ACTA ARITHMETICA
LXVI.4 (1994)

Automates et valeurs de transcendance du logarithme de Carlitz

par

Valérie Berthé (Marseille)

1. Introduction. Soit $\mathbf{F}_q$ le corps de cardinal q. Soit p la caractéristique de $\mathbf{F}_q$. On définit par analogie avec le cas réel :

$$\mathbf{Z} = \mathbf{F}_q[x], \qquad \mathbf{Q} = \mathbf{F}_q(x)\,,$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_q((1/x)) = \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{x^n} : a_n \in \mathbf{F}_q \text{ et les } (a_n)_{n<0} \text{ presque tous nuls} \right\}.$$

Le corps $\mathbf{R}$ est le complété de $\mathbf{Q}$ pour la valuation $1/x$-adique. Enfin, on définit $\mathbf{C}$ comme le complété d'une clôture algébrique de $\mathbf{R}$; $\mathbf{C}$ est donc algébriquement clos.

Carlitz a défini dans [4] deux fonctions ψ et λ sur $\mathbf{F}_q((1/x))$, qui jouent respectivement les rôles de l'exponentielle et du logarithme réels. Ces fonctions sont ainsi définies :

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{q^k}}{F_k} \qquad \text{pour tout } t \text{ de } \mathbf{F}_q((1/x))\,,$$

$$\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{q^k}}{L_k} \qquad \text{pour tout } t \text{ tel que } d^\circ t \le 1\,,$$

avec

$$[k] = x^{q^k} - x, \qquad F_k = [k][k-1]^q \ldots [1]^{q^{k-1}}, \qquad L_k = [k][k-1]\ldots[1]\,.$$

Carlitz a montré que l'on peut étendre la définition de λ à $\mathbf{F}_q((1/x))$ (voir [4]). La fonction λ ainsi obtenue est alors l'inverse de la fonction ψ. Carlitz a également montré l'existence d'une période pour la fonction ψ :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ \forall E \in \mathbf{Z}, \quad \psi(t + E\xi) = \psi(t)\,,$$

avec

$$\xi = (x^q - x)^{1/(q-1)} \varPi \qquad \text{et} \qquad \varPi = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^{q^j} - x}{x^{q^{j+1}} - x}\right).$$

La série formelle Π joue bien évidemment le rôle du réel π et ξ est l'analogue de $2i\pi$.

Wade a montré diverses propriétés de transcendance concernant ces deux fonctions, qui mettent en évidence l'analogie avec le cas réel. Il a établi, en particulier, deux résultats à mettre en correspondance avec les théorèmes de Hermite–Lindemann et de Gelfond–Schneider, à savoir :

• Si α est un élément non nul de $\mathbf{F}_q((1/x))$ algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$, alors $\psi(\alpha)$ et $\lambda(\alpha)$ sont transcendants (voir [19]).

• Si α est non nul et β un élément de $\mathbf{F}_q((1/x))$ irrationnel alors l'un des trois nombres α, β, $\psi(\beta\lambda(\alpha))$ est transcendant. Si α est nul et si l'on remplace $\lambda(0)$ par $E\xi$, où E appartient à $\mathbf{F}_q[x]$ et $\xi = (x^q - x)^{1/(q-1)}\Pi$, alors la conclusion reste vraie (voir [20]).

On déduit, en particulier, du premier de ces résultats, la transcendance de Π. Yu a également montré, dans [23] et [24], ces deux propriétés, dans un cadre plus général.

Carlitz a également défini sur $\mathbf{F}_q(x)$ une fonction ζ, analogue à la fonction ζ de Riemann. Elle est définie de la façon suivante :

$$\zeta(m) = \sum_{G \in \mathbf{F}_q[x] \text{ et } G \text{ unitaire}} 1/G^m, \quad m \geq 1\,.$$

Il existe plusieurs méthodes conduisant à des résultats de transcendance sur les valeurs des fonctions ψ, λ et ζ de Carlitz (voir [21]) :

• la méthode de Wade reprise par Dammame et Hellegouarch, ainsi que par Thakur; elle est à certains égards l'analogue de la méthode classique pour les nombres réels (voir [9]–[12], [17] et [18]),

• les modules de Drinfeld utilisés par Yu; il s'agit d'une généralisation des courbes elliptiques (voir [14] et [15]); c'est la méthode la moins élémentaire mais aussi celle qui donne actuellement le plus de résultats (voir [22]),

• les mesures d'irrationalité sur lesquelles travaillent de Mathan et Chérif (voir [5]–[7]),

• enfin les automates qui ont permis à Allouche de donner une preuve "élémentaire" de la transcendance de la période Π de l'exponentielle.

Il s'agit ici de généraliser cette dernière méthode pour l'étendre à d'autres résultats.

En fait, Allouche a montré dans [1], en utilisant les automates et plus précisément le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, la transcendance de α/Π, avec

$$\alpha = \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}\right).$$

En élevant α à la puissance q, on constate que α est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$. On déduit donc la transcendance de Π de celle de α/Π.

Rappelons l'énoncé du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy (voir [8]) :

Théorème 1 (Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy). *Soit $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbf{F}_q$. Il y a équivalence entre les deux conditions suivantes :*

1. *La série formelle $\sum_{n\ge 0} u(n)x^{-n}$ est algébrique sur $\mathbf{F}_q(x)$.*
2. *L'ensemble E des sous-suites de la suite $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$ défini par*

$$E = \{(u(q^k n + r))_{n\in\mathbb{N}} : k \ge 0,\ 0 \le r \le q^k - 1\}$$

est fini.

Nous nous proposons de donner ici une preuve "automatique" du résultat suivant :

Théorème 2. *Soit P une fraction de la forme $P = \sum_{v\ge -1} p_v(1/x)^v$ où $p_v \in \mathbf{F}_q$, et $p_v = 0$ pour v assez grand. Alors $\lambda(P)/\Pi^s$ est transcendant sur $\mathbf{F}_q(x)$, pour $1 \le s \le q-3$ et pour $q \ne 2$, $q \ne 3$.*

Nous étudierons en fait le quotient $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$. Multiplier par α^s permet d'obtenir un développement simple en série formelle de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$ (afin d'utiliser le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy) sans pour autant influer sur la transcendance de $\lambda(P)/\Pi^s$, puisque α est algébrique.

Remarques. Pour $q = 3$, il est possible de montrer par les automates la transcendance de $\lambda(P)/\Pi$, mais ce résultat demande plus de travail.

On peut également retrouver partiellement et de façon élémentaire, par cette même méthode, un résultat de Yu, à savoir la transcendance de $\zeta(s)/\Pi^s$ pour $1 \le s \le q-2$ (voir [2] et [3]). Cette propriété de transcendance a été démontrée par Yu dans [22], pour tout s non divisible par $q-1$ (voir aussi [17] et [18]).

Enfin, Y. Hellegouarch a généralisé l'exponentielle de Carlitz en définissant une exponentielle associée à une suite périodique d'endomorphismes. F. Recher a montré, dans [16], par les automates, la transcendance de la période de cette exponentielle généralisée, pour certains choix d'endomorphismes.

2. Quelques développements en série formelle. On a $\lambda(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{q^k}/L_k$, pour t tel que $d^\circ t \le 1$. Soit

$$P = \sum_{v\ge -1} p_v(1/x)^v, \qquad \text{où } p_v \in \mathbf{F}_q,$$

et $p_v = 0$ pour v assez grand. On se restreint à des exposants $v \geq -1$, pour des raisons de convergence.

