ACTA ARITHMETICA
LXV.2 (1993)

# Nombres $\mathcal{B}$-libres dans les petits intervalles

par

J. Wu (Nancy)

**1. Introduction.** Le problème de la localisation des nombres sans facteur carré dans les petits intervalles $(x-x^\theta, x]$ avec $0 < \theta \le 1$ est un sujet intéressant de la théorie analytique des nombres. Il s'agit en fait de chercher des réels $\theta$ aussi petits que possible tels que l'intervalle $(x-x^\theta, x]$ contienne au moins un nombre sans facteur carré pour $x \ge x_0(\theta)$. Le meilleur résultat sur ce problème est dû à Filaseta et Trifonov [6], qui ont démontré que, pour $\theta > 1/5$ et $x$ assez grand, l'intervalle $(x-x^\theta, x]$ contient au moins un nombre sans facteur carré.

Dans le but de généraliser ce problème, Erdős [5] a introduit la notion des nombres $\mathcal{B}$-libres. Plus précisément, soit $\mathcal{B}$ une suite d'entiers

$$\mathcal{B} = \{b_k : 1 < b_1 < b_2 < \ldots < b_k < \ldots\}$$

telle que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} < \infty \quad \text{et} \quad (b_k, b_j) = 1 \quad (k \ne j)\,. \tag{1.1}$$

Désignons par $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{B})$ la suite des entiers qui ne sont divisibles par aucun élément de $\mathcal{B}$. On appelle *nombre $\mathcal{B}$-libre* élément de $\mathcal{A}$. La notion de nombre $\mathcal{B}$-libre est une généralisation de celle de nombre sans facteur carré : en choisissant pour $\mathcal{B}$ la suite des carrés des nombres premiers, on obtient bien pour $\mathcal{A}$ la suite des nombres sans facteur carré.

Dans ce travail, nous nous intéressons à la question soulevée par Erdős [5] de trouver les réels $\theta$ les plus petits possibles pour lesquels

(1.2) le petit intervalle $(x-x^\theta, x]$ contient au moins un nombre $\mathcal{B}$-libre pour $x \ge x_0(\theta, \mathcal{B})$.

Erdős conjecture que (1.2) est vrai pour tout $\theta > 0$, mais une confirmation semble extrêmement difficile en l'état actuel des connaissances. Même dans le cas des nombres sans facteur carré, les meilleurs estimations connues sont bien plus faibles qu'un tel résultat. Une difficulté supplémentaire de la question (1.2) réside dans la très grande généralité de l'hypothèse (1.1), qui n'interdit pas un comportement anarchique de la suite $\mathcal{B}$. Erdős [5] fut le premier à fournir une assertion générale de type (1.2) en établissant cette relation pour un certain $\theta < 1$. Szemerédi [11] a ensuite prouvé, par une méthode élémentaire, que (1.2) est valable pour tout $\theta > 1/2$. Grâce à un système de poids, Bantle et Grupp [1] ramènent (via la technique de Fourier, voir Lemme 9 ci-dessous) ce problème à la majoration d'une somme d'exponentielles de type II :

$$S_{II} := \sum_{h\sim H}\sum_{m\sim M}\sum_{n\sim N} \varphi_m \psi_n e\left(\frac{hx}{mn}\right),$$

où $e(t) := \exp\{2\pi it\}$, $|\varphi_m| \le 1, |\psi_n| \le 1$ et $h \sim H$ signifie que $cH < h \le c'H$ où $c$ et $c'$ sont deux constantes positives arbitraires. Ils font alors appel à une évaluation de Fouvry et Iwaniec ([7], Théorème 6) pour $S_{II}$ et obtiennent $\theta > 9/20$. Dans [12], nous modifions les poids de Bantle et Grupp de la façon suivante : le coefficient $\varphi_m$, initialement égal à la fonction caractéristique des nombres premiers, est transformé en $\varphi_m(\eta)$, fonction caractéristique des entiers dont tous les facteurs premiers sont supérieurs à $x^\eta$ ($\eta$ très petit). Par le lemme fondamental de la théorie du crible on est ramené à étudier, avec une erreur acceptable, la somme

$$S_I := \sum_{h\sim H}\sum_{m\sim M}\sum_{n\sim N} \psi_n e\left(\frac{hx}{mn}\right),$$

qui est maintenant de type I. Cette quantité est plus facile à traiter grâce à $\varphi_m = 1$; nous utilisons un théorème de Fouvry et Iwaniec ([7], Théorème 5), ce qui nous permet d'obtenir $\theta > 5/12$.

Dans cet article, en améliorant la majoration pour $S_I$ de Fouvry et Iwaniec [7] et en combinant la méthode de [12] nous parvenons au résultat suivant :

Théorème. *Si la suite $\mathcal{B}$ satisfait à* (1.1), *alors pour tout $\theta > 17/41$, il existe une constante $x_0(\theta, \mathcal{B})$ telle que la minoration*

$$\sum_{\substack{x-x^\theta<n\le x\\ n\in\mathcal{A}(\mathcal{B})}} 1 \gg_{\theta,\mathcal{B}} x^\theta$$

*ait lieu pour $x \ge x_0(\theta, \mathcal{B})$.*

L'auteur tient à exprimer sa plus profonde gratitude au Professeur E. Fouvry pour l'aide qu'il lui a apportée dans l'élaboration de ce travail. Il remercie aussi le Professeur M. Filaseta pour ses conseils.

**2. Début de la démonstration du Théorème.** Comme d'habitude, nous désignons respectivement par $\mathbb{N}$ et $\mathbb{P}$ l'ensemble de tous les entiers $\ge 1$

et l'ensemble des nombres premiers. Ici et dans toute la suite, on note $\varepsilon$ un nombre positif arbitrairement petit et $\varepsilon'$ désigne systématiquement un certain multiple constant de $\varepsilon$ qu'il est inutile de préciser ($\varepsilon' = 2\varepsilon, 48\varepsilon, \ldots$). Posons

$$y = x^{\theta} \quad \text{avec} \quad \tfrac{1}{3} + \varepsilon \le \theta < \tfrac{1}{2} \tag{2.1}$$

et soient $\delta_1, \delta_2$ tels que

$$\delta_1 > \tfrac{1}{3}, \quad \delta_2 > \tfrac{1}{7}, \quad \delta_1 + \delta_2 \ge 1 - \theta \quad \text{et} \quad \delta_2 + 2\varepsilon < \delta_1 < \theta - 2\varepsilon\,. \tag{2.2}$$

Nous définissons maintenant

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(x, \delta_1, \varepsilon) := \{m \in \mathbb{N} : x^{\delta_1} < m \le x^{\delta_1+\varepsilon}, p \mid m \Rightarrow p \ge x^{\eta}\}\,, \tag{2.3}$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}(x, \delta_2, \varepsilon) := \{p \in \mathbb{P} : x^{\delta_2} < p \le x^{\delta_2+\varepsilon}\}\,, \tag{2.4}$$

où $\eta = \eta(\varepsilon, \mathcal{B}) > 0$ sera choisi plus tard.

Soit $l = l(\varepsilon, \mathcal{B}) \in \mathbb{N}$ un entier positif tel que

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{b_k} < \frac{B}{28}\varepsilon\,, \tag{2.5}$$

où $B$ est la densité asymptotique de la suite $\mathcal{A}$ des entiers $\mathcal{B}$-libres :

$$B = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{b_k}\right).$$

Ce produit infini est convergent grâce à (1.1).

