ACTA ARITHMETICA
LXIV.1 (1993)

# Une nouvelle minoration de $|\log\alpha - \beta|$, $|\alpha - \exp\beta|$, $\alpha$ et $\beta$ algébriques

par

Guy Diaz (Saint-Etienne)

## I. Introduction, résultats

**I.1.** *Introduction.* De la naissance de la théorie des nombres transcendants jusqu'en 1978 de nombreux auteurs ont étudié les mesures de transcendance des nombres associés à la fonction exponentielle (ainsi qu'aux fonctions elliptiques). Classiquement, chaque mesure faisait l'objet d'une démonstration autonome. En 1978, M. Waldschmidt montre que ces résultats dispersés peuvent se voir comme corollaires d'une minoration de formes linéaires de nombres algébriques (théorème de Baker effectif). Précisément, il suffit de savoir minorer $|\beta - \log\alpha|$ et $|\beta_1 \log\alpha_1 - \log\alpha_2|$ où $\alpha$, $\beta$, $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\beta_1$ sont des nombres algébriques, pour avoir les résultats classiques (voir [W2], théorèmes A, B, et [W1]).

On s'intéresse ici à la minoration de $|\beta - \log\alpha|$, qui relève de la méthode de Gel'fond–Schneider "standard" (alors que celle de $|\beta_1 \log\alpha_1 - \log\alpha_2|$ utilise la méthode de Baker, ou l'une des méthodes alternatives introduites par M. Waldschmidt dans [W2], [W4]).

Précisons quelques notations. Pour un polynôme $P$ à coefficients complexes, $H(P)$ et $L(P)$ sont respectivement le plus grand et la somme des modules des coefficients de $P$ (hauteur et longueur). Pour un nombre algébrique $\alpha$, $d(\alpha)$ est le degré, $M(\alpha)$ est la mesure de Mahler, $h(\alpha)$ la hauteur logarithmique absolue ($h(\alpha) = d(\alpha)^{-1}\log M(\alpha)$; voir [W2] pour les propriétés).

Soit $\varphi(x, y)$ une fonction à valeurs réelles positives, définie pour $x \geq 1$, $y \geq \log 16$ (hypothèse de commodité). On dit que $\varphi$ *est une mesure de transcendance du nombre complexe* $w$ si on a $\log|P(w)| \geq -\varphi(D, \log H)$ pour tout polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ de degré au plus $D$, de hauteur au plus $H$. On dit que $\varphi$ *est une mesure d'approximation de* $w$ si on a $\log|\omega - \xi| \geq -\varphi(D, \log M)$ pour tout nombre algébrique $\xi$ de degré au plus $D$, de mesure de Mahler au plus $M$. On sait passer d'une mesure à l'autre (voir par exemple [W2, lemme 2.3]).

On va donner une nouvelle minoration de $|e^{\beta}-\alpha|$, puis en corollaire de $|\beta-\log\alpha|$, complétement explicite en $\alpha$, $\beta$. De ce résultat on déduira une mesure d'approximation et une mesure de transcedance de $\exp\beta$. La seconde contiendra comme cas particulier le résultat suivant de K. Mahler (voir [M1]) :

$$|P(e^{\beta})|\geq\exp(-c(\beta)D\log H)\qquad\text{pour } H\geq H_0(D)\,,$$

ce qui n'était pas le cas des mesures antérieures (voir [W2], p. 455).

**I.2.** *La forme linéaire $\beta-\log\alpha$.* La méthode de Gel'fond–Schneider permet de travailler aussi bien sur $\beta-\log\alpha$ que sur $\exp\beta-\alpha$, suivant la fonction auxiliaire que l'on utilise. L'habitude, depuis les travaux d'A. Baker au moins, consiste à faire apparaître $\beta-\log\alpha$. Comme ici la principale application est une mesure de $\exp\beta$, on va exprimer le résultat principal avec $\exp\beta-\alpha$. Il s'énonce ainsi.

Théorème. *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres algébriques, $\beta$ supposé non nul. Soient $D_0$ un entier et $E$, $V$ des réels satisfaisant*

$$D_0\geq[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]\,,$$
$$V\geq\max\{h(\alpha);1/D_0;e|\beta|/D_0\}\,,$$
$$e\leq E\leq\min\{\exp(D_0V);D_0V/|\beta|\}\,.$$

*On note $V^{+}:=\max(1,V)$ et on définit $U_1$, $U_2$ par*

$$U_1:=D_0^2V(1+D_0(\log D_0)(\log E)^{-1})(h(\beta)+\log ED_0V^{+})(\log E)^{-1}\,,$$
$$U_2:=D_0\log M(\beta)\,.$$

*Alors*

$$|\exp\beta-\alpha|\geq\exp(-10^{11}\max(U_1,U_2))\,.$$

On a supposé $\beta$ non nul, car la minoration de $|1-\alpha|$ ne relève pas des méthodes transcendantes (théorème de Liouville). Le théorème sera démontré au §III. On va commencer par en déduire les corollaires, en particulier une minoration de $|\beta-\log\alpha|$.

Corollaire 1. *Soient $\alpha$ et $\beta$ deux nombres algébriques non nuls et $\log\alpha$ une détermination quelconque du logarithme de $\alpha$. Soient $D_0$ un entier et $V$, $E$ des réels satisfaisant*

$$D_0\geq[\mathbb{Q}(\alpha,\beta):\mathbb{Q}]\,,$$
$$V\geq\max\{h(\alpha);1/D_0;e|\beta|/D_0\}\,,$$
$$e\leq E\leq\min\{\exp(D_0V);D_0V/|\beta|\}\,.$$

*On note $V^{+}:=\max(1,V)$ et on définit $U_1$, $U_2$ par*

$$U_1:=D_0^2V(1+D_0(\log D_0)(\log E)^{-1})(h(\beta)+\log ED_0V^{+})(\log E)^{-1}\,,$$
$$U_2:=D_0\log M(\beta)\,.$$

*Alors*

$$|\beta-\log\alpha|\ge\exp(-2\cdot 10^{11}\cdot\max(U_1,U_2))\,.$$

Ce résultat améliore le théorème A de [W2] en remplaçant le facteur $D_0(\log D_0E)/\log E$ qui y apparaissait par le facteur $(1+D_0(\log D_0)\times(\log E)^{-1})$. L'amélioration n'est évidemment pas spectaculaire, mais c'est le contraire qui aurait été surprenant; pour faire beaucoup mieux il faudra probablement renouveler les méthodes en profondeur.