La fonction λ est linéaire sur $\mathbf{F}_q$ et $p_v = 0$, pour v assez grand. On en déduit que

$$\lambda(P) = \lambda\Big(\sum_{v\geq -1} p_v(1/x)^v\Big) = \sum_{v\geq -1} p_v\lambda((1/x)^v)\,.$$

On a donc

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P) = \sum_{v\geq -1} p_v\left(\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v)\right).$$

2.1. *Notations.* Nous allons introduire dans cette section quelques suites auxiliaires utiles pour le développement en série formelle de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$. Nous allons développer successivement les termes $\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v)$, $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}(\lambda((1/x)^v))$ et enfin $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$.

Considérons le terme

$$\lambda((1/x)^v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1/x)^{vq^k}}{L_k}\,.$$

Rappelons que $L_k = \prod_{j=1}^k (x^{q^j} - x)$. Par conséquent,

$$\lambda((1/x)^v) = (1/x)^v + \sum_{k\geq 1}(1/x)^{vq^k}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{x^{q^j}-x}\right).$$

On a

$$\alpha = \prod_{j=0}^{\infty}\left(1 - \frac{x^{q^j}}{x^{q^{j+1}}}\right) \quad \text{et} \quad \Pi = \prod_{j=0}^{\infty}\left(1 - \frac{x^{q^j}-x}{x^{q^{j+1}}-x}\right).$$

On vérifie alors que

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-(1/x)^{q^j-1})\,.$$

Il en résulte que

$$\lambda((1/x)^v) = (1/x)^v + \sum_{k\geq 1}(1/x)^{q+\ldots+q^{k-1}+(v+1)q^k}\prod_{j=1}^{k}\frac{1}{(1-(1/x)^{q^j-1})}\,.$$

En multipliant $\lambda((1/x)^v)$ par α/Π, on obtient donc

$$\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v) = \frac{\alpha}{\Pi}(1/x)^v + \sum_{k\geq 1}(1/x)^{q+\ldots+q^{k-1}+(v+1)q^k}\prod_{j=k+1}^{\infty}(1-(1/x)^{q^j-1})\,.$$

On définit alors les suites $a^v = (a^v(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $b^v = (b^v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $c^v = (c^v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\frac{\alpha}{\Pi}(1/x)^v = \sum_{n\geq 0} a^v(n)x^{-n}\,,$$

$$\frac{\alpha}{\Pi}(\lambda((1/x)^v) - (1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} b^v(n)x^{-n}\,,$$

$$\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} c^v(n)x^{-n}\,.$$

On a donc $c^v = a^v + b^v$.

Considérons maintenant le développement en série formelle de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v)$. On a

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v) = \frac{\alpha^{s-1}}{\Pi^{s-1}}\Big(\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v)\Big)\,.$$

Soit $A^{s-1} = (A^{s-1}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\frac{\alpha^{s-1}}{\Pi^{s-1}} = \sum_{n\geq 0} A^{s-1}(n)x^{-n}\,.$$

On a

$$\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} c^v(n)x^{-n}\,.$$

Par conséquent,

$$\frac{\alpha^{s-1}}{\Pi^{s-1}}\Big(\frac{\alpha}{\Pi}\lambda((1/x)^v)\Big) = \Big(\sum_{n\geq 0} A^{s-1}(n)x^{-n}\Big)\Big(\sum_{n\geq 0} c^v(n)x^{-n}\Big)\,,$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} x^{-n}\Big(\sum_{k=0}^{n} A^{s-1}(k)c^v(n-k)\Big)\,.$$

On définit alors les suites $e^v = (e^v(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $f^v = (f^v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $g_v = (g^v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$e^v(n) = \sum_{k=0}^{n} A^{s-1}(k)c^v(n-k)\,,$$

$$f^v(n) = \sum_{k=0}^{n} A^{s-1}(k)a^v(n-k)\,,$$

$$g^v(n) = \sum_{k=0}^{n} A^{s-1}(k)b^v(n-k)\,.$$

On a

$$e^v = f^v + g^v \quad \text{et} \quad \frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v) = \sum_{n\ge 0} e^v(n)x^{-n}\,.$$

On a, enfin,

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P) = \sum_{v\ge -1} p_v\left(\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda((1/x)^v)\right).$$

On définit donc, de même, les suites $E = (E(n))_{n\in\mathbb{N}}$, $F = (F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $G = (G(n))_{n\in\mathbb{N}}$:

$$E(n) = \sum_{v\ge -1} p_v e^v(n)\,,$$

$$F(n) = \sum_{v\ge -1} p_v f^v(n)\,,$$

$$G(n) = \sum_{v\ge -1} p_v g^v(n)\,.$$

On a

$$\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P) = \sum_{n\ge 0} E(n)x^{-n} \quad \text{et} \quad E = F + G\,.$$

2.2. *Quelques propriétés.* Nous allons établir, dans cette section, des propriétés concernant les suites a^v, b^v (proposition 1), la suite A^{s-1} (proposition 2) et enfin les suites f^v et g^v (proposition 3). Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 1. *Soit $j \ge 1$. Si n s'écrit sous la forme*

$$n = r + \sum_{l=j+1}^{\infty} \mu_l(q^l - 1) \tag{1}$$

avec $\mu_l \in \{0, 1, \ldots, q-1\}$, $\mu_l = 0$ pour l assez grand et $0 \le r \le (q-1)(q^j-1)$, une telle décomposition est unique.

P r e u v e. Considérons une décomposition de n sous la forme (1).

Si $n = r$, on a nécessairement $\mu_l = 0$ pour tout l. Supposons alors $n \ne r$. Soit L le plus grand indice l tel que $\mu_l \ne 0$. On a

$$\forall m \ge 1 \quad (q-1)\sum_{i=1}^{m}(q^i - 1) < q^{m+1} - 1\,.$$

D'où

$$r + \sum_{l=j+1}^{L} \mu_l(q^l - 1) < q^{L+1} - 1\,.$$

Par conséquent, si n admet deux telles décompositions, les indices des plus grands termes non nuls seront égaux. Supposons alors qu'il existe $(\delta_t)_{j+1\le t\le L}$ à coefficients dans $\{0,1,\ldots,q-1\}$ et ϱ avec $0 \le \varrho \le (q-1)(q^j-1)$, tels que

$$n = r + \sum_{l=j+1}^{L} \mu_l(q^l-1) = \varrho + \sum_{t=j+1}^{L} \delta_t(q^t-1), \qquad \text{avec } \mu_L \neq 0 \text{ et } \delta_L \neq 0\,.$$

Supposons, de plus, que $\delta_L \neq \mu_L$ et que, par exemple, $\mu_L > \delta_L$. On a alors

$$n - \delta_L(q^L-1) \ge q^L - 1 > \sum_{t=j+1}^{L-1} \delta_t(q^t-1) + \varrho = n - \delta_L(q^L-1)\,,$$

ce qui est impossible. Par conséquent, $\delta_L = \mu_L$. On montre ainsi, par récurrence, que $\mu_l = \delta_l$ pour $l \ge j+1$. On en déduit alors que $r = \varrho$, ce qui achève la preuve du lemme 1.