Choisissons $x_0 = x_0(\varepsilon, \mathcal{B}, \eta)$ tel que

$$\prod_{k=1}^{l} b_k \le \log x < x^{\eta} \tag{2.6}$$

pour $x \ge x_0$. Nous imposerons plus tard d'autres restrictions supplémentaires sur $x_0$.

On note $\mathbf{1}_{\mathbf{X}}$ la fonction caractéristique de l'ensemble $\mathbf{X} \subseteq \mathbb{N}$, et $\mathbf{1} = \mathbf{1}_{\mathbb{N}}$. Avec ces notations, on définit le poids $c(n)$ par le produit de convolution

$$c(n) = \mathbf{1} * \mathbf{1}_{\mathcal{M}} * \mathbf{1}_{\mathcal{P}}(n)$$

et on considère la somme pondérée suivante :

$$A = \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ n \not\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b)\ \forall b \in \mathcal{B}}} c(n)\,.$$

D'après (2.2)–(2.4), on voit facilement que pour $n \le x$ on a

$$c(n) \le 7 \cdot 2^{1/\eta}\,, \tag{2.7}$$

d'où

$$\sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, b)\ \ \forall b\in\mathcal{B}}} 1 \ge \frac{1}{7\cdot 2^{1/\eta}} \sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, b)\ \ \forall b\in\mathcal{B}}} c(n) = \frac{A}{7\cdot 2^{1/\eta}}\,.$$

Donc pour démontrer notre théorème, il suffit de prouver l'inégalité

$$A \gg_{\theta,\mathcal{B}} x^{\theta} \tag{2.8}$$

pour $x \ge x_0(\varepsilon,\mathcal{B},\eta)$. Pour cela, nous décomposerons d'abord $A$ en quatre parties. Cette décomposition est essentiellement due à Bantle et Grupp [1], mais nous devons la modifier, parce que nos poids $c(n)$ sont quelque peu différents de ceux de Bantle et Grupp.

On démontre sans difficulté le résultat suivant.

Lemme 1. *On a l'inégalité*

$$A \ge A_1 - A_2 - A_3 - A_4\,, \tag{2.9}$$

*où*

$$A_1 := \sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\not\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, b_k)\ \ \forall k\le l}} c(n)\,, \qquad A_2 := \sum_{\substack{b_l<b\le x^{\eta/2}\\ b\in\mathcal{B}}} \sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, b)}} c(n)\,,$$

$$A_3 := \sum_{\substack{x^{\eta/2}<b\le x^{\theta}\\ b\in\mathcal{B}}} \sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, b)}} c(n)\,, \qquad A_4 := \sum_{\substack{x^{\theta}<b\le x\\ b\in\mathcal{B}}} \sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, b)}} c(n).$$

Au paragraphe suivant, on verra que $A_2$, $A_3$ et $A_4$ se comportent comme des termes d'erreur. Quant au terme $A_1$, il fournira le terme principal et un terme d'erreur qui sera traité par des majorations de sommes d'exponentielles (voir les paragraphes 4, 5 et 6).

**3. Majorations de termes d'erreur $A_2$, $A_3$ et $A_4$.** L'objet du paragraphe est de majorer les quantités $A_2$, $A_3$ et $A_4$ apparaissant dans le membre de droite de (2.9). On démontre d'abord le lemme suivant.

Lemme 2. *Sous la condition*

$$\eta = \eta(\varepsilon,\mathcal{B}) < \varepsilon\,, \tag{3.1}$$

*on a l'inégalité*

$$A_2 \le \frac{B\varepsilon}{2} y \sum_{m\in\mathcal{M}} \frac{1}{m}\,.$$

Démonstration. D'abord, les définitions du poids $c(n)$ et de $\mathcal{P}$ et la relation (2.2) nous donnent

$$c(n) \le \sum_{\substack{m\in\mathcal{M}\\ m\mid n}} \sum_{\substack{p\in\mathcal{P}\\ p\mid n}} 1 \le 7 \sum_{\substack{m\in\mathcal{M}\\ m\mid n}} 1$$

pour tout $n \le x$. D'où, il vient

$$A_2 \le 7 \sum_{\substack{b_l < b \le x^{\eta/2} \\ b \in \mathcal{B}}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ n \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, b) \\ n \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, m)}} 1 \, .$$

D'autre part, les relations $p \mid m \Rightarrow p \ge x^\eta$ et $b \le x^{\eta/2}$ impliquent $(b, m) = 1$. On peut donc écrire

$$A_2 \le 7 \sum_{\substack{b_l < b \le x^{\eta/2} \\ b \in \mathcal{B}}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ n \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, bm)}} 1 \le 7 \sum_{\substack{b_l < b \le x^{\eta/2} \\ b \in \mathcal{B}}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \left( \frac{y}{bm} + 1 \right) .$$

Mais par (3.1) et (2.2)–(2.3), il suit

$$bm \le x^{\eta/2+\delta_1+\varepsilon} < x^{\delta_1+2\varepsilon} \le y \, ,$$

ce qui nous permet d'obtenir

$$A_2 \le 14y \sum_{k=l+1}^{\infty} \frac{1}{b_k} \sum_{m \in \mathcal{M}} \frac{1}{m} \, . \tag{3.2}$$

Finalement, le résultat annoncé découle de la conjonction de (2.5) et (3.2).

Le résultat suivant fournit une majoration de $A_3$.

Lemme 3. *On a l'inégalité*

$$A_3 \le 14 \cdot 2^{1/\eta} g(x^{\eta/2}) y \, ,$$

*où*

$$g(x^{\eta/2}) := \sum_{\substack{b > x^{\eta/2} \\ b \in \mathcal{B}}} \frac{1}{b} \to 0 \qquad \textit{quand } x \to \infty \, .$$

Démonstration. Par (2.7), il vient

$$A_3 \le 7 \cdot 2^{1/\eta} \sum_{\substack{x^{\eta/2} < b \le x^\theta \\ b \in \mathcal{B}}} \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ n \equiv 0 \, (\mathrm{mod}\, b)}} 1 \, .$$

Mais $b \le x^\theta = y$ implique

$$A_3 \le 7 \cdot 2^{1/\eta} \sum_{\substack{x^{\eta/2} < b \le x^\theta \\ b \in \mathcal{B}}} \frac{2y}{b} \le 14 \cdot 2^{1/\eta} g(x^{\eta/2}) y \, ,$$

ce qui achève la démonstration.

Il est un peu plus difficile de majorer $A_4$ que $A_2$ et $A_3$. Pour $A_4$, on a le résultat suivant.