Pour obtenir le corollaire 1 on note que pour $z\in\mathbb{C}$ on a par le théorème des accroissements finis : $|\exp z-1|\le|z|\exp|z|$. Si $|\beta-\log\alpha|$ est plus grand que 1/2 le corollaire est démontré. On suppose donc maintenant $|\beta-\log\alpha|$ plus petit que 1/2 et on applique le résultat ci-dessus à $z:=\log\alpha-\beta$; cela donne

$$|\alpha-\exp\beta|\le\exp(|\beta|+0{,}5)\,|\beta-\log\alpha|\,.$$

On applique le théorème pour minorer $|\alpha-\exp\beta|$; en notant que $e|\beta|\le D_0V\le\max(U_1,U_2)$ on a donc

$$\begin{aligned}\exp(-10^{11}\max(U_1,U_2))&\le\exp(|\beta|+0{,}5)|\beta-\log\alpha|\\&\le\exp((0{,}5+e^{-1})\max(U_1,U_2))|\beta-\log\alpha|\,.\end{aligned}$$

D'où l'on tire la minoration de $|\beta-\log\alpha|$ annoncée.

**I.3.** *Mesures d'approximation, de transcendance pour* $\exp\beta$. Le théorème de Hermite–Lindemann sur la transcendance de $\exp\beta$, où $\beta$ est algébrique non nul, date de 1892. Dès 1899 Borel donnait une mesure de transcendance de $e$. Depuis les travaux ont été nombreux (pour ceux qui sont antérieurs à 1967, voir le survey [FS], p. 25). Au départ c'est la méthode d'Hermite, complétée des apports de Siegel, Mahler, qui est exclusivement utilisée (voir l'appendice de [M2] ou [S]). Puis apparaît la méthode de Gel'fond–Schneider, avec un résultat de Feldman pour $e$ dans [F]; on peut citer ensuite le travail de Cijsouw [Ci], celui de Chudnovsky (annoncé en 1974, voir [Ch], p. 41), et celui de M. Waldschmidt [W2, corollaire 3.9]. Les mesures de $\exp\beta$ données par ces trois auteurs ne contiennent pas le résultat de Mahler de 1932, rappelé plus haut.

A ce propos on peut citer un résultat de Galochkin qui précise le résultat de Mahler (voir [G] et Mathematical Reviews 45, 1973, #8608).

Théorème (Galochkin). *Soit* $\beta$ *un nombre algébrique non nul. Il existe un réel positif* $c(\beta)$ *tel que pour tout polynôme* $P\in\mathbb{Z}[X]$ *non nul, de degré* $D$, *de hauteur plus petite que* $H$, *où* $D$ *et* $H$ *vérifient* $\log\log H\ge(7/4)Dd(\beta)$, *on a*

$$|P(e^{\beta})|\ge\exp(-c(\beta)D\log H)\,.$$

Dans le cas $\beta \in \mathbb{Q}$, il existe un résultat de ce type dû à A. Durand (voir [Du, théorème]), et pour $\beta = 1$ on trouve une démonstration assez élémentaire de K. Ramachandra dans [R]. Il est à noter que l'approche de Galochkin est du type Hermite–Siegel–Mahler, et fournit d'excellentes constantes au moins pour $\beta$ rationnel ($c(\beta)$ est alors de l'ordre de 1). De telles constantes sont actuellement hors de portée de la méthode de Gel'fond–Schneider, mais par contre cette méthode fournit pour tout $\beta$ de bonnes mesures en $(D, \log H)$ sans avoir à supposer $H$ grand devant $D$ (ce que ne permet pas la première!). En voici une illustration.

Corollaire 2 (Mesure d'approximation de $\exp\beta$). *Soit $\beta$ un nombre algébrique non nul. Il existe un réel positif $c_1(\beta)$ tel que l'expression suivante soit une mesure d'approximation de* $\exp\beta$ :

$$c_1(\beta)D(\log M)\frac{\log(D\log M)}{\log\log M}\left(1+\frac{D\log D}{\log\log M}\right).$$

Cela améliore légèrement la mesure [W2, théorème 3.8], le facteur $(1 + D\log D/\log\log M)$ remplaçant $D(1+\log D/\log\log M)$. Comment déduit-on ce corollaire 2 du théorème? On se donne donc un nombre algébrique $\alpha$ de degré $d(\alpha)$, de mesure de Mahler $M(\alpha) \le M$ avec $M \ge 16$ (de façon à avoir $\log\log M \ge 1$, $\log M \ge e$). On pose

$$D_0 = d(\alpha)d(\beta), \qquad V = (\log M)(1+e|\beta|)d(\alpha)^{-1}, \qquad E = \log M.$$

On vérifie sans peine que $V$ est plus grand que $\max\{h(\alpha);\ 1/D_0;\ e|\beta|/D_0\}$, et que $E$ est plus petit que $\min\{\exp(D_0V);\ D_0V/|\beta|\}$. On majore $V^+$ par $(\log M)(1+e|\beta|)$ et on applique le théorème; on a alors

(a) $U_1 \le c(\beta)U$ où

$$U := d(\alpha)\log M\cdot\left(1+\frac{d(\alpha)\log d(\alpha)}{\log\log M}\right)\left(\frac{\log(d(\alpha)\log M)}{\log\log M}\right),$$

$$c(\beta) := 2d(\beta)^3(1+e|\beta|)(1+\log d(\beta)) \times (h(\beta)+\log d(\beta)+\log(1+e|\beta|)+1)\,;$$

(b) $U_2 = d(\alpha)d(\beta)\log M(\beta)$.