On a les propriétés suivantes concernant les suites a^v, b^v, c^v :

Proposition 1. 1. *On a $a^v(n) \neq 0$ si et seulement si n s'écrit sous la forme*

$$v + \sum_{j\ge 1} \varepsilon_j(q^j-1), \qquad \textit{avec } \varepsilon_j = 0 \textit{ ou } 1, \textit{ et } \varepsilon_j = 0 \textit{ pour } k \textit{ assez grand.}$$

2. *Si $b^v(n) \neq 0$ alors n s'écrit sous la forme*

$$n = q + \ldots + q^{i-1} + q^i(v+1) + \sum_{j=i+1}^{\infty} \varepsilon_j(q^j-1)\,, \tag{2}$$

avec $i \ge 1$, $\varepsilon_j = 0$ ou 1, et $\varepsilon_j = 0$ pour j assez grand.

Nous aurons besoin du lemme suivant dans la preuve de la proposition 1 :

Lemme 2. *Soit $(a_k(n))_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par*

$$\prod_{j=k+1}^{\infty} \left(1 - (1/x)^{q^j-1}\right) = \sum_{n\ge 0} a_k(n) x^{-n}\,.$$

Si n s'écrit

$$n = \sum_{j=k+1}^{\infty} \varepsilon_j(q^j-1) \qquad \textit{avec } \varepsilon_j = 0 \textit{ ou } 1, \textit{ et } \varepsilon_j = 0 \textit{ pour } k \textit{ assez grand,} \tag{3}$$

alors $a_k(n) = (-1)^{\Sigma_{j=k+1}^{\infty}\varepsilon_j}$, sinon $a_k(n) = 0$.

La preuve de ce lemme résulte immédiatement de l'unicité de la décomposition de n sous la forme (3) qui découle elle-même du lemme 1.

P r e u v e d e l a p r o p o s i t i o n 1. Rappelons que

$$\frac{\alpha}{\Pi} = \prod_{j=1}^{\infty}(1-(1/x)^{q^j-1}) = \sum_{n\geq 0} a_0(n)x^{-n}\,.$$

Par conséquent,

$$\frac{\alpha}{\Pi}(1/x)^v = \sum_{n\geq 0} a_0(n)x^{-(n+v)} = \sum_{n\geq v} a_0(n-v)x^{-n}\,.$$

Or $a_0(n)\neq 0$ si et seulement si n s'écrit sous la forme (3) selon le lemme 2, ce qui achève la preuve de 1.

On a ([1])

$$\frac{\alpha}{\Pi}(\lambda((1/x)^v)-(1/x)^v) = \sum_{n\geq 0} x^{-n}\sum_{k\geq 1} a_k(n-(q+\ldots+q^{k-1}+(v+1)q^k))\,.$$

Par conséquent, 2 résulte du lemme 2.

R e m a r q u e. On ne peut rien dire quant à une réciproque dans 2. En effet, il peut exister plusieurs décompositions de n sous la forme (2). Chacune de ces décompositions apporte un coefficient de valeur absolue égale à 1. Or on est en caractéristique p. Par conséquent, on peut éventuellement avoir $b^v(n)\equiv 0\ (p)$, si n s'écrit sous la forme (2). Néanmoins, si la décomposition de n est unique, alors $b^v(n)\neq 0$.

Considérons le développement en série formelle de α^{s-1}/Π^{s-1}. On a la proposition suivante :

PROPOSITION 2. *Soit* $1\leq t\leq q-1$. *Soit* $(A^t(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par*

$$\frac{\alpha^t}{\Pi^t} = \sum_{n\geq 0} A^t(n)x^{-n}\,.$$

Si n s'écrit

$$n = \sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(q^j-1)\quad \textit{avec } \mu_j\in\ \{0,1,\ldots,t\},\ \mu_j = 0 \textit{ pour } j \textit{ assez grand},$$

alors

$$A^t(n) = (-1)^{\Sigma_{j=1}^{\infty}\mu_j}\prod_{j=1}^{\infty}\overline{\binom{\mu_j}{t}}\,,$$

sinon $A^t(n)=0$.

([1]) On pose, pour $n<0$, $a_k(n)=0$.

P r e u v e. On a

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1-(1/x)^{q^j-1})^t = \Big(\sum_{n\ge 0} a_0(n)x^{-n}\Big)^t$$
$$= \sum_{n\ge 0} x^{-n}\Big(\sum_{n_i\ge 0 \text{ et } \Sigma_{i=1}^t n_i = n} \prod_{i=1}^t a_0(n_i)\Big).$$

Soit $n\in\mathbb{N}$. Soient $n_1,\dots,n_t$ tels que $n=\sum_{i=1}^t n_i$, $n_i\ge 0$ pour tout i et $\prod_{i=1}^t a_0(n_i)\ne 0$. D'après le lemme 2, il existe $(\varepsilon_{i,j})$ avec $\varepsilon_{i,j}=0$ ou 1, et $\varepsilon_{i,j}=0$ pour tout i et j assez grand, tels que pour tout i avec $1\le i\le t$,

$$n_i=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_{i,j}(q^j-1).$$

Nécessairement, n s'écrit sous la forme suivante :

$$n=\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j(q^j-1)\quad \text{avec } \mu_j\in\ \{0,1,\dots,t\},\ \text{et } \mu_j=0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

Réciproquement, soit n pouvant s'écrire sous cette forme. Considérons un t-uplet tel que $n=\sum_{i=1}^t n_i$, $n_i\ge 0$ pour tout i et $\prod_{i=1}^t a_0(n_i)\ne 0$. Pour un tel t-uplet, il existe $(\varepsilon_{i,j})$ avec $\varepsilon_{i,j}=0$ ou 1, $\varepsilon_{i,j}=0$ pour tout i et j assez grand, tels que pour tout i avec $1\le i\le t$,

$$n_i=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon_{i,j}(q^j-1).$$

Or

$$n=\sum_{i=1}^t n_i=\sum_{i,j}\varepsilon_{i,j}(q^j-1)=\sum_{j=1}^{\infty}\Big(\sum_{i=1}^t\varepsilon_{i,j}\Big)(q^j-1).$$

Il résulte du lemme 1 que $\sum_{i=1}^t\varepsilon_{i,j}=\mu_j$ pour tout j. Par conséquent, il existe

$$\prod_{j=1}^{\infty}\binom{t}{\mu_j}$$

t-uplets de la forme cherchée. On a alors

$$\prod_{i=1}^t a_0(n_i)=\prod_{i=1}^t(-1)^{\Sigma_{j=1}^{\infty}\varepsilon_{i,j}}=(-1)^{\Sigma_{i,j}\varepsilon_{i,j}}=(-1)^{\Sigma_{j=1}^{\infty}\mu_j}.$$

Pour achever la preuve de la proposition 2, il suffit d'ajouter que l'on est en caractéristique p.

Nous allons déduire des propositions 1 et 2 la proposition suivante concernant les suites f^v et g^v :

Proposition 3. 1. *Si $f^v(n) \neq 0$ alors n s'écrit sous la forme*

$$n = v + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (q^j - 1), \qquad \text{avec } 0 \leq \mu_j \leq s\,. \tag{4}$$

2. *Si $g^v(n) \neq 0$ alors n s'écrit sous la forme*

$$n = q + \ldots + q^{i-1} + q^i(v+1) + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (q^j - 1)\,, \tag{5}$$

avec $i \geq 1$, $0 \leq \mu_j \leq s-1$ pour $1 \leq j \leq i$, et $0 \leq \mu_j \leq s$ pour $j \geq i+1$.