Lemme 4. *On a l'inégalité*

$$A_4 \le (7\eta^{-1} + 2^{1/\eta})x^{-\varepsilon} y\,.$$

Démonstration. Par la définition du poids $c(n)$, on peut écrire d'abord

$$A_4 = \sum_{\substack{x^\theta < b \le x \\ b \in \mathcal{B}}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b) \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, mp)}} 1\,.$$

Puisque $b > x^\theta = y$, la somme intérieure précédente est 0 ou 1. Le premier cas n'est pas intéressant. On suppose maintenant que cette somme intérieure est égale à 1. Dans ce cas, il existe un seul $n \in (x - x^\theta, x]$ tel que

$$n \equiv 0 \pmod b \qquad \text{et} \qquad n \equiv 0 \pmod{mp}\,.$$

D'autre part, les relations (2.2)–(2.4) impliquent

$$bmp > x^{\theta+\delta_1+\delta_2} \ge x\,.$$

Donc la somme intérieure ne peut être égale à 1 que si l'on a

$$(b, m) > 1 \qquad \text{ou} \qquad p \mid b\,.$$

On obtient donc l'inégalité

$$A_4 \le \sum_{\substack{x^\theta < b \le x \\ b \in \mathcal{B}}} \sum_{\substack{m \in \mathcal{M} \\ (b,m)>1}} \sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b) \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, mp)}} 1 + \sum_{\substack{x^\theta < b \le x \\ b \in \mathcal{B}}} \sum_{\substack{p \in \mathcal{P} \\ p \mid b}} \sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b) \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, mp)}} 1\,. \tag{3.3}$$

Or les relations (2.2)–(2.4) donnent

$$\sum_{p \in \mathcal{P}} \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b) \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, mp)}} 1 \le 7 \tag{3.4}$$

pour tout $m \in \mathcal{M}$ et tout $b \in \mathcal{B}$ avec $b > x^\theta$, et

$$\sum_{m \in \mathcal{M}} \sum_{\substack{x-y<n\le x \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, b) \\ n \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, mp)}} 1 \le 2^{1/\eta} \tag{3.5}$$

pour tout $p \in \mathcal{P}$ et tout $b \in \mathcal{B}$ avec $b > x^\theta$. En insérant (3.4) et (3.5) dans

(3.3), on obtient donc l'inégalité

$$A_4 \le 7 \sum_{m\in\mathcal{M}} \sum_{\substack{x^\theta < b \le x \\ b\in\mathcal{B},\,(b,m)>1}} 1 + 2^{1/\eta} \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{\substack{x^\theta < b \le x \\ b\in\mathcal{B},\,p\mid b}} 1\,. \tag{3.6}$$

Puisque tout $m \in \mathcal{M}$ a au plus $1/\eta$ facteurs premiers à cause de (2.3), l'inégalité $(b,m) > 1$ a, pour tout $m \in \mathcal{M}$, au plus $1/\eta$ solutions $b \in \mathcal{B}$, c'est-à-dire que pour tout $m \in \mathcal{M}$, on a

$$\sum_{\substack{x^\theta < b \le x \\ b\in\mathcal{B},\,(b,m)>1}} 1 \le \eta^{-1}\,. \tag{3.7}$$

D'ailleurs, l'hypothèse (1.1) implique que pour tout $p \in \mathcal{P}$, on a

$$\sum_{\substack{x^\theta < b \le x \\ b\in\mathcal{B},\,p\mid b}} 1 \le 1\,. \tag{3.8}$$

En combinant (3.6)–(3.8), on obtient

$$A_4 \le 7\eta^{-1} \sum_{m\in\mathcal{M}} 1 + 2^{1/\eta} \sum_{p\in\mathcal{P}} 1 \le 7\eta^{-1} x^{\delta_1+\varepsilon} + 2^{1/\eta} x^{\delta_2+\varepsilon}\,.$$

Il reste à utiliser (2.2) pour terminer la démonstration du Lemme 4.

**4. Estimation du terme principal.** Les paragraphes 4, 5 et 6 sont consacrés à estimer le terme $A_1$ apparaissant dans le membre de droite de (2.9). Le Lemme 5 fournit le terme principal de $A_1$ avec un terme d'erreur, qui sera traité aux deux paragraphes suivants.

Nous posons

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{F}(x,y) &:= \{n \in \mathbb{N} : x - y < n \le x\}\,, \\ \mathcal{F}_d = \mathcal{F}_d(x,y) &:= \{n \in \mathcal{F} : n \equiv 0 \pmod d\}\,, \\ r_d = r_d(x,y) &:= |\mathcal{F}_d(x,y)| - y/d\,. \end{aligned}$$

Pour chaque $\sigma = \{k_1, k_2, \ldots, k_i\} \subseteq \{1, 2, \ldots, l\}$, nous définissons

$$|\sigma| = i \quad \text{et} \quad d_\sigma = b_{k_1} b_{k_2} \ldots b_{k_i}$$

avec les conventions

$$|\emptyset| = 0 \quad \text{et} \quad d_\emptyset = 1\,,$$

où $\emptyset$ note l'ensemble vide.

On démontre le résultat suivant.

Lemme 5. *Pour $x \ge x_0(\varepsilon, \mathcal{B})$, on a l'inégalité*

$$A_1 \ge B\varepsilon y \sum_{m\in\mathcal{M}} \frac{1}{m} + R\,,$$

*où*

$$R := \sum_{\sigma\subseteq\{1,2,\dots,l\}} (-1)^{|\sigma|} \sum_{m\in\mathcal{M}} \sum_{p\in\mathcal{P}} r_{d_\sigma mp}(x,y)\,.$$

Démonstration. Par le principe d'inclusion-exclusion, on peut écrire d'abord

$$\begin{aligned} A_1 &= \sum_{\sigma\subseteq\{1,2,\dots,l\}} (-1)^{|\sigma|} \sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, d_\sigma)}} c(n) \\ &= \sum_{\sigma\subseteq\{1,2,\dots,l\}} (-1)^{|\sigma|} \sum_{m\in\mathcal{M}} \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, d_\sigma)\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, mp)}} 1\,. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $\sigma \subseteq \{1,2,\dots,l\}$, tout $m \in \mathcal{M}$ et tout $p \in \mathcal{P}$, on a $(d_\sigma, mp) = 1$ grâce aux relations (2.2)–(2.4) et (2.6), il suit

$$A_1 = \sum_{\sigma\subseteq\{1,2,\dots,l\}} (-1)^{|\sigma|} \sum_{m\in\mathcal{M}} \sum_{p\in\mathcal{P}} \sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, d_\sigma mp)}} 1\,. \tag{4.1}$$

D'autre part, on a l'égalité

$$\sum_{\substack{x-y<n\le x\\ n\equiv 0\,(\mathrm{mod}\, d_\sigma mp)}} 1 = \frac{y}{d_\sigma mp} + r_{d_\sigma mp}(x,y)\,,$$

ce qui nous permet d'écrire (4.1) sous la forme

$$A_1 = y \sum_{\sigma\subseteq\{1,2,\dots,l\}} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{d_\sigma} \sum_{m\in\mathcal{M}} \frac{1}{m} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} + R\,. \tag{4.2}$$

On a évidemment

$$\sum_{\sigma\subseteq\{1,2,\dots,l\}} \frac{(-1)^{|\sigma|}}{d_\sigma} = \prod_{k=1}^{l} \left(1 - \frac{1}{b_k}\right) \ge B\,. \tag{4.3}$$

D'ailleurs, le théorème des nombres premiers donne la minoration

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} = \log\left(\frac{\delta_2+\varepsilon}{\delta_2}\right) + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \ge \varepsilon \tag{4.4}$$

pour $x \ge x_0(\varepsilon, \mathcal{B})$. En reportant (4.3) et (4.4) dans (4.2), on obtient

$$A_1 \ge B\varepsilon y \sum_{m\in\mathcal{M}} \frac{1}{m} + R\,,$$

comme annoncé. Cela termine la démonstration du Lemme 5.