On voit que $U_2$ est inférieur ou égal à $U$ et donc le théorème donne

$$|e^\beta - \alpha| \ge \exp(-10^{11}c(\beta)U)\,.$$

C'est exactement le corollaire 2 (en posant $c_1(\beta) := 10^{11}c(\beta)$). Il est à noter que la constante $c(\beta)$ n'est probablement pas ce que l'on peut faire de mieux.

Le passage d'une mesure d'approximation à une mesure de transcendance est automatique (voir [W2, lemme 2.3] par exemple). Le corollaire 2 permet d'obtenir le corollaire 3, suivant :

COROLLAIRE 3 (Mesure de transcendance de $\exp\beta$). *Soit* $\beta$ *un nombre algébrique non nul. Il existe un réel positif* $c_2(\beta)$ *tel que l'expression suivante soit une mesure de transcendance de* $\exp\beta$ :

$$c_2(\beta)D(\log DH)\frac{\log(D\log H)}{\log\log DH}\left(1+\frac{D\log D}{\log\log DH}\right)$$

(*on peut prendre* $c_2(\beta) = 2c_1(\beta)$).

Cela améliore (légèrement) la mesure de [W2, théorème 3.9] et les résultats antérieurs de [Ch, p. 46], [Ci]. Et enfin cela redonne le théorème de Mahler.

COROLLAIRE 4. *Soit* $\beta$ *un nombre algébrique non nul. Il existe un réel positif* $c_3(\beta)$ *tel que pour tout polynôme* $P \in \mathbb{Z}[X]$ *non nul, de degré* $D$, *de hauteur inférieure ou égale à* $H$ *avec* $H \geq 16$ *et* $\log\log H \geq D\log D$ *on ait*

$$|P(e^\beta)| \geq \exp(-c_3(\beta)D\log H)$$

(*on peut prendre* $c_3(\beta) = 16c_1(\beta)$).

**I.4.** *Note finale.* Dans le corollaire 4 on suppose $\log\log H \geq D\log D$, alors que dans son résultat Galochkin suppose seulement $\log\log H \gg D$. La question se pose donc de savoir s'il est possible d'améliorer le corollaire 3 ou le théorème pour obtenir ce raffinement. La réponse est oui et le lecteur intéressé trouvera la démonstration dans le texte : *Une nouvelle minoration de* $|\log\alpha - \beta|$; *Compléments*, paru dans le Séminaire d'Arithmétique de Saint-Etienne 1990–1992.

Il semble par ailleurs possible (probablement au prix d'un assez gros travail) de raffiner le théorème pour qu'il contienne les résultats de [Di] sur les mesures d'approximation de $\pi$. Cela reste à faire.

## II. Préliminaires

**II.1.** *Polynômes de Feldman.* Les polynômes de Feldman sont les polynômes $\Delta(z;k)$ définis par $\Delta(z;0) = 1$, $\Delta(z;k) = (z+1)\ldots(z+k)/k!$ pour $k$ entier $> 0$. Pour $l$ et $t$ entiers positifs on note

$$\Delta(z;k,l,t) = \frac{1}{t!}\left(\frac{d}{dz}\right)^t (\Delta(z;k))^l\,.$$

Les propriétés utiles sont rassemblées dans le lemme 1 (voir [W4], lemme 2.2 ou [W1], lemme 2.4).

LEMME 1. *Soient* $l$, $t$, $k$ *des entiers positifs* (*avec* $k \geq 1$), *et* $z$ *un nombre complexe*; *on note* $\nu(k)$ *le p.p.c.m. de* $1, 2, \ldots, k$. *On a*

(1) $|\Delta(z;k,l,t)| \leq (1+|z|/k)^{kl}(2e)^{kl}$;
(2) $\log\nu(k) < 1{,}04k$;

(3) *pour tout* $a \in \mathbb{Z}$, $\nu(k)^t \Delta(a; k, l, t)$ *est entier*;

(4) *si* $k$, $R$, $L$ *sont des entiers strictement positifs avec* $k \geq R$, *la famille de polynômes* $\{\Delta(z + r; k)^l : 0 \leq r < R,\ 1 \leq l \leq L\}$ *est libre.*

Le recours à ces polynômes de Feldman est actuellement indispensable pour obtenir de bonnes minorations de formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques (voir [W1], [W4] par exemple).

**II.2.** *Fonction auxiliaire, polynômes auxiliaires.* On se donne deux nombres algébriques $\alpha$, $\beta$ et on note $D$ le degré du corps de nombres $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$. On fixe une base $\{\xi_1, \ldots, \xi_D\}$ du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ constituée d'éléments de la forme $\alpha^h \beta^k$ avec $0 \leq h < d(\alpha)$, $0 \leq k < d(\beta)$, $h + k < D$ ($d(\alpha), d(\beta)$ étant les degrés de $\alpha$ et $\beta$); on notera alors $(h_i, k_i)$ le couple $(h, k)$ relatif à $\xi_i$, $i = 1, \ldots, D$ (donc $\xi_i = \alpha^{h_i} \beta^{k_i}$).

On suppose donnés les entiers strictement positifs $L_{-1}$, $L_0$, $L_1$. Dans la suite $\lambda = (\lambda_{-1}, \lambda_0, \lambda_1)$ est toujours un triplet d'entiers vérifiant $0 \leq \lambda_{-1} < L_{-1}$, $0 \leq \lambda_0 < L_0$, $0 \leq \lambda_1 < L_1$; on note $\mathcal{L}$ l'ensemble de ces triplets. A une famille $\{p_\lambda : \lambda \in \mathcal{L}\}$ de nombres complexes on associe la fonction $F$

$$F(z) := \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} p_\lambda \Delta(z + \lambda_{-1}; L_{-1})^{1+\lambda_0} \exp(\lambda_1 \beta z)\,.$$