3. *Si $n = v + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (q^j - 1)$, avec $\mu_j = 0$ ou s, pour tout j, et si n se décompose de manière unique sous la forme* (4) *alors $f^v(n) \neq 0$.*

Preuve. Preuve de 1 : Soit n tel que $f^v(n) \neq 0$. On a

$$f^v(n) = \sum_{l=0}^{n} A^{s-1}(l) a^v(n-l)\,.$$

Soit l tel que $0 \leq l \leq n$, et $A^{s-1}(l)a^v(n-l) \neq 0$. On a alors, d'après les propositions 1 et 2,

$$l = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_i (q^i - 1), \qquad \text{avec } \delta_i \in \{0, \ldots, s-1\}, \text{ et } \delta_i = 0 \text{ pour } i \text{ assez grand,}$$

$$n - l = v + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j (q^j - 1), \qquad \text{avec } \varepsilon_j = 0 \text{ ou } 1, \text{ et } \varepsilon_j = 0 \text{ pour } j \text{ assez grand.}$$

Par conséquent,

$$n = v + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (q^i - 1), \qquad \text{avec } 0 \leq \mu_i \leq s\,.$$

Preuve de 2 : Soit n tel que $g^v(n) \neq 0$. On a

$$g^v(n) = \sum_{l=0}^{n} A^{s-1}(l) b^v(n-l)\,.$$

Si, pour $0 \leq l \leq n$, $A^{s-1}(l)b^v(n-l) \neq 0$, alors il existe $(\delta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $\delta_j \in \{0, \ldots, s-1\}$ et $\delta_j = 0$ pour j assez grand, tels que $l = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j (q^j - 1)$. Il existe $i \geq 1$ et $(\varepsilon_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $\varepsilon_j = 0$ ou 1, et $\varepsilon_j = 0$ pour j assez grand, tels que

$$n - l = q + \ldots + q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{j=i+1}^{\infty} \varepsilon_j (q^j - 1)\,.$$

Par conséquent,

$$n = q + \ldots + q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (q^j - 1)\,,$$

avec $i \geq 1$, $0 \leq \mu_j \leq s-1$ pour $1 \leq j \leq i$, et $0 \leq \mu_j \leq s$ pour $j \geq i+1$.

Preuve de 3 : Soit $n = v + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (q^j - 1)$, avec $\mu_j = 0$ ou s, pour tout j, et tel que n se décompose de manière unique sous la forme (4). Il existe alors un unique l tel que $0 \le l \le n$ et tel que $A^{s-1}(l) a^v (n-l) \neq 0$. En effet, si J est l'ensemble des indices j tels que $\mu_j \neq 0$, on a, d'après les propositions 2 et 3.1,

$$l = \sum_{j \in J} (s-1)(q^j - 1), \qquad n - l = v + \sum_{j \in J} (q^j - 1).$$

On en déduit que $f^v(n) = A^{s-1}(l) a^v (n-l) \neq 0$, ce qui achève la preuve de 3.

3. Schéma de la preuve du théorème 2. Considérons les sous-suites $(E(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})))_{n \in \mathbb{N}}$, afin d'appliquer le théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, pour montrer la transcendance de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s} \lambda(P)$. Nous supposerons $1 \le r \le q-2$ et nous fixerons la valeur de r ultérieurement, au paragraphe 6.1.

Notons que l'on suppose $s \le q-3$. Nous supposerons donc, jusqu'à la fin, $q \neq 2$ et 3. La nécessité de cette limitation, pour la méthode employée, intervient dans la preuve du lemme 4, remarque 3, au chapitre 5.

Nous allons étudier, à $v \ge -1$ fixé, les sous-suites $(f^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})))_{n \in \mathbb{N}}$ et montrer les deux lemmes suivants, aux paragraphes 4 et 5 :

Lemme 3. *Soit $k \ge 2$. Soient $u(k)$ et $v(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne de $-r + q^k + v - (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})$ par s. Soit*

$$m^v(k) = -1 + s(1 + \ldots + q^{u(k)-1}) + v(k) q^{u(k)}.$$

Pour tout $n < m^v(k)$, on a

$$f^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})) = 0.$$

Lemme 4. *Soit $k \ge d+3$, où $d = [\frac{\ln v}{\ln q}]$ si $v \ge 1$, et $d = 0$ sinon. Soient $x(k)$ et $y(k)$ les reste et quotient de la division euclidienne par s de $-r + q^{k-d-1} - (q-3)(q^{k-d-2} + \ldots + q) - s(d+1)$. Soit*

$$n^v(k) = -1 + s(1 + \ldots + q^{x(k)-1}) + y(k) q^{x(k)}.$$

Pour tout $n < n^v(k)$, on a

$$g^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})) = 0.$$

On a $m^v(k) > n^v(k)$ pour tout $k \ge d+3$ et $e^v = f^v + g^v$. Le lemme suivant résulte donc des lemmes 3 et 4 :

Lemme 5. *Soit $k \ge d+3$. Pour tout $n < n^v(k)$, on a*

$$e^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})) = 0.$$

Or $E=\sum_{p_v\neq 0} p_v e^v$ où l'ensemble $\{v : p_v\neq 0\}$ est fini, d'où la proposition 4 :

PROPOSITION 4. *Soit* $n(k)=\inf\{n^v(k) : v$ *tel que* $p_v\neq 0\}$. *On a*, *pour* k *assez grand*, *et tout* $n<n(k)$,

$$E(q^k n+r+(q-2)(q+\ldots+q^{k-1}))=0\,.$$

Pour tout v, la suite $(n^v(k))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞. Par conséquent, la suite $(n(k))_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers ∞. Les sous-suites $(E(q^k n+r+(q-2)(q+\ldots+q^{k-1})))_{n\in\mathbb{N}}$ commencent donc par une plage de 0 (non forcément maximale) dont la longueur tend vers ∞.

On montre, de plus, au paragraphe 6, qu'il existe un entier $n_0(k)$ tel que, pour une infinité de k, $E(q^k n_0(k)+r+(q-2)(q+\ldots+q^{k-1}))\neq 0$. Or on a le lemme suivant :

LEMME 6. *Soit* $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}=((v_k(n))_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ *une famille de sous-suites de la suite* $v=(v(n))_{n\in\mathbb{N}}$ *telle que* :

1. *Il existe un entier* $m(k)$ *tel que* $v_k(n)=0$ *pour tout* $n<m(k)$.
2. *La suite* $(m(k))_{k\in\mathbb{N}}$ *tend vers* ∞.
3. *Les suites* v_k *sont non identiquement nulles pour une infinité de* k.

L'ensemble $\{v_k : k\in\mathbb{N}\}$ *est alors infini.*

Il résulte de ce lemme que l'ensemble $\{(E(q^k n+r+(q-2)(q+\ldots+q^{k-1})))_{n\in\mathbb{N}}\}$ est infini. Du théorème de Christol, Kamae, Mendès France et Rauzy, on déduit la transcendance de $\frac{\alpha^s}{\Pi^s}\lambda(P)$ sur $\mathbf{F}_q(x)$ pour $q\neq 2$, 3 et $1\leq s\leq q-3$, et, par conséquent, celle de $\lambda(P)/\Pi^s$, ce qui achève la preuve du théorème 2.

