donc

$$\log |R_n(x)| \leq \sum_{j=0}^{n} \log(|x| + |u(j)|) + \log |f|(R) + \log R$$
$$- \log(R - |x|) - \sum_{j=0}^{n} \log(R - |u(j)|).$$

Nous prenons $R = \exp(nd^{n+1})$, qui est supérieur à tous les $|u(j)|$, $0 \leq j \leq n$, pourvu que n soit pris assez grand. Compte tenu du lemme 2.11, il vient alors sans difficultés la majoration

$$\log |R_n(x)| \leq \frac{L}{d-1} d^{n+1} + \log |f|(R) - n(n+1)d^{n+1} + O(n).$$

En utilisant l'hypothèse faite sur $|f|(R)$, il vient alors

$$\log |R_n(x)| \leq -\left(\frac{\log\log d}{\log d} + \mu\right) nd^{n+1} + o(nd^n)$$

et comme $\mu > -(\log\log d)/\log d$, ceci prouve le lemme.

Lemme 2.14. *Soient b et c deux réels positifs. Pour $t > b$, la fonction $\psi(x) = x(t - b\exp(cx))$ définie sur $[0, \infty[$ admet un unique maximum en* *un point $x_0(t)$, et la valeur de ce maximum, que nous notons $\phi(t)$, admet l'estimation*

$$\phi(t) = t\,\frac{\log t - \log\log t}{c} + O(t)$$

quand t tend vers l'infini.

Démonstration. On a $\psi'(x) = t - b(1+cx)\exp(cx)$, et la dérivée seconde $\psi''(x) = -bc\exp(cx) - bc(1+cx)\exp(cx)$ est toujours négative. La valeur en zéro de la dérivée est égale à $t-b$ qui est positif, et la dérivée tend vers $-\infty$ si x tend vers l'infini. Ceci prouve la première assertion, avec de plus le fait que le point $x_0(t)$ vérifie $t = b(1+cx_0(t))\exp(cx_0(t))$; donc $x_0(t)$ est la valeur au point t de la fonction réciproque de la fonction $b(1+cx)\exp(cx)$. En particulier, $x_0(t)$ tend vers l'infini si t tend vers l'infini. En prenant le logarithme de l'égalité ci-dessus, on obtient

$$cx_0(t) + \log x_0(t) + \log c + \log\left(1 + \frac{1}{cx_0(t)}\right) + \log b = \log t.$$

On met dans cette égalité $cx_0(t)$ en facteur dans le premier membre, on prend le logarithme; on obtient alors en tenant compte du fait que $x_0(t)$ tend vers l'infini,

$$\log x_0(t) = \log\log t + O(1).$$

On reporte alors ceci dans la première égalité, d'où

$$x_0(t) = \frac{\log t - \log\log t}{c} + O(1).$$

On a

$$\phi(t) = x_0(t)(t - b\exp(cx_0(t))) = \frac{tcx_0(t)^2}{1+cx_0(t)},$$

d'où

$$\phi(t) = t(x_0(t) + O(1)) = t\,\frac{\log t - \log\log t}{c} + O(t),$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Lemme 2.15. *Soit $x \in \mathbb{C}$, de module assez grand, et $k \in \mathbb{N}$ non nul. On définit l'entier N par les inégalités $|P^{[N+1]}(z)| > |x| \geq |P^{[N]}(z)|$. (Cet entier est bien défini car il résulte du lemme 2.11 que la suite $|P^{[n]}(z)|$ est croissante à partir d'un certain rang.) On a alors les majorations suivantes :*

(i) *pour $0 \leq k \leq N+1$,*

$$\log \prod_{j=0}^{k-1} |x - P^{[j]}(z)| \leq k\log|x| + c_1,$$

(ii) *pour* $k \geq N+2$,

$$\log \prod_{j=0}^{k-1} |x - P^{[j]}(z)| \leq (N+1)\log|x| + \sum_{j=N+2}^{k-1} \log|P^{[j]}(z)| + c_2,$$

où c_1 *et* c_2 *sont deux constantes positives.*

Démonstration. On majore tout d'abord $|x - P^{[j]}(z)|$ par $|x| + |P^{[j]}(z)|$. Dans le cas (i), on a alors comme majoration

$$\log \prod_{j=0}^{k-1} (|x| + |P^{[j]}(z)|) \leq k\log|x| + \sum_{j=0}^{k-1} \log\left(1 + \frac{|P^{[j]}(z)|}{|x|}\right).$$

