ACTA ARITHMETICA
LXV.4 (1993)

Martin Eichler (1912–1992)

von

MARTIN KNESER (Göttingen)*

Martin Eichler wurde am 29. März 1912 in Pinnow (Kreis Greifswald) geboren. Sein Vater war Pastor. Den ersten Unterricht erteilten ihm seine Eltern, bevor er 1923 bis 1930 in Gütersloh das Gymnasium besuchte. Anschließend studierte er Mathematik und Physik, auch Chemie, in Königsberg, Zürich und schließlich in Halle, wo er 1935 mit der von Heinrich Brandt angeregten Dissertation [1] promovierte.

Danach war er kurze Zeit Hilfsassistent am Mathematischen Seminar der Universität Halle, doch wurde ihm diese Anstellung bald aus politischen Gründen entzogen. Glücklicherweise konnte ihn Hasse vorübergehend zur Hilfe bei der Herausgabe der Neuauflage der Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften heranziehen und dann für seine Anstellung als Assistent am Mathematischen Institut der Universität Göttingen sorgen. Hier erwarb Eichler mit der Arbeit [7] den Grad eines Dr.sc.nat.habil. und wurde 1939 zum Dozenten ernannt.

Seine weitere mathematische Entwicklung unterbricht der Krieg: Bald wird er zu technischen Entwicklungsvorhaben an der Heeresversuchsstelle Peenemünde und an der Technischen Hochschule Darmstadt herangezogen. Nach dem Krieg sehen wir ihn zunächst bis 1947 wieder in Göttingen, dann zwei Jahre am Royal Aircraft Establishment in Farnborough/England, ehe er 1949 nach Deutschland zurückkehrt und als außerplanmäßiger Professor an die Universität Münster geht. Eine ordentliche Professur erhielt er 1956 in Marburg, von wo er zwei Jahre später einem Ruf an die Universität Basel als Nachfolger von Alexander Ostrowski folgte. Dort war er bis zu seiner Emeritierung und darüber hinaus tätig. Am 7. Oktober 1992 ist er nach langem Leiden verstorben.

In seinen ersten mathematischen Arbeiten [1–7, 9] beschäftigt sich Eichler mit der Arithmetik einfacher Algebren über Zahlkörpern. Sein Lehrer

* Unter Verwendung eines unveröffentlichten Manuskripts: M. Eichler, *My life's mathematical work*.

Brandt hatte 1928 eine Theorie maximaler Quaternionen-Ordnungen entwickelt, während in der Dissertation [1] allgemeiner auch nicht-maximale Ordnungen untersucht werden. Eichler hat es später als einen glücklichen Umstand bezeichnet, daß er früh mit Quaternionen in Berührung kam, da diese in vielen seiner späteren Untersuchungen vorkommen; eine Rolle spielen sie schon in den frühen Arbeiten [2, 5, 7], in denen die Idealklassenzahl einer einfachen Algebra auf die ihres Zentrums zurückgefürt wird, außer bei total definiten Quaternionen-Algebren, für die in [4] eine ganz anders geartete Maßformel bewiesen wird. Besonders wichtig für Anwendungen auf verschiedene Probleme der Algebra und Zahlentheorie sind aus der Habilitationsschrift [7] die Ergebnisse über die Lösbarkeit von Normgleichungen mit Kongruenzbedingungen.

Diese erste Periode arithmetischer Untersuchungen endet abrupt 1939. Im Zusammenhang mit kriegsbedingter Forschung entstehen in den nächsten Jahren einige Veröffentlichungen, die keine Verbindung mit seinen späteren Arbeiten aufweisen, und auf die wir hier nicht näher eingehen. Andererseits zeigt die Note [16] ein auch in der Kriegszeit fortdauerndes Interesse an arithmetischen Fragen, jetzt auf die Theorie der quadratischen Formen gerichtet. Ihr folgen aus diesem Gebiet die Arbeiten [18, 21, 26–30] und schließlich die zusammenfassende Monographie [31] “Quadratische Formen und orthogonale Gruppen”. Sie stellt das erste moderne Lehrbuch der Theorie der quadratischen Formen dar, in dem nach dem Vorbild von Witt konsequent die geometrische Sprache verwendet wird. Außer der klassischen Theorie kommen darin auch neue Begriffe und Methoden zur Sprache, insbesondere im vierten Kapitel die sogenannten “Anzahlmatrizen”, eine weitgehende Verallgemeinerung auf quadratische Formen beliebiger Variablenzahl von Bildungen, die Brandt bei Quaternionen eingeführt hatte, und die gewissen multiplikativen Eigenschaften von Darstellungsanzahlen zugrunde liegen. Weitere Beispiele sind die mit Hilfe von Clifford-Algebren und der Spinor-Norm definierten Spinor-Geschlechter, die insbesondere für indefinite Formen von Bedeutung sind und übersichtlichere Formulierungen und Beweise für alte Ergebnisse von A. Meyer gestatten.

Nach Abschluß dieser Arbeiten über quadratische Formen interessiert sich Eichler mehr und mehr für elliptische Modulformen, ein Interesse, das sich in einer ganzen Reihe bedeutender Arbeiten erweist. Da ist zunächst die Note [32] mit dem Beweis der Ramanujan–Petersson-Vermutung für Spitzenformen vom Gewicht 2 zur Kongruenzgruppe

$$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \,\middle|\, c \equiv 0 \bmod N \right\},$$

d.h. der Abschätzung $a_n = O(n^{1/2+\varepsilon})$ für die Fourierkoeffizienten einer solchen Spitzenform $\sum_n a_n e^{2\pi i n \tau}$ (bzw. $a_p = O(p^{1/2})$ für Primzahlen p).