Il reste à montrer le lemme 6.

Preuve du lemme 6. D'après la condition 3, il existe un ensemble infini d'entiers $\mathcal{K}$ tel que pour tout k de $\mathcal{K}$, la suite v_k soit non nulle. Par conséquent, il existe pour tout k de $\mathcal{K}$ un entier $m'(k)$ tel que $v_k(n)=0$ pour tout $n<m'(k)$, et $v_k(m'(k))\neq 0$. On a alors, d'après 1, $m(k)\leq m'(k)$.

Nous allons construire par récurrence une suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

- Soit $k_1\in\mathcal{K}$.
- Supposons $k_1,\ldots,k_j$ définis. Soit $k_{j+1}\in\mathcal{K}$ tel que $m(k_{j+1})>\sup\{m'(k_1),\ldots,m'(k_j)\}$. L'existence de k_{j+1} est assurée par la condition 2.

On a alors $\sup\{m'(k_1),\ldots,m'(k_j)\}<m(k_{j+1})\leq m'(k_{j+1})$. Par conséquent, $v_{k_{j+1}}\notin\{v_{k_1},\ldots,v_{k_j}\}$ pour tout j.

On a donc construit une suite $(k_j)_{j\in\mathbb{N}}$ telle que $\{v_{k_j} : j\in\mathbb{N}\}$ est infini, ce qui achève la preuve du lemme 6.

4. Preuve du lemme 3. Soit $v \geq -1$ fixé. Soit $k \geq 2$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})) \neq 0$. Selon la proposition 3.1, il existe $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $\mu_j \in \{0, \ldots, s\}$ et $\mu_j = 0$ pour j assez grand, tels que

$$q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1}) = v + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (q^j - 1)\,.$$

On pose $\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$. On a

$$q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1}) = v + \sum_{1\leq j\leq k-1} \mu_j q^j + \sum_{l\geq k} \mu_l q^l - \sigma\,.$$

On en déduit que

$$\sigma = \lambda q^k + \sum_{1\leq j\leq k-1} (\mu_j - (q-2))q^j + v - r\,,$$

avec

$$\lambda = -n + \sum_{l\geq k} \mu_l q^{l-k}\,.$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{l\geq k \text{ et } \Sigma_{l\geq k}\mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}\,, \tag{6}$$

avec

$$\mathcal{S} = \sigma - \sum_{j<k} \mu_j = \lambda q^k + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_j - (q-2))q^j - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j + v - r\,.$$

Nous allons montrer que si n s'écrit sous la forme (6), n vérifie l'inégalité $n \geq m^v(k)$, avec

$$m^v(k) = -1 + s(1 + \ldots + q^{u(k)-1}) + v(k) q^{u(k)}\,,$$

où $u(k)$ et $v(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $-r + q^k + v - (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})$. On en déduira, selon la proposition 3.1, que pour tout $n < m^v(k)$, $f^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})) = 0$.

Notons qu'une condition nécessaire pour que n s'écrive sous la forme (6) est : $\mathcal{S} \geq 0$.

On vérifie que si $\lambda \geq 1$, $\mathcal{S}$ vérifie l'inégalité $\mathcal{S} \geq -r + \lambda q^k + v - (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})$ et que pour $\lambda \leq 0$, on a $\mathcal{S} < 0$.

Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (6), avec $\lambda = 1$, on obtient $n \geq m^v(k)$. En revanche, pour $\lambda \geq 2$, on a, si n s'écrit sous la forme (6),

$$n \geq -\lambda + s(1 + \ldots + q^{u'(k)-1}) + v'(k) q^{u'(k)}\,,$$

où $u'(k)$ et $v'(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $-r + \lambda q^k + v - (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})$. Or on vérifie que $m^v(k) < -\lambda + s(1 + \ldots + q^{u'(k)-1}) + v'(k) q^{u'(k)}$, pour tout $\lambda \geq 2$.

On a donc montré que pour tout λ tel que $\mathcal{S}$ prenne des valeurs positives et donc pour tout n s'écrivant sous la forme (6), on obtient $n \geq m^v(k)$, ce qui achève la preuve du lemme 3.

5. Preuve du lemme 4. Soit $v \geq -1$ fixé. Soit $d = [\frac{\ln v}{\ln q}]$ si $v \geq 1$, et $d = 0$ sinon. Soit $k \geq d+3$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $g^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})) \neq 0$. Selon la proposition 3.2, il existe $i \geq 1$ et $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}}$ avec $0 \leq \mu_j \leq s-1$ pour $j \leq i$, et $0 \leq \mu_j \leq s$ pour $j \geq i+1$, tels que

$$q^k n + r + (q-2)(q+\ldots+q^{k-1}) = q+\ldots+q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (q^j - 1)\,.$$

On pose $\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j$.

Nous allons distinguer trois cas suivant la position de i par rapport à k :

C a s 1 : Si $i \geq k$, on a [2]

$$q^k n + r = \sum_{j=k}^{i-1} q^j + (v+1)q^i + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_j + 1 - (q-2))q^j + \sum_{j\geq k} \mu_j q^j - \sigma\,.$$

On en déduit que

$$\sigma = \lambda q^k - r + \sum_{1\leq j\leq k-1} (\mu_j + 1 - (q-2))q^j - \sum_{1\leq j\leq k-1} \mu_j\,,$$

avec

$$\lambda = -n + \sum_{j=k}^{i-1} q^{j-k} + (v+1)q^{i-k} + \sum_{l\geq k} \mu_l q^{l-k}\,.$$

Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{j=k}^{i-1} q^{j-k} + (v+1)q^{i-k} + \sum_{l\geq k \text{ et } \Sigma_{l\geq k}\mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}\,, \tag{7}$$

avec

$$\mathcal{S} = \lambda q^k - r + \sum_{1\leq j\leq k-1} (\mu_j - (q-3))q^j - \sum_{1\leq j\leq k-1} \mu_j\,.$$

On montre, de même qu'au paragraphe 4, que si n s'écrit sous la forme (7), n vérifie l'inégalité $n \geq n_1(k)$, avec $n_1(k)$ obtenu pour $i = k$, $\lambda = 1$ et tel que

$$n_1(k) = v + (s-1) + s(q + \ldots + q^{x_1(k)}) + y_1(k) q^{x_1(k)+1}\,,$$

où $x_1(k)$ et $y_1(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $q^k - r - (q-3)(q+\ldots+q^{k-1}) - (s-1)$. Le terme $s-1$, dans

[2] On convient, si $m < l$, de poser $\sum_{j=l}^{m} q^j = 0$.

l'écriture de $n_1(k)$, provient du fait que $\mu_k \leq s-1$, alors que $\mu_j \leq s$ pour $j \geq k+1$, quand $i = k$.

Cas 2 : Si $i = k-1$, on a

$$q^k n + r = vq^{k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_j + 1 - (q-2)) q^j + \sum_{j \geq k} \mu_j q^j - \sigma \,.$$

On en déduit que

$$\sigma = -r + vq^{k-1} + \lambda q^k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j + 1 - (q-2)) q^j \,,$$

avec $\lambda = -n + \sum_{l \geq k} \mu_l q^{l-k}$. Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{l \geq k \text{ et } \Sigma_{l \geq k} \mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k} \,, \tag{8}$$

avec

$$\mathcal{S} = -r + vq^{k-1} + \lambda q^k + \sum_{1 \leq j \leq k-1} (\mu_j - (q-3)) q^j - \sum_{1 \leq j \leq k-1} \mu_j \,.$$

Nous allons montrer que si n s'écrit sous la forme (8), n vérifie l'inégalité $n \geq n_2(k)$, avec

$$n_2(k) = s(1 + \ldots + q^{x_2(k)-1}) + y_2(k) q^{x_2(k)} \,,$$

où $x_2(k)$ et $y_2(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $-r + q^{k-1} - (q-3)(q^{k-2} + \ldots + q) - s$.

