ACTA ARITHMETICA
LXI.2 (1992)

Evaluation effective du nombre d'entiers n tels que $\varphi(n) \leq x$

par

A. Smati (Limoges)

I. Introduction. Soient n et m des entiers naturels, x et y des nombres réels positifs. On désigne par φ la fonction arithmétique d'Euler. On a par définition

$$\varphi(n) = \#\{m \leq n\ ;(m,n) = 1\}\,.$$

C'est une fonction multiplicative, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'égalité

$$\varphi(kr) = \varphi(k)\varphi(r)$$

pour tous entiers naturels k et r premiers entre eux. φ vérifie, en outre, l'identité (cf. [5])

$$\varphi(n) = n\prod_{p|n}\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

où p désigne ici et dans la suite un nombre premier. Soit a_m le nombre de solutions de l'équation $\varphi(n) = m$. Ce nombre est fini (cf. [7]). Notons

$$N(x) = \sum_{m\leq x} a_m = \sum_{\varphi(n)\leq x} 1\,.$$

L'étude du comportement asymptotique de $N(x)$ permet de fournir une loi de répartition des valeurs de φ. Cette étude fut l'objet de plusieurs travaux (cf. [1]–[4], [6], [10]) différant par les méthodes employées et parfois par la précision des formules obtenues. Le résultat le plus précis actuellement connu est le suivant :

$$(1)\qquad \sum_{\varphi(n)\leq x} 1 = \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x + O_c(x\exp(-c\sqrt{\log x\log\log x}))\qquad (x\to+\infty)$$

où c est une constante arbitraire $< 1/\sqrt{2}$ et ζ la fonction zêta de Riemann. Il fut obtenu pour la première fois en 1972 par Bateman (cf. [2]). La méthode utilisée est classique. Donnons-en un aperçu. Considérons la fonction génératrice de la suite a_m :

$$F(s)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m m^{-s}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)^{-s}$$

définie dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s)>1$. Le théorème du produit eulérien fournit, dans le même demi-plan, la décomposition

$$F(s)=\zeta(s)\prod_p(1+(p-1)^{-s}-p^{-s})\,.$$

Il est facile de vérifier que le produit

$$C(s):=\prod_p(1+(p-1)^{-s}-p^{-s})$$

est absolument convergent dans le demi-plan $\mathrm{Re}(s)>0$ de sorte que $F(s)$ s'y prolonge en une fonction méromorphe, ayant un seul pôle en $s=1$ de résidu

$$C(1)=\prod_p\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}=1{,}943596436\ldots$$

Une formule d'inversion de Perron permet d'exprimer $N(x)$ comme intégrale de la fonction $F(s)$ le long d'une droite verticale du plan complexe. La méthode consiste alors à chercher des majorations de la fonction $F(s)$ prolongée et à utiliser ces majorations dans l'estimation de l'intégrale qui se fait à l'aide du théorème des résidus de Cauchy après une déformation convenable du chemin d'intégration.

Dans un article récent (cf. [1]), Balazard et l'auteur ont établi de nouveau la formule (1). La méthode employée est élémentaire, c'est-à-dire fondée sur des arguments n'utilisant pas la variable complexe. Partant de la fonction d'Euler tronquée :

$$\varphi(n,y)=n\prod_{\substack{p\mid n\\ p\le y}}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

et de la quantité

$$N(x,y)=\sum_{\varphi(n,y)\le x}1\,,$$

la méthode consiste, dans un premier temps, à approcher $N(x)$ par $N(x,y)$. Ceci se fait moyennant les inégalités

$$N(x,y)\le N(x)\le N\left(x\left(1-\frac{3\log x}{y}\right)^{-1},y\right),\tag{2}$$

valables pour x suffisamment grand. Et, dans un deuxième temps, à évaluer $N(x,y)$. Des estimations élémentaires et un résultat du crible de Brun permettent d'obtenir

$$N(x,y) = x \prod_{p \le y} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) + O_\varepsilon\left(x \log y \exp\left\{ - (1-\varepsilon)\frac{\log x}{\log y} \log\left(\frac{\log x}{\log y}\right)\right\}\right), \tag{3}$$

valable pour $x \ge y \ge (\log x)^{1/2}$, x suffisamment grand et $\varepsilon > 0$ arbitraire.