**5. Majorations de sommes d'exponentielles et formes bilinéaires.** Soient $\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$ trois nombres réels, $\varphi_{m_1}$, $\psi_{m_2 m_3}$, $\varphi_{m_1 m_2}$,

$\psi_{m_3}$, $\varphi_m$ et $\psi_n$ des nombres complexes de modules inférieurs à 1, $X > 0$ et $M_1, M_2, M_3, M_4, M, N \geq 1$. Ici, nous considérons deux sommes d'exponentielles de type monomial :

$$S(M_1, M_2, M_3) := \sum_{\substack{m_k \sim M_k \\ 1 \leq k \leq 3}} \varphi_{m_1} \psi_{m_2 m_3} e\bigg( X \frac{m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} m_3^{\alpha_3}}{M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3}} \bigg) ,$$

$$S(M_1, M_2, M_3, M_4) := \sum_{\substack{m_k \sim M_k \\ 1 \leq k \leq 4}} \varphi_{m_1 m_2} \psi_{m_3} e\bigg( X \frac{m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} m_3^{\alpha_3} m_4^{-\alpha_3}}{M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3} M_4^{-\alpha_3}} \bigg) ,$$

et une forme bilinéaire de termes d'erreur de type suivant :

$$R(M, N) := \sum_{m \sim M} \sum_{n \sim N} \varphi_m \psi_n r_{mn}(x, y) .$$

Le premier objet de ce paragraphe est de démontrer les Propositions 1 et 2 suivantes. Nos résultats sont assez généraux, et peuvent posséder un intérêt propre. Dans le paragraphe suivant, nous utiliserons seulement un cas particulier de ces résultats. Il est tout à fait raisonnable de penser que l'on pourra trouver d'autres applications.

Les sommes d'exponentielles de type monomial ci-dessus ont été étudiés par Fouvry et Iwaniec [7]. Ils utilisent pour point de départ une inégalité générale de Bombieri et Iwaniec [3] et introduisent un certain nombre d'innovations, en particulier la distribution de nombres réels de type $(m+q)^\alpha - (m-q)^\alpha$ $(\alpha \neq 0, 1)$. Ici, nous utiliserons, pour traiter ces sommes d'exponentielles, la théorie de paires d'exposants et la technique de Heath-Brown [10].

On a les résultats suivants.

PROPOSITION 1. *On suppose que $\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$ vérifient $\alpha_1 \notin \{0, 1, 2, \dots\}$ et $\alpha_2 \alpha_3 \neq 0$. Alors on a la majoration*

$$\begin{aligned} S(M_1, M_2, M_3) \ll \big(& X^{\kappa/2(1+\kappa)} M_1^{(1+\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)} M_2^{(2+\kappa)/2(1+\kappa)} M_3^{(2+\kappa)/2(1+\kappa)} \\ &+ X^{\kappa/2} M_1^{(1-\kappa+\lambda)/2} M_2^{(2-\kappa)/2} M_3^{(2-\kappa)/2} \\ &+ M_1 M_2^{1/2} M_3^{1/2} \\ &+ M_1^{(1+\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)} M_2 M_3 \\ &+ X^{-1/2} M_1 M_2 M_3 \big) \mathcal{L} , \end{aligned}$$

*où $(\kappa, \lambda)$ est une paire d'exposants et $\mathcal{L} = \log(2XM_1M_2M_3)$.*

PROPOSITION 2. *On suppose que $\alpha_1$, $\alpha_2$ et $\alpha_3$ vérifient $\alpha_1 \alpha_2 (1+\alpha_3) \neq 0$ et $\alpha_3/(1+\alpha_3) \notin \{0, 1, 2, \ldots\}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a la majoration*

$$
\begin{aligned}
&S(M_1,M_2,M_3,M_4)\\
&\qquad \ll (X^{(\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)}M_1^{(2+\kappa)/2(1+\kappa)}M_2^{(2+\kappa)/2(1+\kappa)}\\
&\qquad\quad \times M_3^{(1+\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)}M_4^{(1+\kappa-\lambda)/2(1+\kappa)}\\
&\qquad\quad + X^{\lambda/2(1+\kappa)}M_1M_2M_3^{(1+\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)}M_4^{(1+\kappa-\lambda)/2(1+\kappa)}\\
&\qquad\quad + X^{1/2}M_1^{1/2}M_2^{1/2}M_3\\
&\qquad\quad + X^{\lambda/2}M_1^{(2-\kappa)/2}M_2^{(2-\kappa)/2}M_3^{(1-\kappa+\lambda)/2}M_4^{(1+\kappa-\lambda)/2} + M_1M_2M_3\\
&\qquad\quad + X^{-1/2}M_1M_2M_3M_4)(XM_1M_2M_3M_4)^{\varepsilon}\,,
\end{aligned}
$$

*où $(\kappa,\lambda)$ est une paire d'exposants.*

Pour démontrer ces deux propositions, nous avons besoin de trois lemmes. Le premier est un résultat classique d'espacement de points.

Lemme 6 ([7], Lemme 1). *Soient $\alpha\beta\neq 0$, $\Delta>0$, $H\geq 1$ et $N\geq 1$. Désignons par $\mathcal{D}(H,N,\Delta)$ le nombre de quadruplets $(h_1,h_2,n_1,n_2)$ tels que*

$$\left|\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{\alpha}-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\beta}\right|\leq\Delta$$

*avec $cH<h_1,h_2\leq c'H$ et $dN<n_1,n_2\leq d'N$. Alors on a la majoration*

$$\mathcal{D}(H,N,\Delta)\ll HN\log(2HN)+\Delta H^2N^2\,.$$

*La constante impliquée dans $\ll$ dépend de $\alpha$, $\beta$, $c$, $c'$, $d$, $d'$.*

Le deuxième lemme est dû à Srinivasan; la démonstration peut être trouvée dans [9].

Lemme 7. *Soient $C_i$, $D_j$, $c_i$ et $d_j$ $(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq n)$ des nombres positifs. On pose*

$$L(Q)=\sum_{i=1}^{m}C_iQ^{c_i}+\sum_{j=1}^{n}D_jQ^{-d_j}\,.$$

*Alors pour tous $1\leq Q_1\leq Q_2$, il existe un certain $Q\in[Q_1,Q_2]$ tel que*

$$L(Q)\ll\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(C_i^{d_j}D_j^{c_i})^{1/(c_i+d_j)}+\sum_{i=1}^{m}C_iQ_1^{c_i}+\sum_{j=1}^{n}D_jQ_2^{-d_j}\,,$$

*où la constante impliquée dans le symbole $\ll$ dépend seulement de $m$ et $n$.*

Le troisième lemme dont nous avons besoin est la formule sommatoire de Poisson pour une fonction monomiale (avec un très bon reste).

LEMME 8 ([7], Lemme 7). *Soient $M > 0$, $X > 0$, $\mu > 1$ et $\alpha(\alpha-1) \neq 0$. On a l'égalité*

$$\sum_{M<m\le\mu M} m^{-1/2} e(\alpha^{-1} m^{\alpha} M^{-\alpha} X)$$
$$= \frac{\tau}{2\pi} \int_{-L}^{L} \left\{ \sum_{L/\lambda<l\le\lambda L} l^{-1/2} \left(\frac{X}{lM}\right)^{it} e\left(-\beta^{-1}\left(\frac{lM}{X}\right)^{\beta} X\right)\right\} \frac{\mu^{i(\alpha-1)t}-1}{t}\, dt$$
$$+ O_{\alpha,\mu}(M^{-1/2}\log(2+M) + L^{-1/2}\log(2+L)),$$

*où $\beta = \alpha/(\alpha-1)$, $\lambda = 2(\mu^{\alpha-1}+\mu^{1-\alpha})$, $\tau$ est un nombre complexe de module 1 et $L$ est un nombre vérifiant les inégalités $1/2 < LM/X < 2$.*