On a donc pour tout entier $t \geq 0$

$$F^{(t)}(z) := \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \sum_{\tau} p_\lambda \frac{t!}{(t-\tau)!} \Delta(z + \lambda_{-1}; L_{-1}, 1 + \lambda_0, \tau)(\lambda_1 \beta)^{t-\tau} \exp(\lambda_1 \beta z)\,,$$

où la seconde somme porte sur tous les $\tau$ variant de 0 à $\min(t; (1+\lambda_0)L_{-1})$. Et donc pour tout entier $s \geq 0$

$$\nu(L_{-1})^t F^{(t)}(s) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \sum_{\tau} p_\lambda \frac{t!}{(t-\tau)!} \nu(L_{-1})^t \Delta(s + \lambda_{-1}; L_{-1}, 1 + \lambda_0, \tau)(\lambda_1 \beta)^{t-\tau} (e^\beta)^{\lambda_1 s}\,.$$

On voit apparaître, en plus des coefficients $p_\lambda$, une expression polynômiale en $(\beta, e^\beta)$, à coefficients entiers (voir le (3) du lemme 1). Plus précisément, on introduit pour tout $(\lambda, t, s) \in \mathcal{L} \times \mathbb{N}^2$ le polynôme $R_{\lambda ts}(X_1, X_2) \in \mathbb{Z}[X_1, X_2]$,

$$R_{\lambda ts}(X_1, X_2) := \sum_{\tau} \frac{t!}{(t-\tau)!} \nu(L_{-1})^t \Delta(s + \lambda_{-1}; L_{-1}, 1 + \lambda_0, \tau)(\lambda_1 X_1)^{t-\tau} X_2^{\lambda_1 s}\,.$$

La relation précédente s'écrit

$$\nu(L_{-1})^t F^{(t)}(s) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} p_\lambda R_{\lambda ts}(\beta, e^\beta)\,.$$

Supposons maintenant chaque $p_\lambda$ de la forme $P_\lambda(\alpha,\beta)$ avec $P_\lambda(X_0,X_1) \in \mathbb{Z}[X_0,X_1]$; la relation ci-dessus devient, pour tout $(t,s) \in \mathbb{N}^2$

$$\nu(L_{-1})^t F^{(t)}(s) = Q_{ts}(\alpha,\beta,e^\beta) \tag{1}$$

où $Q_{ts}(X_0,X_1,X_2) \in \mathbb{Z}[X_0,X_1,X_2]$ est défini par

$$Q_{ts}(X_0,X_1,X_2) := \sum_{\lambda\in\mathcal{L}} P_\lambda(X_0,X_1) R_{\lambda ts}(X_1,X_2)\,.$$

La relation (1) sera dite *relation fondamentale*, et les polynômes $Q_{ts}$ seront appelés polynômes auxiliaires attachés à la fonction auxiliaire $F$. Au cours de la démonstration vont intervenir les nombres algébriques $Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)$, et il faudra pouvoir dire que l'un d'entre eux est non nul; donc il faut impérativement que les coefficients $P_\lambda(\alpha,\beta)$ soient non tous nuls (cela n'a pas de raison d'être suffisant évidemment). C'est pour cela que l'on prendra des polynômes $P_\lambda$ combinaisons linéaires des monômes $\{X_0^{h_i}X_1^{k_i} : i = 1,\ldots,D\}$ précédemment définis; en notant $P_\lambda = \sum_{i=1}^D p_{\lambda i} X_0^{h_i} X_1^{k_i}$, on aura

$$P_\lambda(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{D} p_{\lambda i}\alpha^{h_i}\beta^{k_i} = \sum_{i=1}^{D} p_{\lambda i}\xi_i\,.$$

Il suffira alors de savoir que les $p_{\lambda i}$ ($\lambda \in \mathcal{L}$, $1 \le i \le D$) ne sont pas tous nuls pour conclure que les $P_\lambda(\alpha,\beta)$, $\lambda\in\mathcal{L}$, ne sont pas tous nuls!

Cette façon de faire est maintenant classique (voir entre autres [W1], [W4]), mais elle n'est pas absolument neutre au niveau des estimations comme on le verra au moment de l'application du théorème de Liouville dans le §III. La contribution à ces estimations dûe aux polynômes $R_{\lambda ts}$ est imposée par la fonction auxiliaire utilisée; ce que l'on souhaite c'est que celle des polynômes $P_\lambda$ (qui ont un côté arbitraire, eux) soit au plus du même ordre, et ce n'est pas exactement le cas dans la situation présente.

**III. Démonstration du théorème.** La démonstration qui suit est du type Gel'fond–Schneider, avec deux différences par rapport à celle de [Ci] vue comme "classique". D'une part dans la construction nous utiliserons un résultat tout fait de M. Waldschmidt; d'autre part nous mettrons en oeuvre le lemme de zéros général de P. Philippon et non pas un lemme de petites valeurs.

Les données et les hypothèses sont celles du théorème; on utilise les notations du §II, et en particulier $D$ est le degré du corps $\mathbb{Q}(\alpha,\beta)$, $D_0$ un entier plus grand que $D$. Rappelons que $\beta$ est non nul; cette hypothèse intervient uniquement dans le §III.2 (lemme de zéros). On suppose que $|\exp\beta - \alpha|$ est inférieur à 1, puisque sinon le résultat annoncé est trivial (cette hypothèse ne sert que dans la vérification des contraintes, §III.4, qui ne sera pas détaillée).

Les paramètres sont les entiers $L_{-1}$, $L_0$, $L_1$, $T$, $S$ (tous supérieurs ou égaux à 1) et les réels positifs $\Delta$, $R$, $U$. La démonstration va se dérouler sous un certain nombre de conditions $(\mathcal{C}1)$, $(\mathcal{C}2)$, ... portant sur ces paramètres.