Comme $|P^{[N]}(z)| \leq |x|$, il vient

$$\log \prod_{j=0}^{k-1} (|x| + |P^{[j]}(z)|) \leq k\log|x| + \sum_{j=0}^{k-1} \log\left(1 + \frac{|P^{[j]}(z)|}{|P^{[N]}(z)|}\right).$$

Soit A un réel positif tel que pour tout $x \in \mathbb{C}$ tel que $|x| > A$ on ait $|P(x)| \geq 2|x|$, et m un entier tel que $|P^{[j]}(z)| > A$ pour $j > m$. On a alors pour tout $j > m$ l'inégalité $|P^{[N]}(z)| \geq 2^{N-j}|P^{[j]}(z)|$. On en déduit que

$$\sum_{j=0}^{k-1} \log\left(1 + \frac{|P^{[j]}(z)|}{|P^{[N]}(z)|}\right) \leq \sum_{j=0}^{m} \log\left(1 + \frac{|P^{[j]}(z)|}{|P^{[N]}(z)|}\right) + \sum_{i=0}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{2^i}\right)$$

et le résultat en découle.

Nous passons maintenant au cas (ii). On a

$$\log \prod_{j=0}^{k-1} (|x| + |P^{[j]}(z)|) = \log \prod_{j=0}^{N} (|x| + |P^{[j]}(z)|) + \log \prod_{j=N+1}^{k-1} (|x| + |P^{[j]}(z)|)$$

et le premier terme de cette somme est, par le cas (i) que nous venons de démontrer, majoré par $(N+1)\log|x| + c_1$. D'autre part,

$$\log \prod_{j=N+1}^{k-1} (|x| + |P^{[j]}(z)|) = \sum_{j=N+1}^{k-1} \log|P^{[j]}(z)| + \sum_{j=N+1}^{k-1} \log\left(1 + \frac{|x|}{|P^{[j]}(z)|}\right).$$

En tenant compte du fait que $|x| < |P^{[N+1]}(z)|$, on montre comme dans l'étude du premier cas que le deuxième terme est majoré indépendamment de N, d'où le résultat.

III. Démonstration des résultats. D'après le lemme 2.13 et le fait que

$$\frac{L}{d} - \frac{\log\log d}{\log d} > -\frac{\log\log d}{\log d},$$

la fonction $f(x)$ est somme de sa série d'interpolation de Newton aux points $u(n) = P^{[n]}(z)$. Il suffit donc de démontrer que les coefficients d'interpolation $b(n)$ sont tous nuls à partir d'un certain rang. Il résulte du lemme 2.8(ii) et de la proposition 2.1 que les quantités $Q_{n,n}(z)b(n)$ sont des éléments de $\mathbb{Z}$. Le lemme 2.8(i) permet de majorer $b(n)$; on choisit de prendre dans ce lemme $R = R_n = \exp(nd^{n+1})$. Les calculs sont analogues à ceux déjà faits dans la démonstration du lemme 2.13. On utilise le lemme 2.12 pour majorer $Q_{n,n}(z)$. On trouve comme majoration

$$\log|Q_{n,n}(z)b(n)| \le -\left(\lambda + \frac{\log\log d}{\log d} - \frac{L}{d}\right) nd^{n+1} + o(nd^n),$$

ce qui, compte tenu de l'hypothèse faite sur λ, démontre le théorème.

Preuve de la proposition 2. Nous démontrons tout d'abord que $f(x)$ est une fonction entière de la variable complexe x. Posons

$$W_k(x) = \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(x - P^{[j]}(z))}{\prod_{j=0}^{k-1}(P^{[k]}(z) - P^{[j]}(z))}.$$

Nous nous plaçons sous les hypothèses du lemme 2.15 et reprenons les mêmes notations. Pour $k > N+1$, on a, en utilisant (ii) du lemme 2.15 et le lemme 2.11,

$$\log|W_k(x)| \le (N+1)\log|x| + \sum_{j=N+2}^{k-1} \log|P^{[j]}(z)| - k\log|P^{[k]}(z)| + c_3,$$

où c_3 est une constante indépendante de x et de k, puis

$$\log|W_k(x)| \le (N+1)Ld^{N+1} + L\frac{d^k - d^{N+2}}{d-1} - kLd^k + c_4 k,$$

où la constante c_4 est indépendante de x et de k. Posons $k = N+2+h$, avec h entier naturel. On a

$$\log|W_k(x)| \le (N+2)Ld^{N+1}\omega(N,h) - hLd^h + c_4 h,$$

où on a posé

$$\omega(N,h) = -d^{h+1} + \frac{d^{h+1}}{(d-1)(N+2)} + \frac{N+1}{N+2} + \frac{c_4}{Ld^{N+1}}.$$