Démonstration de la Proposition 1. Soit maintenant $S$ la somme traitée dans la Proposition 1. Sans perte de généralité, on peut supposer que $X \ge 1$. Soit $1 \le Q \le X$, dont on donnera la valeur par la suite. Puisque les variables $m_2$ et $m_3$ vérifient $m_2^{\alpha_2} m_3^{\alpha_3} \le M^* := CM_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3}$ où $C$ est une constante convenable, on décompose leur ensemble de variation en $T_q$ $(1 \le q \le Q)$ défini par

$$T_q := \{(m_2, m_3) : m_2 \sim M_2,\ m_3 \sim M_3,\ M^*(q-1) < m_2^{\alpha_2} m_3^{\alpha_3} Q \le M^* q\},$$

ce qui nous permet d'écrire $S$ en

$$S = \sum_{q\le Q} \sum_{m_1\sim M_1} \varphi_{m_1} \sum_{(m_2,m_3)\in T_q} \psi_{m_2m_3} e\left(X \frac{m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} m_3^{\alpha_3}}{M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3}}\right).$$

Par l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$|S|^2 \ll M_1 Q \sum_{q\le Q} \sum_{m_1\sim M_1} \left| \sum_{(m_2,m_3)\in T_q} \psi_{m_2m_3} e\left(X \frac{m_1^{\alpha_1} m_2^{\alpha_2} m_3^{\alpha_3}}{M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3}}\right)\right|^2$$

que l'on développe en

$$|S|^2 \ll M_1 Q \sum_{q\le Q} \sum_{(m_2,m_3)\in T_q} \psi_{m_2m_3}$$
$$\times \sum_{(\tilde m_2,\tilde m_3)\in T_q} \overline{\psi}_{\tilde m_2\tilde m_3} \sum_{m_1\sim M_1} e\left(X \frac{m_1^{\alpha_1}\sigma}{M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3}}\right)$$

avec $\sigma := m_2^{\alpha_2} m_3^{\alpha_3} - \widetilde m_2^{\alpha_2} \widetilde m_3^{\alpha_3}$. Dans cette expression, en remarquant que $m_2$, $m_3$, $\widetilde m_2$ et $\widetilde m_3$ vérifient $|\sigma| \le M^* Q^{-1}$, on a donc

$$|S|^2 \ll M_1 Q \sum_{m_2,\tilde m_2\sim M_2} \sum_{\substack{m_3,\tilde m_3\sim M_3 \\ |\sigma|\le M^*Q^{-1}}} \left| \sum_{m_1\sim M_1} e\left(X \frac{m_1^{\alpha_1}\sigma}{M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3}}\right)\right| \tag{5.1}$$
$$\ll M_1 Q (E_0 + E_1),$$

où, par définition, $E_0$ et $E_1$ correspondent respectivement aux cas

$$|\sigma| \le X^{-1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3} \quad \text{et} \quad X^{-1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3} < |\sigma| \le M^* Q^{-1}\,.$$

La contribution $E_0$ ne présente aucune difficulté. En effet, par le Lemme 6 on déduit facilement

$$E_0 \ll M_1 \mathcal{D}(M_2, M_3, X^{-1}) \ll (M_1 M_2 M_3 + X^{-1} M_1 M_2^2 M_3^2)\mathcal{L}\,. \tag{5.2}$$

Pour estimer $E_1$, nous discuterons de la taille de $\sigma$. Pour y parvenir, nous découpons l'intervalle $I = (X^{-1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3}, M^* Q^{-1}]$ en $O(\mathcal{L})$ intervalles $(Y, 2Y]$ avec

$$X^{-1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3} < Y \le M^* Q^{-1}\,.$$

Soit donc

$$E_1(Y) := \sum_{\substack{m_2, \tilde{m}_2 \sim M_2 \\ Y < |\sigma| \le 2Y}} \sum_{m_3, \tilde{m}_3 \sim M_3} \bigg| \sum_{m_1 \sim M_1} e\bigg(X \frac{m_1^{\alpha_1} \sigma}{M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3}}\bigg)\bigg|,$$

qui conduit à

$$E_1 \ll \mathcal{L} \max_{Y \in I} E_1(Y)\,.$$

La somme intérieure de $E_1(Y)$ sera traitée à l'aide de la théorie de paires d'exposants. Pour cela, on pose

$$f(t) = \frac{X\sigma}{M_1^{\alpha_1} M_2^{\alpha_2} M_3^{\alpha_3}} t^{\alpha_1}\,.$$

En remarquant que pour tout $t \sim M_1$ on a

$$|f'(t)| \asymp X M_1^{-1} M_2^{-\alpha_2} M_3^{-\alpha_3} Y\,,$$

on peut obtenir (voir [9])

$$\begin{aligned} E_1(Y) \ll ((X M_1^{-1} M_2^{-\alpha_2} M_3^{-\alpha_3} Y)^{\kappa} M_1^{\lambda} &+ (X M_1^{-1} M_2^{-\alpha_2} M_3^{-\alpha_3} Y)^{-1}) \\ &\times \mathcal{D}(M_2, M_3, M_2^{-\alpha_2} M_3^{-\alpha_3} Y)\,, \end{aligned}$$

où $(\kappa, \lambda)$ est une paire d'exposants. Il en résulte, par le Lemme 6,

$$\begin{aligned} E_1(Y) \ll (&X^{\kappa} M_1^{-\kappa+\lambda} M_2^{1-\alpha_2\kappa} M_3^{1-\alpha_3\kappa} Y^{\kappa} \\ &+ X^{\kappa} M_1^{-\kappa+\lambda} M_2^{2-\alpha_2(1+\kappa)} M_3^{2-\alpha_3(1+\kappa)} Y^{1+\kappa} \\ &+ X^{-1} M_1 M_2^{1+\alpha_2} M_3^{1+\alpha_3} Y^{-1} + X^{-1} M_1 M_2^2 M_3^2)\mathcal{L}\,, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} E_1 \ll (X^{\kappa} M_1^{-\kappa+\lambda} M_2 M_3 Q^{-\kappa} &+ X^{\kappa} M_1^{-\kappa+\lambda} M_2^2 M_3^2 Q^{-1-\kappa} \\ &+ M_1 M_2 M_3 + X^{-1} M_1 M_2^2 M_3^2)\mathcal{L}^2\,. \end{aligned}$$

En combinant cette majoration avec (5.1) et (5.2), on obtient

$$\begin{aligned} |S|^2 \ll (&M_1^2 M_2 M_3 Q + X^{-1} M_1^2 M_2^2 M_3^2 Q \\ &+ X^{\kappa} M_1^{1-\kappa+\lambda} M_2 M_3 Q^{1-\kappa} + X^{\kappa} M_1^{1-\kappa+\lambda} M_2^2 M_3^2 Q^{-\kappa})\mathcal{L}^2\,. \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 7 avec $Q_1 = 1$ et $Q_2 = X$, on voit qu'il existe un certain $Q \in [1, X]$ tel que l'on a la majoration

$$\begin{aligned}|S|^2 \ll (&X^{\kappa/(1+\kappa)} M_1^{(1+\kappa+\lambda)/(1+\kappa)} M_2^{(2+\kappa)/(1+\kappa)} M_3^{(2+\kappa)/(1+\kappa)} \\ &+ M_1^2 M_2 M_3 + X^{\kappa} M_1^{1-\kappa+\lambda} M_2^{2-\kappa} M_3^{2-\kappa} \\ &+ M_1^{(1+\kappa+\lambda)/(1+\kappa)} M_2^2 M_3^2 + X^{-1} M_1^2 M_2^2 M_3^2)\mathcal{L}^2 \,,\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration de la Proposition 1.