Écrivons v en base q : $v = v_0 + \ldots + v_d q^d$ avec $0 \leq v_i \leq q-1$ et $v_d \neq 0$.

Nous allons distinguer les cas, non plus selon la valeur de λ, comme au paragraphe 4, mais selon la valeur de la quantité $v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda$, en posant, pour $d = 0$, $v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} = 0$.

Notons que si $v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda \leq -1$, on obtient, comme $\mu_j \leq s-1 \leq q-4$ pour $1 \leq j \leq k-1$,

$$\mathcal{S} \leq -r - q^k + v_0 q^{k-1} - (q^{k-1} + \ldots + q) < 0 \,.$$

Nous allons donc supposer que $v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda \geq 0$.

• Supposons que $v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda \geq 1$. On a alors

$$\mathcal{S} \geq -r + (v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda) q^k + v_0 q^{k-1} - (q-3)(q + \ldots + q^{k-1}) \,.$$

Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (8) avec $v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda \geq 1$, on obtient

$$n \geq -\lambda + s(1 + \ldots + q^{x_2'(k)-1}) + y_2'(k) q^{x_2'(k)} \,,$$

où $x_2'(k)$ et $y_2'(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $-r + (v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda) q^k + v_0 q^{k-1} - (q-3)(q + \ldots + q^{k-1})$.

Or on vérifie que

$$n_2(k) < -\lambda + s(1 + \ldots + q^{x'_2(k)-1}) + y'_2(k) q^{x'_2(k)}\,.$$

• Supposons donc $v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda = 0$ et $\mathcal{S} \geq 0$. On a alors

$$\mathcal{S} = -r + v_0 q^{k-1} + \sum_{1\leq j\leq k-1} (\mu_j - (q-3))q^j - \sum_{1\leq j\leq k-1} \mu_j\,.$$

On a nécessairement $v_0 + \mu_{k-1} - (q-3) \geq 1$, sinon $\mathcal{S} < 0$. Par conséquent, si l'on suppose $v_0 + \mu_{k-1} - (q-3) \geq 1$, on obtient, comme $\mu_{k-1} \leq s$,

$$\mathcal{S} \geq -r + q^{k-1} - (q-3)(q + \ldots + q^{k-2}) - s\,.$$

La condition $v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda = 0$ implique, de plus, que $\lambda \leq 0$. Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (8), avec $v_1 + \ldots + v_d q^{d-1} + \lambda = 0$, n vérifie $n \geq n_2(k)$.

Nous avons donc montré, dans ces deux cas, l'inégalité $n \geq n_2(k)$, pour n vérifiant (8).

Cas 3 : Si $1 \leq i \leq k-2$, on a

$$q^k n + r = q + \ldots + q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{1\leq j\leq k-1} (\mu_j - (q-2))q^j + \sum_{l=k}^{\infty} \mu_l q^l - \sigma\,.$$

On en déduit que

$$\sigma = -r + \lambda q^k + q + \ldots + q^{i-1} + (v+1)q^i + \sum_{1\leq j\leq k-1} (\mu_j - (q-2))q^j\,,$$

avec $\lambda = -n + \sum_{l\geq k} \mu_l q^{l-k}$. Autrement dit,

$$n = -\lambda + \sum_{l\geq k \text{ et } \Sigma_{l\geq k}\mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}\,, \tag{9}$$

avec

$$\begin{aligned}\mathcal{S} &= \sigma - \sum_{j<k} \mu_j \\ &= -r + \lambda q^k + q + \ldots + q^i + v q^i + \sum_{1\leq j\leq k-1} (\mu_j - (q-2))q^j - \sum_{1\leq j\leq k-1} \mu_j\,.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que si n s'écrit sous la forme (9), n vérifie l'inégalité $n \geq n_3(k)$, avec

$$n_3(k) = -1 + s(1 + \ldots + q^{x_3(k)-1}) + y_3(k) q^{x_3(k)}\,,$$

où $x_3(k)$ et $y_3(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité

$$\begin{cases} -r + q^k - (q-2)(q^{k-1} + \ldots + q^2) + (v - (q-3))q & \text{si } d = 0\,, \\ -r + q^{k-d-1} - (q-3)(q^{k-d-2} + \ldots + q) - s(d+1) & \text{si } d \neq 0\,. \end{cases}$$

Nous allons raisonner, ici encore, selon les valeurs prises par λ.

• Supposons $\lambda \geq 1$. On a alors

$$\mathcal{S} \geq -r + \lambda q^k - (q-2)(q^{k-1} + \ldots + q^2) + (v + 1 - (q-2))q\,.$$

Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (9) avec $\lambda \geq 1$, on obtient

$$n \geq -\lambda + s(1 + \ldots + q^{x'_3(k)-1}) + y'_3(k) q^{x'_3(k)}\,,$$

où $x'_3(k)$ et $y'_3(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $-r+\lambda q^k-(q-2)(q^{k-1}+\ldots+q^2)+(v-(q-3))q$. Or on vérifie que

$$n_3(k) < -\lambda + s(1 + \ldots + q^{x'_3(k)-1}) + y'_3(k) q^{x'_3(k)}\,.$$

• Supposons donc $\lambda \leq 0$. Notons que si $\lambda q^k + vq^i < q^{k-1}$, on a alors $\mathcal{S} < 0$. On a, en effet ([3]),

$$\mathcal{S} < -r - (q + \ldots + q^{k-1}) + \lambda q^k + vq^i < 0\,.$$

Or pour $d = 0$ et $\lambda \leq 0$, on a toujours $\lambda q^k + vq^i < q^{k-1}$, car $i \leq k-2$. Par conséquent, si $d = 0$ et si $\mathcal{S} \geq 0$, on ne peut pas avoir $\lambda \leq 0$.

Supposons donc que $\lambda q^k + vq^i \geq q^{k-1}$. Ceci implique que $i \geq k-d-1$, car on a supposé $\lambda \leq 0$. On a alors, soit

$$\lambda q^k + (v+1)q^i + \sum_{j \geq i} (\mu_j - (q-2))q^j \leq 0\,,$$

auquel cas on a $\mathcal{S} < 0$, soit

$$\lambda q^k + (v+1)q^i + \sum_{j \geq i} (\mu_j - (q-2))q^j \geq q^i\,.$$

On obtient, dans ce dernier cas,

$$\mathcal{S} \geq -r + q^i - (q-3)(q^{i-1} + \ldots + q) - \sum_{i \leq j \leq k-1} \mu_j\,.$$

Or $i \geq k-d-1$ et

$$\sum_{i \leq j \leq k-1} \mu_j \leq s(k-1-i) + (s-1) \leq s(d+1)\,.$$

Par conséquent,

$$\mathcal{S} \geq -r + q^{k-d-1} - (q-3)(q^{k-d-2} + \ldots + q) - s(d+1)\,.$$

On a, de plus, supposé $\lambda \leq 0$. Par conséquent, si n s'écrit sous la forme (9), avec $\lambda \leq 0$, on obtient $n \geq n_3(k)$.