Der Beweis verwendet Modularkorrespondenzen und die Riemannsche Vermutung für Kongruenz-Funktionenkörper.

Es folgen die Arbeiten [34, 35] zum sogenannten “Basisproblem”. Hier handelt es sich um die Aufgabe, für den Raum $S_k(\Gamma_0(N))$ der Spitzenformen vom Gewicht k zu $\Gamma_0(N)$ (oder geeignete Unterräume) arithmetisch ausgezeichnete Basen zu finden. So wird z.B. in [35] als Hauptergebnis gezeigt, daß $S_2(\Gamma_0(N))$ für Primzahlstufe N von den Differenzen von Thetareihen zu quaternären quadratischen Formen der Diskriminante N^2 (und Stufe N) erzeugt wird. Zum Beweis werden die Heckeschen Operatoren $T(p)$ herangezogen. Sie operieren sowohl auf $S_2(\Gamma_0(N))$ als auch auf dem von den Thetadifferenzen aufgespannten Unterraum. Ihre entsprechenden Spuren sind für den ersten Fall in [35], für den zweiten in [34] berechnet und stellen sich als gleich heraus, woraus dann die Behauptung folgt.

Eichler ist auch später noch auf das Basisproblem zurückgekommen und hat dadurch andere Mathematiker zu weiteren Untersuchungen angeregt. In [62] behandelt er den Fall allgemeinen geraden Gewichts $k > 2$ und quadratfreier Stufe N und erhält Darstellungen von Spitzenformen durch verallgemeinerte Thetareihen mit Kugelfunktionen vom Grad $k - 2$ zu quaternären Formen.

Die dazu nötigen Spuren der Operatoren $T(p)$ auf den Räumen $S_k(\Gamma_0(N))$ hatte Selberg 1956 angegeben. Eine neue Herleitung dieser Formeln gab Eichler in der wichtigen Arbeit [41], in der auch die sogenannte “Eichler-Kohomologie” erscheint.

In die ersten Jahre nach Eichlers Übersiedlung nach Basel fällt die Arbeit an seinem zweiten Buch [46] “Einführung in die Theorie der algebraischen Zahlen und Funktionen”. Bemerkenswert darin am Anfang die Darlegung der Teilbarkeitslehre mittels Kroneckerscher Divisoren und als Höhepunkt das Kapitel über Korrespondenzen. Vorangegangen waren zwei kleine Noten [44, 45] zum Riemann–Rochschen Satz für Funktionenkörper einer Veränderlichen, während die späteren Arbeiten [47, 48, 51, 53, 54, 55] seine Bemühungen um Aussagen vom Riemann–Rochschen Typ für Funktionenkörper mehrerer Veränderlicher dokumentieren, ebenso wie die Vorlesungen [59] — all dies ohne die Hilfsmitel der modernen algebraischen Geometrie.

In den 70er Jahren erweitert Eichler seine Untersuchungen von elliptischen auf Siegelsche und Hilbertsche Modulformen und betrachtet dementsprechend Thetafunktionen zu quadratischen Formen auch über total reellen Zahlkörpern [63, 65, 68, 70, 74]. Schließlich gilt sein Interesse als letztem großen Fragenkreis den Jacobi-Formen, das sind holomorphe Funktionen zweier komplexer Variabler τ ($\operatorname{Im}\tau > 0$) und z, die ein bestimmtes Transformationsverhalten zeigen und eine gewisse Fourier-Entwicklung gestatten; wichtiges Beispiel sind die Thetafunktionen positiv definiter quadratischer Formen. In der mit Zagier gemeinsam verfaßten Monographie [77] — aus ursprünglich von einander unabhängigen Überlegungen entstanden — werden die Grundeigenschaften dieser Formen hergeleitet, Hecke-Operatoren definiert und die Struktur des Ringes aller Jacobi-Formen untersucht. Als Anwendung ergibt sich ein neuer Beweis der schon von Maaß behandelten Saito–Kurokawa-Vermutung. Die seither von Zagier und anderen weiter entwickelte Theorie baut auf diesem Werk auf.

Überblickt man Eichlers mathematische Arbeiten, so trifft man mehrfach auf Stellen, an denen er überraschend völlig neue Wege geht, sie selbst ein gehöriges Stück weit verfolgt, vor allem aber andere zur Weiterarbeit anregt. Er war ein besonders ideenreicher Mathematiker, der an sich selbst hohe Ansprüche stellte, und ganz niedergeschlagen sein konnte, wenn er meinte, diese Ansprüche nicht erfüllt zu haben, etwa wenn er wieder einmal einer Abhandlung eine Berichtigung hinterherschicken mußte. Solche kleinen Mängel wurden aber weit aufgehoben durch die Originalität seiner Arbeiten. Er hinterläßt ein beeindruckendes mathematisches Lebenswerk.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT
BUNSENSTR. 3/5
D-37073 GÖTTINGEN, B.R.D.

Eingegangen am 20.8.1993 (2473)