**III.1.** *La construction.* A une famille $\{p_{\lambda i} : \lambda \in \mathcal{L}, 1 \le i \le D\}$ d'entiers on associe la famille de polynômes

$$\{P_\lambda(X_0, X_1) : \lambda \in \mathcal{L}\} \qquad \text{où } P_\lambda := \sum_{i=1}^{D} p_{\lambda i} X_0^{h_i} X_1^{k_i} .$$

A chaque $(\lambda, i)$ on associe la fonction

$$\varphi_{\lambda i}(z) := \xi_i \Delta(z + \lambda_{-1}; L_{-1})^{1+\lambda_0} \exp(\lambda_1 \beta z) .$$

On a alors avec les notations du paragraphe II

$$F(z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} P_\lambda(\alpha, \beta) \Delta(z + \lambda_{-1}; L_{-1})^{1+\lambda_0} \exp(\lambda_1 \beta z) = \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} \sum_{i=1}^{D} p_{\lambda i} \varphi_{\lambda i}(z) .$$

Pour utiliser le théorème d'existence de M. Waldschmidt [W3, th. 3.1] il faut majorer

$$\sum_{\lambda, i} |\varphi_{\lambda i}|_R, \qquad \text{où } |\varphi_{\lambda i}|_R := \sup\{|\varphi_{\lambda i}(z)| : |z| = R\} .$$

A l'aide du lemme 1 on obtient

$$\sum_{\lambda, i} |\varphi_{\lambda i}|_R \le$$
$$\exp\Big(\log \sum_i |\xi_i| + \log(L_{-1} L_0 L_1) + L_{-1} L_0 \log 2e(2 + R/L_{-1}) + |\beta| L_1 R\Big) .$$

Le théorème précité affirme alors que sous les contraintes

$(\mathcal{C}1)$ $\quad 3 \le U, \quad \Delta \le U, \quad e \le R/S \le \exp U ,$

$(\mathcal{C}2)$ $\quad \log\Big(\sum_i |\xi_i|\Big) + \log(L_{-1} L_0 L_1)$
$$+ L_{-1} L_0 \log 2e(2 + R/L_{-1}) + |\beta| L_1 R \le U ,$$

$(\mathcal{C}3)$ $\quad 36U^2 \le D \Delta L_{-1} L_0 L_1 \log R/S ,$

il existe une famille $\{p_{\lambda i} : \lambda \in \mathcal{L}, 1 \le i \le D\}$ d'entiers non tous nuls pour laquelle on ait

$$\max\{|p_{\lambda i}| : \lambda \in \mathcal{L}, 1 \le i \le D\} \le \exp \Delta , \tag{2}$$

$$|F|_S \le \exp(-U) . \tag{3}$$

A noter que l'application directe de [W3, th. 3.1] donne 64 au lieu de 36 dans $(\mathcal{C}3)$; mais dans le cas d'une seule variable comme ici, la constante 64 est améliorable en ce 36.

Dans toute la suite du paragraphe on fixe $(t,s) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \le t < T$, $0 \le s < S$. Par les formules de Cauchy on a $|F^{(t)}(s)| \le t!|F|_S$; en tenant compte de la relation fondamentale (1), du lemme 1 et de (3) cela donne

$$|Q_{ts}(\alpha,\beta,e^\beta)| \le \exp(-U + T\log T + 1{,}04TL_{-1})\,.$$

Sous la contrainte

$$(\mathcal{C}4) \qquad T\log T + 1{,}04TL_{-1} \le U/10\,,$$

on a alors

$$(4) \qquad |Q_{ts}(\alpha,\beta,e^\beta)| \le \exp(-9U/10)\,.$$

Nous aurons besoin plus tard d'estimations des longueurs $L(R_{\lambda ts})$, $L(Q_{ts})$. La définition de $R_{\lambda ts}$ donne immédiatement

$$L(R_{\lambda ts}) \le \sum_\tau \frac{t!}{(t-\tau)!}|\nu(L_{-1})^t \Delta(s+\lambda_{-1}; L_{-1}, 1+\lambda_0, \tau)|\lambda_1^{t-\tau}$$

où $\tau$ varie de 0 à $\min(t;(1+\lambda_0)L_{-1})$. Grâce au lemme 1 cela s'écrit

$$(5) \qquad L(R_{\lambda ts}) \le \exp(\min(T; L_{-1}L_0)\log eT \\ +2L_{-1}T + L_{-1}L_0\log 2e(2+S/L_{-1}) + T\log L_1)\,.$$

De $Q_{ts} = \sum_{\lambda\in\mathcal{L}} P_\lambda R_{\lambda ts}$ on tire $L(Q_{ts}) \le \sum_{\lambda\in\mathcal{L}} L(P_\lambda)L(R_{\lambda ts})$; par (2) on sait que $L(P_\lambda)$ est majorée par $D\exp\Delta$ et au total

$$(6) \qquad L(Q_{ts}) \le \exp(\log(DL_{-1}L_0L_1) + \Delta + \min(T; L_{-1}L_0)\log eT \\ + 2L_{-1}T + L_{-1}L_0\log 2e(2+S/L_{-1}) + T\log L_1)\,.$$

*Conséquence : majoration de* $|Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)|$. De l'écriture

$$Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha) = \sum P_\lambda(\alpha,\beta)R_{\lambda ts}(\beta,e^\beta) \\ + \sum P_\lambda(\alpha,\beta)(R_{\lambda ts}(\beta,\alpha) - R_{\lambda ts}(\beta,e^\beta))$$

et de la relation (4) on tire

$$|Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)| \le \exp(-9U/10) + \sum |P_\lambda(\alpha,\beta)|\,|R_{\lambda ts}(\beta,\alpha) - R_{\lambda ts}(\beta,e^\beta)|\,.$$

Grâce à (2) on a

$$|P_\lambda(\alpha,\beta)| \le \sum |\xi_i|\exp\Delta\,.$$

En revenant à la définition de $R_{\lambda ts}$,

$$|R_{\lambda ts}(\beta,\alpha) - R_{\lambda ts}(\beta,e^\beta)| \\ \le \sum_\tau \frac{t!}{(t-\tau)!}|\nu(L_{-1})^t\Delta(s+\lambda_{-1}; L_{-1}, 1+\lambda_0, \tau)(\lambda_1\beta)^{t-\tau}||\alpha^{\lambda_1 s} - (e^\beta)^{\lambda_1 s}|\,.$$