Nous avons donc montré, dans tous les cas, l'inégalité $n \geq n_3(k)$, pour n vérifiant (9).

([3]) Dans cette majoration, la condition $s \leq q-3$ intervient. L'inégalité ainsi obtenue, $\lambda q^k + vq^i \geq q^{k-1}$ (c'est-à-dire, $i \geq k-d-1$), est essentielle pour montrer que $n \geq n_3(k)$.

Il reste à comparer les quantités $n_1(k)$, $n_2(k)$ et $n_3(k)$. On a, si $d \geq 1$, $n_1(k) > n_2(k) > n_3(k)$, et si $d = 0$, $n_1(k) > n_3(k) > n_2(k)$. Soit $n^v(k) = n_3(k)$ si $d \geq 1$, et $n^v(k) = n_2(k) - 1$ si $d = 0$. On a donc montré que pour tout $n < n_v(k)$, $g^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})) = 0$, avec

$$n^v(k) = -1 + s(1 + \ldots + q^{x(k)-1}) + y(k)q^{x(k)},$$

où $x(k)$ et $y(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de $-r + q^{k-d-1} - (q-3)(q^{k-d-2} + \ldots + q) - s(d+1)$, ce qui achève la preuve du lemme 4.

6. Non-nullité des suites $(E(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})))_{n\in\mathbb{N}}$**.** Nous allons construire un entier $n_0(k)$ tel que l'on ait $E(q^k n_0(k) + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})) \neq 0$, pour une infinité de k. Nous allons définir cet entier $n_0(k)$ au paragraphe 6.1, puis nous allons montrer, en posant $N_0(k) = q^k n_0(k) + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})$, que $F(N_0(k)) \neq 0$, en 6.2, puis que $G(N_0(k)) = 0$, en 6.3. On en déduira que $E(N_0(k)) \neq 0$ et donc que les sous-suites $(E(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})))_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles pour une infinité de k.

6.1. *Construction de l'entier* $n_0(k)$. Soit v le plus petit indice w tel que $p_w \neq 0$. Considérons n tel que

$$f^v(q^k n + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})) \neq 0\,.$$

On a vu, au paragraphe 4, qu'un tel n s'écrit sous la forme

$$n = -\lambda + \sum_{l\geq k \text{ et } \Sigma_{l\geq k}\mu_l = \mathcal{S}} \mu_l q^{l-k}, \qquad \text{avec } 0 \leq \mu_l \leq s, \text{ pour tout } l\,,$$

et

$$\mathcal{S} = \lambda q^k + v - r + \sum_{j=1}^{k-1} (\mu_j - (q-2))q^j - \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j\,.$$

Posons $\lambda = 1$ et $\mu_l = 0$ pour $1 \leq l \leq k-1$. On a alors

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_k = -r + q^k + v - (q-2)(q^{k-1} + \ldots + q)\,.$$

On peut trouver $1 \leq r \leq s$ tel que pour une infinité de k, $\mathcal{S}_k$ soit divisible par s. Nous allons donc fixer ainsi la valeur de r et supposer, pour la suite, k à valeurs dans un ensemble infini et tel que $\mathcal{S}_k$ soit divisible par s.

On a, de plus, $\mathcal{S}_k \geq s$. Il existe donc un entier M_k tel que $\mathcal{S}_k = s(M_k + 1)$. On définit alors

$$n_0(k) = -1 + s\sum_{j=0}^{M_k} q^j\,.$$

Soit $N_0(k) = q^k n_0(k) + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})$. On pose $N_k = M_k + k$. On a alors

$$N_0(k) = v + s \sum_{j=k}^{N_k} (q^j - 1)\,.$$

6.2. *Preuve de la non-nullité de $F(N_0(k))$.* Soit w tel que $p_w \neq 0$. On a donc $w \geq v$. Supposons que $f^w(N_0(k)) \neq 0$. Soit $d = [\frac{\ln v}{\ln q}]$ si $v \geq 1$, et $d = 0$ sinon. On définit, de même, $\Delta = [\frac{\ln w}{\ln q}]$ si $w \geq 1$, et $\Delta = 0$ sinon. On a $d \leq \Delta$.

D'après la proposition 3.1, il existe $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ avec $\mu_i \in \{0, \ldots, s\}$, et $\mu_i = 0$ pour i assez grand, tels que

$$N_0(k) = w + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (q^i - 1)\,. \tag{10}$$

Or $N_0(k) = v + s \sum_{j=k}^{N_k} (q^j - 1)$. On a donc

$$w + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i (q^i - 1) = v + s \sum_{j=k}^{N_k} (q^j - 1)\,.$$

On a alors égalité des coefficients d'indice supérieur à k, d'après le lemme 1. En effet, pour k assez grand, on a $k > \Delta + 1 \geq d + 1$ et

$$w + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i (q^i - 1) \leq (q-1)(q^{k-1} - 1), \qquad v \leq (q-1)(q^{k-1} - 1)\,.$$

Par conséquent, on est ramené à l'égalité suivante :

$$v = w + \sum_{i=1}^{k-1} \mu_i (q^i - 1)\,.$$

Or $v \leq w$. On a donc $v = w$ et $\mu_i = 0$ pour $1 \leq i \leq k-1$.

On en déduit, d'une part, que pour $v = w$, il y a unicité de la décomposition de $N_0(k)$ sous la forme (10) et par conséquent, que $f^v(N_0(k)) \neq 0$, d'après la proposition 3.3. Pour $w \neq v$, on a, d'autre part, $f^w(N_0(k)) = 0$. En conclusion, $F(N_0(k)) \neq 0$.

6.3. *Preuve de la non-nullité de $G(N_0(k))$.* Soit w tel que $p_w \neq 0$. Supposons que $g^w(N_0(k)) \neq 0$. Soit $\Delta = [\frac{\ln w}{\ln q}]$ si $w \geq 1$, et $\Delta = 0$ sinon. On a, d'après la proposition 3.2,

$$N_0(k) = q + \ldots + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (q^j - 1)\,, \tag{11}$$

avec $i \geq 1$, $0 \leq \mu_j \leq s-1$ pour $1 \leq j \leq i$, et $0 \leq \mu_j \leq s$ pour $j \geq i+1$.

Considérons une telle écriture. On a alors l'égalité suivante :

$$q + \ldots + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j (q^j - 1) = v + s \sum_{j=k}^{N_k} (q^j - 1)\,.$$

On a vu, au paragraphe 5, cas 1, que si $i \geq k$, alors

$$q+\ldots+q^{i-1}+(w+1)q^i+\sum_{j=1}^{\infty} \mu_j(q^j-1) \geq q^k n_1(k)+r+(q-2)(q+\ldots+q^{k-1})\,,$$

avec

$$n_1(k) = v + (s-1) + s(q + \ldots + q^{x_1(k)}) + y_1(k) q^{x_1(k)+1}\,,$$

où $x_1(k)$ et $y_1(k)$ sont les reste et quotient de la division euclidienne par s de la quantité $q^k - r - (q-3)(q+\ldots+q^{k-1}) - (s-1)$. Or, pour k assez grand, on a :

$$q^k - r - (q-2)(q + \ldots + q^{k-1}) + v < q^k - r - (q-3)(q + \ldots + q^{k-1})\,,$$

c'est-à-dire, $n_0(k) < n_1(k)$. On ne peut donc pas avoir $N_0(k) \geq q^k n_1(k) + r + (q-2)(q + \ldots + q^{k-1})$, ni, a fortiori, $i \geq k$.