Démonstration de la Proposition 2. Comme précédemment, soit $S$ la somme traitée dans la Proposition 2. On applique le Lemme 8 à la somme en $m_4$. Après intégration par rapport à $t$ et en remarquant l'inégalité

$$\frac{\mu^{i(\alpha-1)t} - 1}{t} \ll \min\{1/t, \log \mu\} \,,$$

on parvient à l'inégalité

$$S \ll (X^{-1/2} M_4 T + M_1 M_2 M_3 + X^{-1/2} M_1 M_2 M_3 M_4)\mathcal{L} \,, \tag{5.3}$$

où

$$T := \sum_{m_1 \sim M_1} \sum_{m_2 \sim M_2} \sum_{m_3 \sim M_3} \sum_{m_4' \sim M_4'} \widetilde{\varphi}_{m_1 m_2} \widetilde{\psi}_{m_3} \zeta_{m_4'} \times e\left(\widetilde{\alpha}_3 X \frac{m_1^{\beta_1} m_2^{\beta_2} m_3^{\beta_3} {m_4'}^{\beta_3}}{M_1^{\beta_1} M_2^{\beta_2} M_3^{\beta_3} {M_4'}^{\beta_3}}\right)$$

avec

$$\beta_k = \alpha_k/(1+\alpha_3) \quad (1 \le k \le 3), \qquad \widetilde{\alpha}_3 = |1+\alpha_3||\alpha_3|^{-\beta_3}, \qquad M_4' = X M_4^{-1} \,,$$
$$|\widetilde{\varphi}_{m_1 m_2}| \le 1, \qquad |\widetilde{\psi}_{m_3}| \le 1, \qquad |\zeta_{m_4'}| \le 1, \qquad \mathcal{L} = \log(2X M_1 M_2 M_3 M_4) \,.$$

En posant

$$M_3' = M_3 M_4' = X M_3 M_4^{-1} \qquad \text{et} \qquad \psi'_{m_3'} = \sum_{\substack{m_3 \sim M_3 \\ m_3 m_4' = m_3'}} \sum_{m_4' \sim M_4'} \widetilde{\psi}_{m_3} \zeta_{m_4'} \,,$$

on peut réécrire $T$ en forme suivante :

$$T = \sum_{m_1 \sim M_1} \sum_{m_2 \sim M_2} \sum_{m_3' \sim M_3'} \widetilde{\varphi}_{m_1 m_2} \psi'_{m_3'} e\left(\widetilde{\alpha}_3 X \frac{m_1^{\beta_1} m_2^{\beta_2} {m_3'}^{\beta_3}}{M_1^{\beta_1} M_2^{\beta_2} {M_3'}^{\beta_3}}\right),$$

qui est une somme que nous avons traitée dans la Proposition 1. En utilisant cette proposition avec $M_1 = M_3'$, $M_2 = M_1$ et $M_3 = M_2$, on obtient

$$\begin{aligned} T \ll (&X^{(1+2\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)} M_1^{(2+\kappa)/2(1+\kappa)} M_2^{(2+\kappa)/2(1+\kappa)} \\ &\times M_3^{(1+\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)} M_4^{-(1+\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)} \\ &+ X^{(1+\lambda)/2} M_1^{(2-\kappa)/2} M_2^{(2-\kappa)/2} M_3^{(1-\kappa+\lambda)/2} M_4^{-(1-\kappa+\lambda)/2} \\ &+ X M_1^{1/2} M_2^{1/2} M_3 M_4^{-1} \\ &+ X^{(1+\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)} M_1 M_2 M_3^{(1+\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)} M_4^{-(1+\kappa+\lambda)/2(1+\kappa)} \\ &+ X^{1/2} M_1 M_2 M_3 M_4^{-1})(X M_1 M_2 M_3 M_4)^{\varepsilon}\,. \end{aligned}$$

Le résultat souhaité découle de la conjonction de cette majoration et (5.3), ce qui complète la démonstration de la Proposition 2.

Corollaire 1. *Soient* $H$, $M$, $N$, $x \geq 1$, *et* $\psi_n$ *des nombres complexes avec* $|\psi_n| \leq 1$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *on a la majoration*

$$\sum_{h\sim H} \sum_{m\sim M} \sum_{n\sim N} \psi_n e\left(\frac{xh}{mn}\right) \ll_\varepsilon MNx^{-2\varepsilon}$$

*dès que l'on a les inégalités* :

(i) $H^{1+2\kappa+2\lambda} \leq M^{1+2\kappa+2\lambda} N^{2\kappa+\lambda} x^{-\kappa-\lambda-\varepsilon'}$;
(ii) $H^{1-\kappa+2\lambda} \leq M^{1-\kappa+2\lambda} N^{\kappa+\lambda} x^{-\lambda-\varepsilon'}$;
(iii) $H^{1+\kappa+2\lambda} \leq M^{1+\kappa+2\lambda} N^{\lambda} x^{-\lambda-\varepsilon'}$;
(iv) $H^3 \leq M^3 N^2 x^{-1-\varepsilon'}$;
(v) $H \leq M x^{-\varepsilon'}$;
(vi) $H \leq M^{-1} N^{-1} x^{1-\varepsilon'}$,

*où* $(\kappa, \lambda)$ *est une paire d'exposants.*

Le résultat souhaité découle immédiatement de la Proposition 2 avec

$$X = \frac{xH}{MN}, \quad M_1 = N, \quad M_2 = 1, \quad M_3 = H, \quad M_4 = M,$$
$$\alpha_1 = -1 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 1\,.$$

Le deuxième objet de ce paragraphe est d'établir la Proposition 3 suivante, qui fournit une majoration pour une forme bilinéaire de termes d'erreur de type I, que nous utiliserons dans le paragraphe suivant pour majorer le terme d'erreur $R$ apparaissant dans le Lemme 5.

Proposition 3. *Soient* $\psi_n$ *des nombres complexes avec* $|\psi_n| \leq 1$. *Alors pour tout* $\varepsilon > 0$, *la majoration*

$$\sum_{m\sim M} \sum_{n\sim N} \psi_n r_{mn}(x, y) \ll_\varepsilon yx^{-\varepsilon}$$

*est vraie dès que l'on a les inégalités*

$$x^{5/14} \leq y \leq x^{23/49}, \quad N \leq y^{19/11} x^{-6/11-\varepsilon'} \quad \text{et} \quad MN \leq y^{1/2} x^{1/2-\varepsilon'}\,.$$

Pour démontrer cette proposition, on rappelle un résultat classique, qui transforme la majoration de formes bilinéaires de termes d'erreur en celle de sommes d'exponentielles.

LEMME 9. *Soient $M, N \geq 1$, $|\varphi_m| \leq 1$ et $|\psi_n| \leq 1$. En posant*

$$S_t(H,M,N) = \sum_{1\leq h\leq H} \sum_{m\sim M} \sum_{n\sim N} \frac{\varphi_m \psi_n}{mn} e\left(\frac{ht}{mn}\right),$$

*on a l'inégalité*

$$|R(M,N)| \leq 2 \int_{x-2y}^{x+y} |S_t(H,M,N)|\, dt + O_\varepsilon(yx^{-\varepsilon})$$

*avec $H = MNy^{-1}x^{3\varepsilon}$.*

En combinant ce lemme et le Corollaire 1 avec $(\kappa, \lambda) = (2/7, 4/7)$ et $H = MNy^{-1}x^{3\varepsilon}$, on obtient bien le résultat de la Proposition 3.