La première partie du terme de droite se majore comme $L(R_{\lambda ts})$, avec le facteur supplémentaire $\exp(T \log \max(1; |\beta|))$; la seconde partie se majore par

$$|\alpha - e^{\beta}| L_1 S \exp(L_1 S \log \max(1, |\alpha|, |e^{\beta}|)) .$$

Au total cela donne

$$|Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)| \le \exp(-9U/10) + |\alpha - e^{\beta}| \exp B \tag{7}$$

où

$$\begin{aligned} B = {} & \min(T; L_{-1}L_0) \log eT + 2L_{-1}T + L_{-1}L_0 \log 2e(2 + S/L_{-1}) \\ & + T \log L_1 \max(1, |\beta|) + \log L_1 S + L_1 S \log \max(1, |\alpha|, |e^{\beta}|) . \end{aligned}$$

Cette majoration du module du nombre algébrique $Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)$ termine le premier pas. Dans le second pas on va montrer que ces nombres algébriques ne sont pas tous nuls (sous des contraintes *ad hoc*), et dans le troisième pas on minorera le module de ceux qui ne sont pas nuls.

**III.2.** *Le lemme de zéros.* On va démontrer grâce au résultat général de P. Philippon [P] le résultat suivant :

Lemme 2. *Dès que les paramètres vérifient les contraintes*

($\mathcal{C}5$) $T \ge 3, \quad S \ge 20,$

($\mathcal{C}6$) $9TS \ge 80 L_{-1}L_0L_1,$

($\mathcal{C}7$) $T > 4L_1,$

*un des nombres* $Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)$, $0 \le s < S$ *et* $0 \le t < T$, *est non nul.*

Dans la suite du paragraphe on suppose $Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)$ nul pour tous les $(t,s) \in \mathbb{N}^2$ avec $0 \le s < S$, $0 \le t < T$ et ($\mathcal{C}5$) vérifiée. On va alors montrer que l'une des inégalités ($\mathcal{C}6$), ($\mathcal{C}7$) n'est pas vérifiée. Introduisons les acteurs géométriques :

$(G,+)$ désigne le groupe algébrique $\mathbf{G}_{\mathrm{a}} \times \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ (donc $G(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$);

$\varphi(z) = (z, \exp(\beta z)) = \exp_G \circ \mathcal{L}(z)$ où $\mathcal{L}(z) = (z, \beta z)$;

$W := \mathrm{Im}(\mathcal{L})$;

pour $s \in \mathbb{N}$, $g_s := (s, \alpha^s)$ et donc $g_s$ est dans $G(\mathbb{C})$;

$\Sigma := \{g_s : 0 \le s < [S/2]\}$.

En notant $\Sigma(2)$ l'ensemble des sommes de deux éléments de $\Sigma$ on a $\Sigma(2) \subset \{g_s : 0 \le s < S\}$. A tout entier $s$ on associe la fonction $\phi_s(z) := P(g_s + \varphi(z))$ où $P$ est le polynôme

$$P(Y_1, Y_2) := \sum_{\lambda \in \mathcal{L}} P_\lambda(\alpha,\beta) \Delta(Y_1 + \lambda_{-1}; L_{-1})^{1+\lambda_0} Y_2^{\lambda_1} .$$

Ce polynôme est non nul car les coefficients $P_\lambda(\alpha,\beta)$ ne sont pas tous nuls et les polynômes $\Delta(Y_1+\lambda_{-1};L_{-1})^{1+\lambda_0}$ avec $0\le\lambda_{-1}<L_{-1}$ et $0\le\lambda_0<L_0$ sont indépendants (voir lemme 1). On vérifie immédiatement que pour tout $(t,s)\in\mathbb{N}^2$

$$\nu(L_{-1})^t\phi_s^{(t)}(0)=Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)\,.$$

L'hypothèse initiale permet alors de dire que pour tout entier $s$, $0\le s<S$, la fonction $\phi_s$ a un zéro d'ordre supérieur ou égal à $T$, en 0. Dans le langage de [P], cela signifie que le polynôme $P$ s'annule le long de $\varphi$ à un ordre supérieur ou égal à $T$ en tout point de $\Sigma(2)$. En introduisant l'entier $T'$ vérifiant $2T'+1\le T<2T'+3$ (donc $T'\ge1$ puisque $T\ge3$), le polynôme $P$ s'annule le long de $\varphi$ à un ordre supérieur ou égal à $2T'+1$ en tout point de $\Sigma(2)$. Le théorème de P. Philippon [P, théorème 2.1] dit alors qu'il existe un sous-groupe algébrique connexe $H$ de $G$ (donc de la forme $H=H_0\times H_1$ avec $H_0=\{0\}$ ou $\mathbf{G}_{\mathrm{a}}$, $H_1=\{1\}$ ou $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$), distinct de $G$ et tel que

$$\binom{T'+C(H)}{C(H)}\operatorname{card}(\Sigma+H/H)\le2(L_{-1}L_0)^{r_0}L_1^{r_1}\,, \tag{8}$$

où $C(H)=\operatorname{codim}_w(W\cap T_H(\mathbb{C}))$, $r_0=\dim(\mathbf{G}_{\mathrm{a}}/H_0)$, $r_1=\dim(\mathbf{G}_{\mathrm{m}}/H_1)$.

On distingue les trois cas possibles pour $H$ :

$1^{\text{er}}$ cas: $H=\{(0,1)\}$. Dans ce cas $r_0=r_1=C(H)=1$, $\operatorname{card}(\Sigma+H/H)=\operatorname{card}(\Sigma)=[S/2]$. Puisque $S\ge20$, on minore strictement $[S/2]$ par $9S/20$; (8) donne, en utilisant $T'+1\ge T/2$, l'inégalité $9TS<80L_{-1}L_0L_1$. Donc $(\mathcal{C}6)$ n'est pas vérifiée.

$2^{\text{ème}}$ cas: $H=\{0\}\times\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Alors $T_H(\mathbb{C})=\{0\}\times\mathbb{C}$; comme $W=\mathbb{C}(1,\beta)$, l'intersection $W\cap T_H(\mathbb{C})$ est réduite à 0; on a donc $C(H)=r_0=1$, $r_1=0$. La relation d'équivalence induite sur $\Sigma$ par $H$ est l'égalité et donc $\operatorname{card}(\Sigma+H/H)=\operatorname{card}\Sigma=[S/2]$. L'inégalité (8) donne alors $(T'+1)\operatorname{card}\Sigma\le2L_0$ et a fortiori $9TS<80L_{-1}L_0L_1$. Donc $(\mathcal{C}6)$ n'est pas vérifiée.