Nous allons distinguer deux cas selon les valeurs prises par i, avec $i \leq k-1$, et montrer qu'ils aboutissent tous deux à une contradiction.

• Supposons $i + \Delta + 1 \leq k - 1$. On a donc

$$q + \ldots + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j (q^j - 1) \leq (q-1)(q^{k-1} - 1)\,.$$

D'après le lemme 1, on est alors ramené à l'égalité suivante :

$$v = q + \ldots + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{k-1} \mu_j (q^j - 1)\,,$$

ce qui est impossible car $v \leq w$.

• Supposons donc $k - \Delta - 1 \leq i \leq k - 1$. On a, pour k assez grand, $i + \Delta + 1 \leq N_k$. On est, d'après le lemme 1, ramené à l'égalité entre les deux expressions suivantes :

$$v + s(q^k - 1) + \ldots + s(q^{i+\Delta+1} - 1)$$

et

$$q + \ldots + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{i+\Delta+1} \mu_j (q^j - 1)\,.$$

On a, pour i assez grand, donc pour k assez grand, $q^{i-2} - (s(i+\Delta+2-k)) \geq 0$ et $q^{i-2} - \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j \geq 0$. En ajoutant q^{i-2} aux deux membres, on obtient alors une nouvelle égalité entre les deux expressions suivantes :

$$v + q^{i-2} - (s(i + \Delta + 2 - k)) + sq^k + \ldots + sq^{i+\Delta+1} \tag{12}$$

et

$$(13) \quad q + \ldots + q^{i-1} + (w+1)q^i + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j (q^j - 1) + \Big(q^{i-2} - \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j\Big) + \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j q^j \,.$$

On a, de même, pour k assez grand,

$$v + q^{i-2} - (s(i+\Delta+2-k)) < q^i \,,$$
$$q + \ldots + q^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j (q^j - 1) + \Big(q^{i-2} - \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j\Big) < q^i \,.$$

Effectuons alors la division euclidienne de (12) et de (13) par q^i. On a, d'après l'unicité du reste,

$$v+q^{i-2}-(s(i+\Delta+2-k)) = q+\ldots+q^{i-1}+\sum_{j=1}^{i-1} \mu_j (q^j-1)+\Big(q^{i-2}-\sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j\Big) \,.$$

Or, pour k assez grand,

$$v + q^{i-2} - (s(i+\Delta+2-k)) < q^{i-1}$$

et

$$q + \ldots + q^{i-1} + \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j (q^j - 1) + \Big(q^{i-2} - \sum_{j=i}^{i+\Delta+1} \mu_j\Big) \geq q^{i-1} \,.$$

On obtient ici encore une contradiction.

On ne peut donc pas avoir de décomposition de $N_0(k)$ sous la forme (11) et par conséquent, $G(N_0(k)) = 0$.

Note (ajoutée en octobre 93)**.** Laurent Denis m'a indiqué qu'il sait généraliser ce résultat en le déduisant du théorème de Gelfond–Schneider : il obtient ainsi la transcendance de $\lambda(P)/\pi^r$ pour $q \neq 2$, où P est une série algébrique de degré inférieur à $q/(q-1)$ et r un nombre rationnel (voir [13]).

Bibliographie

[1] J.-P. Allouche, *Sur la transcendance de la série formelle Π*, Sém. Théorie des Nombres de Bordeaux 2 (1990), 103–117.

[2] V. Berthé, *De nouvelles preuves "automatiques" de transcendance pour la fonction zêta de Carlitz*, Astérisque 209 (1992), 159–168.

[3] —, *Fonction zêta de Carlitz et automates*, Sém. Théorie des Nombres de Bordeaux 5 (1993), 53–77.

[4] L. Carlitz, *On certain functions connected with polynomials in a Galois field*, Duke Math. J. 1 (1935), 137–168.

[5] H. Chérif, *Mesure d'irrationalité de valeurs de la fonction zêta de Carlitz sur* $\mathbf{F}_q[T]$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 310 (1990), 23–26.
[6] H. Chérif and B. de Mathan, *Irrationality measures of Carlitz zeta values in positive characteristic*, J. Number Theory, à paraître.
[7] —, —, *Mesure d'irrationalité de la valeur en* 1 *de la fonction zêta de Carlitz, relative à* $\mathbf{F}_2(T)$, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 305 (1987), 761–763.
[8] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France et G. Rauzy, *Suites algébriques, automates et substitutions*, Bull. Soc. Math. France 108 (1980), 401–419.
[9] G. Dammame, *Irrationalité de* $\zeta(s)$ *dans le corps des séries formelles* $\mathbf{F}_q((1/t))$, C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada 9 (1987), 207–212.
[10] —, *Transcendance de la fonction zêta de Carlitz par la méthode de Wade*, Thèse, Caen, 1990.
[11] G. Dammame and Y. Hellegouarch, *Transcendance of the values of the Carlitz zeta function by Wade's method*, J. Number Theory 39 (1991), 257–278.
[12] —, —, *Propriétés de transcendance des valeurs de la fonction zêta de Carlitz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 307 (1988), 635–637.
[13] L. Denis, *Méthodes fonctionnelles pour la transcendance en caractéristique finie*, prépublication.
[14] V. G. Drinfeld, *Elliptic modules*, Mat. Sb. 94 (136) (1974), 594–627 (en russe); trad. angl. : Math. USSR-Sb. 23 (1974), 561–592.
[15] E. U. Gekeler, *Drinfeld Modular Curves*, Lecture Notes in Math. 1231, Springer, 1986.
[16] F. Recher, *Propriétés de transcendance de séries formelles provenant de l'exponentielle de Carlitz*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I 315 (1992), 245–250.
[17] D. S. Thakur, *Gauss functions and Gauss sums for function fields and periods of Drinfeld modules*, Ph.D. thesis, Harvard, 1987.
[18] —, *Number fields and function fields*, dans : N. De Grande-De Kimpe and L. Van Hamme (eds.), Proc. Conf. on p-adic Analysis, Hengelhoef, 1986, Vrije Universiteit, Brussels, 149–157.
[19] L. J. Wade, *Certain quantities transcendental over* $GF(p^n, x)$, Duke Math. J. 8 (1941), 701–720.
[20] —, *Transcendence properties of the Carlitz* ψ*-function*, ibid. 13 (1946), 79–85.
[21] M. Waldschmidt, *Transcendence problems connected with Drinfeld modules*, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mecm. Ser. A 49 (1990), 57–75.
[22] J. Yu, *Transcendence and special zeta values in characteristic* p, Ann. of Math. 134 (1991), 1–23.
[23] —, *Transcendental numbers arising from Drinfeld modules*, Mathematika 30 (1983), 61–66.
[24] —, *Transcendental theory over function fields*, Duke Math. J. 52 (1985), 517–527.

LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES DISCRÈTES
LUMINY CASE 930
13 288 MARSEILLE CEDEX 9, FRANCE

Reçu le 22.2.1993
et révisé le 24.8.1993 (2385)