Si l'on a pris N assez grand, la quantité $\omega(N,h)$ est négative pour tout $h \in \mathbb{N}$, donc on a la majoration

$$\log|W_k(x)| \le -hLd^h + c_4 h$$

et cette majoration montre que la série $W_k(x)$ est convergente. Il en résulte que la fonction $f(x)$ est bien une fonction entière de la variable x.

Nous allons maintenant majorer la croissance de $f(x)$. Il résulte de ce qui précède que l'on a, pour $|x|$ assez grand,

$$\sum_{k=N+2}^{\infty} |W_k(x)| \le \sum_{h=0}^{\infty} \exp(-hLd^h + c_5 h)$$

et cette dernière quantité est une constante indépendante de x. Il reste à majorer $\sum_{k=0}^{N+1} |W_k(x)|$. Par le lemme 2.15 et le lemme 2.11, on a pour $k \in \{1, \ldots, N+1\}$,

$$\log |W_k(x)| \le k \log |x| - kLd^k + c_6 k$$

pour une constante positive c_6. On applique le résultat du lemme 2.14 avec $t = \log|x| + c_6$, $b = L$ et $c = \log d$. Un calcul immédiat montre alors que

$$\log |W_k(x)| \le \frac{\log|x| \log\log|x| - \log|x| \log\log\log|x|}{\log d} + O(\log|x|).$$

Par suite,

$$\sum_{k=0}^{N+1} |W_k(x)| \le (N+2) \exp\left(\frac{\log|x| \log\log|x| - \log|x| \log\log\log|x|}{\log d} + O(\log|x|)\right)$$

et comme $\log N$ est un $O(\log|x|)$, l'estimation sur la croissance de $f(x)$ est démontrée. Enfin, on a $f(z) = f(P^{[0]}(z)) = 1$, et comme les coefficients d'interpolation de $f(x)$ sur la suite $P^{[n]}(z)$ sont égaux à $1/Q_{n,n}(z)$, la formule (ii) du lemme 2.8 permet de démontrer par récurrence que $f(P^{[n]}(z)) \in \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme il est clair que $f(x)$ n'est pas un polynôme, nous avons terminé la démonstration de la proposition 2.

Démonstration du corollaire 3. On prend $P(x) = x^d$; on a $L(z, P) = \log|z|$, et le théorème 1 s'applique immédiatement.

Démonstration du corollaire 4. On calcule facilement $\omega = (z + \sqrt{z^2-4})/2$. Posons $\omega = \exp(i\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{C}$. Soit $P(x) = x^2 - 2$. On a immédiatement que $P(2\cos(\theta)) = 2\cos(2\theta)$, et par une récurrence facile que $P^{[n]}(z) = P^{[n]}(2\cos(\theta)) = 2\cos(2^n\theta) = \omega^{2^n} + \omega^{-2^n}$. On peut donc appliquer le théorème 1. Il vient que

$$\log |P^{[n]}(z)| = 2^n \log|\omega| + O(1);$$

on en déduit que $L(z, P) = \log(|\omega|) = \log\left|\frac{z+\sqrt{z^2-4}}{2}\right|$, d'où le résultat.

Références

[BEGEMO] D. Bessis, J. Geronimo et P. Moussa, *Ensembles de Julia et propriétés de localisation des familles itérées d'entiers algébriques*, C. R. Acad. Sci. Paris 299 (1984), 281–284.

[GU] A. O. Guelfond, *Calcul des différences finies*, Dunod, Paris, 1963.

[PO] G. Pólya, *Ueber ganzwertige ganze Funktionen*, Rend. Circ. Mat. Palermo 40 (1915), 1–16.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNIVERSITÉ DE CAEN
ESPLANADE DE LA PAIX
14032 CAEN CEDEX, FRANCE

Reçu le 2.11.1993
et révisé le 24.2.1994 (2515)