## 6. Majoration de $R$.

Nous sommes maintenant en mesure de majorer le terme d'erreur $R$ apparaissant dans le Lemme 5.

LEMME 10. *Soit $s$ un nombre positif vérifiant les conditions*

$$s \geq 3 \quad \text{et} \quad s\eta < \tfrac{1}{2}\varepsilon < \tfrac{1}{4}\,. \tag{6.1}$$

*Si*

$$\delta_2 \leq (19\theta - 6)/11 - \varepsilon' \quad \text{et} \quad \delta_1 + \delta_2 \leq (\theta+1)/2 - \varepsilon'\,,$$

*on a alors l'inégalité*

$$|R| \leq C_1(\varepsilon) 2^{l(\varepsilon,\mathcal{B})} (\eta^{-1} \exp\{-s\log s\} + x^{-\varepsilon/2}) y\,,$$

*où $C_1(\varepsilon)$ est une constante positive dépendant seulement de $\varepsilon$.*

Pour démontrer ce lemme, nous utilisons de façon essentielle la factorisation du poids $c(n)$ pour faire paraître des formes bilinéaires. Cela sera réalisé à l'aide du lemme fondamental de la théorie du crible.

LEMME 11 ([2], Lemme 4). *Soient $z = x^\eta$ et $Q = z^s$ avec $s \geq 3$. Il existe deux suites $\{\lambda_q^+\}_{q\leq Q}$ et $\{\lambda_q^-\}_{q\leq Q}$ telles que*

$$|\lambda_q^+| \leq 1, \quad |\lambda_q^-| \leq 1\,,$$

$$\begin{cases} (\lambda_q^- * \mathbf{1})(n) = (\lambda_q^+ * \mathbf{1})(n) = 1 & \text{si } p \mid n \Rightarrow p \geq z, \\ (\lambda_q^- * \mathbf{1})(n) \leq 0 \leq (\lambda_q^+ * \mathbf{1})(n) & \text{sinon,} \end{cases}$$

*et*

$$\sum_{q\leq Q} \frac{\lambda_q^\pm}{q} = \{1 + O(\exp\{-s\log s\})\} \prod_{p<z} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Démonstration du Lemme 10. Pour tout $\sigma \subseteq \{1,2,\ldots,l\}$, on pose

$$R(\sigma) := \sum_{m\in\mathcal{M}} \sum_{p\in\mathcal{P}} r_{d_\sigma mp}(x,y)\,.$$

Le Lemme 11 et la relation

$$r_{d_\sigma mp}(x,y) = |\mathcal{F}_{d_\sigma mp}(x,y)| - \frac{y}{d_\sigma mp}$$

nous permettent d'écrire

$$R(\sigma) \le R_1(\sigma) + R_2(\sigma)\,, \tag{6.2}$$

où

$$R_1(\sigma) := \sum_{q\le Q} \lambda_q^+ \sum_{x^{\delta_1}/q<m\le x^{\delta_1+\varepsilon}/q} \sum_{p\in\mathcal{P}} r_{d_\sigma qmp}(x,y)$$

et

$$R_2(\sigma) := \frac{y}{d_\sigma} \sum_{q\le Q} \frac{\lambda_q^+ - \lambda_q^-}{q} \sum_{x^{\delta_1}/q<m\le x^{\delta_1+\varepsilon}/q} \frac{1}{m} \sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p}\,.$$

La majoration de $R_2(\sigma)$ ne présente aucune difficulté. En effet, par les relations simples suivantes :

$$\sum_{x^{\delta_1}/q<m\le x^{\delta_1+\varepsilon}/q} \frac{1}{m} = \varepsilon \log x + O(qx^{-\delta_1})$$

et

$$\sum_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{p} = \log\left(\frac{\delta_2+\varepsilon}{\delta_2}\right) + O\left(\frac{1}{\delta_2 \log x}\right) \le 8\varepsilon\,,$$

on obtient

$$|R_2(\sigma)| \le \frac{8\varepsilon y}{d_\sigma}\left\{\left|\sum_{q\le Q} \frac{\lambda_q^+ - \lambda_q^-}{q}\right| \varepsilon \log x + O(Qx^{-\delta_1})\right\}.$$

En utilisant le Lemme 11, on déduit la majoration

$$|R_2(\sigma)| \ll (\eta^{-1}\exp\{-s\log s\} + Qx^{-\delta_1})y\,. \tag{6.3}$$

Nous allons maintenant majorer $R_1(\sigma)$, ce qui sera finit à l'aide de la Proposition 3. Pour cela, on pose

$$M' = x^{\delta_1}, \qquad M = x^{\delta_1+\varepsilon}, \qquad N' = x^{\delta_2}, \qquad N = x^{\delta_2+\varepsilon}\,,$$
$$\psi_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = p \in \mathcal{P}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En remarquant que

$$r_{d_\sigma qmn}(x,y) = r_{mn}\left(\frac{x}{d_\sigma q}, \frac{y}{d_\sigma q}\right),$$

on peut écrire

$$R_1(\sigma) = \sum_{q\le Q} \lambda_q^+ \sum_{M'/q<m\le M/q} \sum_{N'<n\le N} \psi_n r_{mn}\left(\frac{x}{d_\sigma q}, \frac{y}{d_\sigma q}\right).$$

D'autre part, les relations (2.6) et (6.1) donnent les inégalités

$$1 \le q \le Q = x^{s\eta} < x^{\varepsilon/2} \quad \text{et} \quad 1 \le d_\sigma < x^\eta < x^{\varepsilon/2}.$$

Il en résulte, pour $x \ge x_0(\varepsilon, \mathcal{B}, \eta)$,

$$x^{(19\theta-6)/11-\varepsilon'} < \left(\frac{x}{d_\sigma q}\right)^{(19\theta-6)/11-\varepsilon'}$$

et

$$x^{(\theta+1)/2-\varepsilon'} < \left(\frac{x}{d_\sigma q}\right)^{(\theta+1)/2-\varepsilon'}.$$

Par l'hypothèse du Lemme 10, $\delta_2 \le (19\theta-6)/11-\varepsilon'$ et $\delta_1+\delta_2 \le (\theta+1)/2-\varepsilon'$, ce qui implique

$$N < \left(\frac{x}{d_\sigma q}\right)^{(19\theta-6)/11-\varepsilon'} \quad \text{et} \quad MN/q \le MN < \left(\frac{x}{d_\sigma q}\right)^{(\theta+1)/2-\varepsilon'}.$$

Après un découpage classique, la Proposition 3 fournit la majoration

$$\sum_{M'/q<m\le M/q} \sum_{N'<n\le N} \psi_n r_{mn}\left(\frac{x}{d_\sigma q}, \frac{y}{d_\sigma q}\right) \ll_\varepsilon \frac{y}{d_\sigma q}\left(\frac{x}{d_\sigma q}\right)^{-\varepsilon} (\log x)^2 \ll_\varepsilon x^{-\varepsilon} y (\log x)^2,$$

d'où il découle

$$R_1(\sigma) \ll_\varepsilon x^{-\varepsilon} y (\log x)^2 Q \ll_\varepsilon x^{-\varepsilon/2} y. \tag{6.4}$$

D'après (6.2)–(6.4), on voit facilement qu'il existe une constante positive $C_1(\varepsilon)$ dépendant seulement de $\varepsilon$ telle que

$$R(\sigma) \le C_1(\varepsilon)(\eta^{-1}\exp\{-s\log s\} + x^{-\varepsilon/2})y.$$

De même nous pouvons aussi démontrer

$$R(\sigma) \ge -C_1(\varepsilon)(\eta^{-1}\exp\{-s\log s\} + x^{-\varepsilon/2})y.$$

D'où on déduit les inégalités

$$|R| \le \sum_{\sigma\subseteq\{1,2,\ldots,l\}} |R(\sigma)| \le C_1(\varepsilon) 2^{l(\varepsilon,\mathcal{B})} \big(\eta^{-1}\exp\{-s\log s\} + x^{-\varepsilon/2}\big)y,$$

ce qui complète la démonstration du Lemme 10.