La formule (1) suit alors en combinant (2) et (3) et en choisissant $y = y(x)$ convenablement.

On se propose ici de présenter une forme effective de la formule (1) obtenue en suivant la méthode élémentaire de [1] que nous venons de décrire brièvement. De façon précise, on se propose d'établir le théorème :

Théorème. *Posons*

$$T(x) = \frac{\log\log\log x + 4 - \log 2}{\log\log x}.$$

On a, pour $x \ge 3$,

$$\left|\sum_{\varphi(n) \le x} 1 - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} x\right| \le 1{,}4 \cdot x \log x \log\log x \exp\{-(1 - T(x))\sqrt{(1/2)\log x \log\log x}\}.$$

Notons, pour $x \ge y > 1$,

$$u = u(x,y) = \frac{\log x}{\log y}, \qquad \sigma = \sigma(x,y) = 1 - \frac{\log u}{\log y},$$

et posons

$$B = \gamma + \sum_p \left(\log\left(1 - \frac{1}{p}\right) + \frac{1}{p}\right), \qquad E = -\gamma - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_p \frac{\log p}{p^n}$$

où γ désigne la constante d'Euler. On a les valeurs :

$$\gamma = 0{,}577215664\ldots, \qquad E = -1{,}332582275\ldots, \qquad B = 0{,}261497212\ldots$$

La démonstration du théorème repose, pour $x \ge 2{,}5 \cdot 10^9$, sur la

Proposition. *Soit x, y des nombres réels tels que $319 \le y \le x$. Supposons que $u \le y^{1/3}$. Alors, on a*

$$\left|N(x,y) - x \prod_{p \le y}\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right)\right| < C(\sigma)\zeta(2\sigma) \exp\left(B - 1 - \frac{E}{\log y}\right) \times \left\{ \exp\left(B - 1 - \frac{E}{\log y}\right) + \frac{e^{-\gamma}}{2\log^4 y} + \frac{e^{-\gamma}}{\log^2 y} + \frac{1}{\log y}\right\} \times x \log^2 y \exp(-u \log u + 2u).$$

Pour $3 \leq x \leq 2{,}5 \cdot 10^9$, la vérification du théorème se fait à l'aide de calculs sur ordinateur.

Dans la preuve de la proposition, nous utiliserons plusieurs fois la méthode de Rankin pour évaluer différentes sommes. Nous l'appliquerons, par exemple, à la somme

$$\sum_{\substack{\varphi(n)\leq x\\ P_+(n)\leq y}} 1$$

où $P_+(n)$ désigne le plus grand facteur premier de n, avec la convention $P_+(1) = 1$. La méthode de Rankin, qui s'applique à des situations plus générales, est basée d'une part, sur l'inégalité

$$\sum_{\substack{\varphi(n)\leq x\\ P_+(n)\leq y}} 1 \leq x^\theta \sum_{\substack{n\geq 1\\ P_+(n)\leq y}} \varphi(n)^{-\theta} = x^\theta \zeta(\theta, y) \prod_{p\leq y} (1 + (p-1)^{-\theta} - p^{-\theta})$$

où $\theta > 0$ et

$$\zeta(\theta, y) := \prod_{p\leq y} (1 - p^{-\theta})^{-1},$$

la partie finie du produit eulérien de la fonction zêta de Riemann, et d'autre part, sur le choix optimal du paramètre θ en fonction de x et de y. L'approximation de la somme s'obtient alors par l'estimation du membre de droite de l'inégalité précédente. On utilisera également, dans la preuve de la proposition, certains résultats de Rosser et Schoenfeld (cf. [9]). Signalons que nous n'avons pas toujours cherché à établir les meilleures estimations possibles dès lors qu'elles n'influent pas dans la précision du résultat final. Enfin, concernant les valeurs numériques des constantes, on convient que lorsqu'on écrit, par exemple, $\varrho = 0{,}7325\ldots$, cela signifie que le développement décimal de la constante ϱ (rationnelle ou irrationnelle) est tronqué à la 4ème décimal (à l'exception des constantes figurant dans les 3ème colonnes des tables I à IV de l'annexe où nous avons omis les trois points); par contre, si l'on écrit $\kappa = 0{,}7325$, cela signifie que κ est une constante rationnelle dont le développement décimal donné est exacte.