$3^{\text{ème}}$ cas: $H=\mathbf{G}_{\mathrm{a}}\times\{1\}$. Alors $T_H(\mathbb{C})=\mathbb{C}\times\{0\}$; comme $W=\mathbb{C}(1,\beta)$ et que $\beta$ est non nul, l'intersection $W\cap T_H(\mathbb{C})$ est réduite à 0; on a donc $C(H)=r_1=1$, $r_0=0$. On minore $\operatorname{card}(\Sigma+H/H)$ par 1 et en utilisant (8) on obtient $T/2\le2L_1$; donc $(\mathcal{C}7)$ n'est pas vérifiée.

Ceci termine la démonstration du lemme 2.

**III.3.** *Application du théorème de Liouville, minoration.* Rappelons le théorème de Liouville [W1, lemme 2.2].

Lemme 3. *Soit* $Q\in\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$ *et* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ *des éléments d'un corps de nombres de degré* $d$. *Si* $Q(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ *est non nul on a*

$$\log|Q(\alpha_1,\dots,\alpha_n)|\ge-d\log L(Q)-d\sum_{j=1}^n h(\alpha_j)\deg_{X_j}(Q)\,.$$

On applique ce résultat à l'un des éléments non nuls de $\{Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha) : 0 \le t < T,\ 0 \le s < S\}$, puisque l'on sait qu'il y en a (§III.2). Les degrés partiels de $Q_{ts}$ sont respectivement majorés par $d(\alpha)$, $d(\beta)+T$, $L_1S$; et donc

$$\log|Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)| \ge -D\log L(Q_{ts}) - D((d(\alpha)+L_1S)h(\alpha)+(d(\beta)+T)h(\beta))\,.$$

En utilisant (6) pour majorer $\log L(Q_{ts})$, cela donne au total

$$\log|Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)| \ge -A$$

où

$$\begin{aligned}A := {} & D(\log(DL_{-1}L_0L_1) + \Delta + \min(T;\ L_{-1}L_0)\log eT + 2L_{-1}T)\\ & + D(L_{-1}L_0\log 2e(2+S/L_{-1}) + T\log L_1)\\ & + D\log M(\alpha)M(\beta) + DL_1Sh(\alpha) + DTh(\beta)\,.\end{aligned}$$

Cette minoration jointe à la majoration (7) donne finalement

$$\exp(-A) \le |Q_{ts}(\alpha,\beta,\alpha)| \le \exp(-9U/10) + |e^\beta - \alpha|\exp B\,.$$

En imposant comme dernière contrainte

$$(\mathcal{C}8) \qquad \log 2 + A \le 9U/10\,,$$

on en déduit

$$(9) \qquad \exp(-9U/10 - B) \le |e^\beta - \alpha|\,.$$

On sait donc minorer $|e^\beta - \alpha|$, en fonction des paramètres pour l'instant!

Remarque. La forme précise adoptée au départ pour les coefficients $P_\lambda(\alpha,\beta)$ de la fonction auxiliaire est intervenue au moment de l'application du théorème de Liouville; c'est elle qui introduit les quantités $d(\alpha)$, $d(\beta)$ dans les degrés partiels! Au total, avec la contribution des $R_{\lambda ts}$, on a un terme en $(d(\alpha)+L_1S)h(\alpha)+(d(\beta)+T)h(\beta)$; ainsi si le choix des paramètres $L_1$, $S$, $T$ conduit à $d(\alpha) \ll L_1S$ et $d(\beta) \ll T$, l'intrusion de $d(\alpha)$, $d(\beta)$ ne sera pas gênante. Dans le cas contraire, il faudra tenir compte de cette contribution et alors le choix fait pour les coefficients $P_\lambda(\alpha,\beta)$ ne sera pas neutre dans le résultat final! Malheureusement, le choix que l'on va faire, au paragraphe suivant, pour les paramètres ne permet pas de comparer $d(\beta)$ et $T$ en toute généralité; il reste donc l'espoir d'un raffinement possible à ce niveau dans certains cas.

**III.4.** *Conclusion.* Rappelons les 8 contraintes sous lesquelles on a établi (9) :

$$(\mathcal{C}1) \qquad 3 \le U, \quad \Delta \le U, \quad e \le R/S \le \exp U\,,$$

$$(\mathcal{C}2) \qquad \log\Big(\sum|\xi_i|\Big) + \log L_{-1}L_0L_1 + L_{-1}L_0\log 2e(2+R/L_{-1}) + |\beta|L_1R \le U,$$

$(\mathcal{C}3)$ $\quad 36U^2 \le D\varDelta L_{-1}L_0L_1 \log R/S\,,$

$(\mathcal{C}4)$ $\quad T\log T + 1{,}04TL_{-1} \le U/10\,,$

$(\mathcal{C}5)$ $\quad T \ge 3, \quad S \ge 20\,,$

$(\mathcal{C}6)$ $\quad 9TS \ge 80L_{-1}L_0L_1\,,$

$(\mathcal{C}7)$ $\quad T > 4L_1\,,$

$(\mathcal{C}8)$
$$\begin{aligned}&\log 2 + D(\log(DL_{-1}L_0L_1) + \varDelta + \min(T; L_{-1}L_0)\log eT\\ &\qquad + 2L_{-1}T + T\log L_1) + DL_{-1}L_0 \log 2e(2 + S/L_{-1})\\ &\qquad + D\log M(\alpha)M(\beta) + DL_1Sh(\alpha) + DTh(\beta) \le 9U/10\,.\end{aligned}$$

Il reste à choisir les paramètres $L_{-1}$, $L_0$, $L_1$, $T$, $S$, $R$, $\varDelta$, $U$ de façon à avoir pour la minoration (9) le meilleur résultat possible. On impose d'abord $\varDelta := 9U/25D$, et la contrainte $(\mathcal{C}3)$ devient