**7. Fin de la démonstration du Théorème.** Pour terminer la démonstration de notre théorème, nous avons encore besoin de deux lemmes. Nous rappelons d'abord un résultat bien connu sur la fonction de Buchstab, sous la forme qu'en a donnée Friedlander ([8], Lemme 2) à partir du travail de de Bruijn ([4], Formule (1.7)).

Lemme 12 ([8], Lemme 2). *Soient $w(t)$ la solution continue de l'équation différentielle aux différences*

$$w(t)=1/t \quad \textit{pour } 1\le t\le 2, \qquad (tw(t))'=w(t-1) \quad \textit{pour } t\ge 2\,,$$

*et*

$$x>1, \qquad z=x^{1/t} \qquad \textit{avec } t\ge 1\,.$$

*Alors on a, uniformément pour $t\ge 2$,*

$$\sum_{\substack{1\le n\le x\\ p\mid n\Rightarrow p\ge z}} 1 = w(t)\frac{x}{\log z}+O\biggl(\frac{x}{\log^2 z}\biggr).$$

On démontre le résultat suivant.

Lemme 13. *Pour $x\ge x_0(\varepsilon,\eta)$, on a l'inégalité*

$$\sum_{m\in\mathcal{M}}\frac{1}{m}\ge\frac{\varepsilon}{2\eta}\,.$$

Démonstration. La technique de sommation par parties appliquée au Lemme 12 donne

$$\sum_{m\in\mathcal{M}}\frac{1}{m}=\frac{1}{\eta\log x}\biggl(w\biggl(\frac{\delta_1+\varepsilon}{\eta}\biggr)-w\biggl(\frac{\delta_1}{\eta}\biggr)\biggr)+O\biggl(\frac{1}{\eta^2\log x}\biggr)+\frac{1}{\eta}\int_{\delta_1}^{\delta_1+\varepsilon} w\biggl(\frac{t}{\eta}\biggr)\,dt\,.$$

Mais on sait que $w(t)\to e^{-\gamma}$ $(>\frac12)$ quand $t\to\infty$, où $\gamma$ est la constante d'Euler ([4], Formule (1.5)). Donc on obtient l'inégalité souhaitée pour $x\ge x_0(\varepsilon,\eta)$ dès que $\eta$ est assez petit, ce qui complète la démonstration du Lemme 13.

Enfin, nous sommes en mesure de terminer la démonstration de notre théorème. Sans perte de généralité, on peut supposer

$$C_2(\varepsilon,\mathcal{B})=C_1(\varepsilon)2^{l(\varepsilon,\mathcal{B})}>\frac{8}{B\varepsilon^2}>16\,. \tag{7.1}$$

Nous choisissons maintenant

$$\begin{gathered}\eta=\min\biggl\{\frac{\varepsilon^2}{5},\frac{1}{C_2(\varepsilon,\mathcal{B})}\biggr\}, \qquad s=\eta^{-1/2}, \qquad \theta=\tfrac{17}{41}+\varepsilon'\,,\\ \delta_1=\theta-\varepsilon', \qquad \delta_2=1-2\theta+\varepsilon'\,.\end{gathered} \tag{7.2}$$

Il est facile de vérifier que les relations (2.1)–(2.2) et les conditions des Lemmes 2 et 10 sont satisfaites, aussitôt que $\varepsilon$ est assez petit. Donc on peut appliquer les Lemmes 1–6, 10 et 13 et obtenir, pour $x \ge x_0(\theta, \mathcal{B})$, l'inégalité

$$A \ge \left\{ \frac{B\varepsilon^2}{4\eta} - C_2(\varepsilon, \mathcal{B})(\eta^{-1} \exp\{-s \log s\} + x^{-\varepsilon/2}) \right. \\ \left. -14 \cdot 2^{1/\eta} g(x^{\eta/2}) - (7\eta^{-1} + 2^{1/\eta})x^{-\varepsilon} \right\} y\,.$$

Mais les relations (7.1) et (7.2) impliquent

$$s \log s = \max\left\{ \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon} \log \frac{\sqrt{5}}{\varepsilon}, \sqrt{C_2(\varepsilon, \mathcal{B})} \log \sqrt{C_2(\varepsilon, \mathcal{B})} \right\} \\ \ge \tfrac{1}{2}\sqrt{C_2(\varepsilon, \mathcal{B})} \log C_2(\varepsilon, \mathcal{B})$$

et

$$C_2(\varepsilon, \mathcal{B}) \exp\{-s \log s\} \le \exp\{(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{C_2(\varepsilon, \mathcal{B})}) \log C_2(\varepsilon, \mathcal{B})\} \\ \le \frac{1}{C_2(\varepsilon, \mathcal{B})} < \frac{B\varepsilon^2}{8}\,.$$

D'où on déduit l'inégalité

$$A \gg_{\theta, \mathcal{B}} x^\theta$$

pour $x \ge x_0(\theta, \mathcal{B})$, ce qui complète la démonstration de notre théorème.

## Bibliographie


[1] G. Bantle and F. Grupp, *On a problem of Erdős and Szemerédi*, J. Number Theory 22 (1986), 280–288.

[2] E. Bombieri, J. B. Friedlander and H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progressions to large moduli*, Acta Math. 156 (1986), 203–251.

[3] E. Bombieri and H. Iwaniec, *On the order of* $\zeta(\frac{1}{2} + it)$, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1986), 449–472.

[4] N. G. de Bruijn, *On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes*, Indag. Math. 12 (1949–1950), 247–256.

[5] P. Erdős, *On the difference of consecutive terms of sequences defined by divisibility properties*, Acta Arith. 12 (1966), 175–182.

[6] M. Filaseta and O. Trifonov, *On gaps between squarefree numbers II*, J. London Math. Soc. (2) 45 (1992), 215–221.

[7] E. Fouvry and H. Iwaniec, *Exponential sums for monomials*, J. Number Theory 33 (1989), 311–333.

[8] J. B. Friedlander, *Integers free from large and small primes*, Proc. London Math. Soc. (3) 33 (1976), 565–576.

[9] S. W. Graham and G. Kolesnik, *Van der Corput's Method of Exponential Sums*, Cambridge University Press, 1991.

[10] D. R. Heath-Brown, *The Pjateckiĭ–Šapiro prime number theorem*, J. Number Theory 16 (1983), 242–266.

[11] E. Szemerédi, *On the difference of consecutive terms of sequences defined by divisibility properties II*, Acta Arith. 23 (1973), 359–361.

[12] J. Wu, *Sur trois questions classiques de crible : nombres premiers jumeaux, nombres $P_2$ et nombres $\mathcal{B}$-libres*, Thèse de Doctorat, Université d'Orsay, 1990.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
UNITÉ ASSOCIÉE AU CNRS, URA 750
UNIVERSITÉ DE NANCY I
54506 VANDŒUVRE–LÈS–NANCY
FRANCE
E-mail : WUJIE@IECN.U-NANCY.FR

*Reçu le 16.10.1992*
*et révisé le 23.3.1993* (2318)