$(\mathcal{C}3\text{bis})$ $\quad 100U \le L_{-1}L_0L_1 \log R/S\,.$

On remplace alors dans le système de contraintes $D$ par $D_0$, ce qui a pour effet de les renforcer (par hypothèse $D_0$ est plus grand que $D$); on introduit les quantités auxiliaires $E$ et $V$ du théorème ($E$ sert à exprimer le $\log R/S$ qui apparaît dans $(\mathcal{C}3\text{bis})$ et $V$ à majorer le $h(\alpha)$ qui apparaît dans $(\mathcal{C}8)$). On définit ensuite $U_1$, $U_2$, $\widetilde{U}$ par

$$\begin{aligned}U_1 &:= D_0^2V(D_0\log D_0/\log E + 1)(h(\beta) + \log ED_0V^+)(\log E)^{-1}\,,\\ U_2 &:= D_0\log M(\beta)\,,\\ \widetilde{U} &:= \max(U_1, U_2)\,.\end{aligned}$$

Il existe alors des constantes absolues $x$, $x_{-1}$, $x_0$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ telles que les paramètres suivants soient solution du système de contraintes :

$$\begin{aligned}L_{-1} &:= [x_{-1}(h(\beta) + \log ED_0V^+)(\log E)^{-1}]\,,\\ L_0 &:= [x_0D_0^2V(\log E)^{-1}\widetilde{U}U_1^{-1}]\,,\\ L_1 &:= [x_1(D_0\log D_0/\log E + 1)]\,,\\ S &:= [x_2\widetilde{S}] \quad \text{où} \quad \widetilde{S} := D_0(h(\beta) + \log ED_0V^+)(\log E)^{-1}\,,\\ T &:= [x_3\widetilde{U}(\widetilde{S}\log E)^{-1}]\,,\\ R &:= SE\,,\\ U &:= x\widetilde{U}\,.\end{aligned}$$

On peut prendre $x_{-1} = 10^{1{,}34}$, $x_0 = 10^{7{,}76}$, $x_1 = 10^{3{,}89}$, $x_2 = 10^{5{,}69}$, $x_3 = 10^{8{,}26}$, $x = 10^{10{,}93}$. Ce choix ne prétend pas être optimal, mais avec les contraintes actuelles il n'est pas envisageable de faire beaucoup mieux; pour améliorer sensiblement les constantes il faut sans doute modifier profondément la méthode.

La vérification des contraintes est laissée au lecteur méfiant; il pourra aussi voir que

$$B \leq (22 + 0{,}27x + x_3 + 1{,}37x_1x_2)\widetilde{U}\,,$$

et alors la minoration (9) lui donnera, tous calculs faits,

$$|e^{\beta} - \alpha| \geq \exp(-10^{11}\widetilde{U})\,.$$

C'est le résultat annoncé dans le théorème; ceci termine la démonstration.

Note. A la fin de cette démonstration on peut se demander quelles sont les idées nouvelles qui ont permis d'affiner le résultat de M. Waldschmidt [W2, théorème 4]! Et on constate qu'il n'y a pas d'idées nouvelles (même si certains outils sont légèrement distincts); c'est simplement le choix des paramètres qui est différent. Malheureusement, comme il n'est pas d'usage d'expliciter le "système des contraintes", il a fallu ici tout réécrire.

**Bibliographie**


[Ch] G. V. Chudnovsky, *Contributions to the Theory of Transcendental Numbers*, Math. Surveys Monographs 19, Amer. Math. Soc., 1984.

[Ci] P. L. Cijsouw, *Transcendence measures of exponentials and logarithms of algebraic numbers*, Compositio Math. 28 (1974), 163–178.

[Di] G. Diaz, *Complément à : Sur l'approximation de $\pi$ par des nombres algébriques particuliers*, ibid. 79 (1991), 255–270.

[Du] A. Durand, *Simultaneous diophantine approximations and Hermite's method*, Bull. Austral. Math. Soc. 21 (1980), 463–470.

[F] N. I. Feldman, *On the problem of the measure of transcendence of e*, Uspekhi Mat. Nauk 18 (3) (1963), 207–213 (in Russian).

[FS] N. I. Feldman and A. B. Shidlovskiĭ, *The development and present state of the theory of transcendental numbers*, Russian Math. Surveys 22 (3) (1967), 1–79.

[G] A. I. Galochkin, *On the diophantine approximation of values of the exponential function and of solutions of some transcendental equations*, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 1972 (3), 16–23.

[M1] K. Mahler, *Zur approximation der Exponentialfunktion und der Logarithmus*, J. Reine Angew. Math. 166 (1932), 118–150.

[M2] —, *Lectures on Transcendental Numbers*, Lecture Notes in Math. 546, Springer, 1976.

[P] P. Philippon, *Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs*, Bull. Soc. Math. France 114 (1986), 355–383; errata et addenda, ibid. 115 (1987), 397–398.

[R] K. Ramachandra, *An easy transcendence measure for e*, J. Indian Math. Soc. 51 (1987), 111–116.

[S] T. Schneider, *Introduction aux nombres transcendants*, Gauthier-Villars, 1959.

[W1] M. Waldschmidt, *A lower bound for linear forms in logarithms*, Acta Arith. 37 (1980), 257–283.

[W2] —, *Transcendence measures for exponentials and logarithms*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A 25 (1978), 445–465.

[W3] M. Waldschmidt, *Transcendance et exponentielles en plusieurs variables*, Invent. Math. 63 (1981), 97–127.
[W4] —, *Nouvelles méthodes pour minorer des combinaisons linéaires de logarithmes de nombres algébriques*, Sem. Théorie des Nombres de Bordeaux 3 (1991), 129–185.

EQUIPE DE THÉORIE DES NOMBRES
UNIVERSITÉ DE SAINT-ETIENNE
F-42023 SAINT-ETIENNE CEDEX 2
FRANCE

*Reçu le 10.7.1992* (2241)