La partie II suivante est consacrée à la démonstration de la proposition et la partie III à celle du théorème. La partie IV est un annexe où l'on trouvera des tables résumant les calculs faits sur ordinateur. Nous garderons, dans ces différentes parties, l'ensemble des notations introduites ici.

Je remercie vivement J.-L. Nicolas pour ses conseils, G. Robin et M. Balazard de leur aide. Je dois aussi à ce dernier l'amélioration du lemme 6. Je remercie également M. Deléglise de son aide dans les calculs sur ordinateur. Nous avons apprécié les remarques de l'arbitre, nous l'en remercions.

II. Démonstration de la proposition. La démonstration nécessite les lemmes préliminaires suivants :

LEMME 1 ([9]). *On a, pour $x \ge 286$,*

$$\sum_{p \le x} \frac{1}{p} < \log\log x + B + \frac{1}{2\log^2 x}.$$

LEMME 2 ([9]). *On a, pour $x \ge 319$,*

$$\sum_{p \le x} \frac{\log p}{p} < \log x + E + \frac{1}{2\log x}.$$

LEMME 3 ([9]). *On a, pour $x > 1$,*

$$\prod_{p \le x}\left(1 - \frac{1}{p}\right) < \frac{e^{-\gamma}}{\log x}\left(1 + \frac{1}{2\log^2 x}\right).$$

LEMME 4. *On a, pour $y \ge 319$ et $\theta > 0$,*

(i) $$\sum_{p \le y} p^{-\theta} < \log\log y + (B-1) - \frac{E}{\log y} + e^{(1-\theta)\log y},$$

(ii) $$\prod_{p \le y}(1 + p^{-\theta}) < \exp\left(B - 1 - \frac{E}{\log y}\right)\log y \exp(e^{1-\theta)\log y}).$$

Démonstration. Remarquons que la majoration du produit dans (ii) revient à celle de la somme dans (i). En effet,

$$\prod_{p \le y}(1 + p^{-\theta}) = \exp\Big(\sum_{p \le y}\log(1 + p^{-\theta})\Big) \le \exp\Big(\sum_{p \le y} p^{-\theta}\Big).$$

Considérons maintenant la somme $\sum_{p \le y} p^{-\theta}$. On a

$$\sum_{p \le y} p^{-\theta} = \sum_{p \le y} p^{-1} + \sum_{p \le y}(p^{-\theta} - p^{-1}) := \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2.$$

Or

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{p \le y} p^{-1}(e^{(1-\theta)\log p} - 1) = (1-\theta)\sum_{p \le y} p^{-1}\log p\left(\frac{e^{(1-\theta)\log p} - 1}{(1-\theta)\log p}\right).$$

La fonction $t \to (e^t - 1)/t$ étant croissante pour $t > 0$, il s'ensuit que

$$\sum\nolimits_2 \le \frac{e^{(1-\theta)\log y} - 1}{\log y}\sum_{p \le y}\frac{\log p}{p}.$$

L'application des lemmes 1 et 2 donne, pour $y \ge 319$,

$$\begin{aligned}\sum_{p\le y} p^{-\theta} &= \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 \\ &< \log\log y + (B-1) - \frac{E}{\log y} + e^{(1-\theta)\log y}\left(1 + \frac{E}{\log y} + \frac{1}{2\log^2 y}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\frac{E}{\log y} + \frac{1}{2\log^2 y} < 0\,,$$

d'où le lemme.

Lemme 5. (i) *On a, pour* $y \ge 319$ *et* $\theta > 1/2$,

$$\sum_{\substack{n=1\\ P_+(n)\le y}}^{\infty} \varphi(n)^{-\theta} \le C(\theta)\zeta(2\theta)\exp\left(B - 1 - \frac{E}{\log y}\right)\log y \exp(e^{(1-\theta)\log y})\,.$$

(ii) *On a, pour* $319 \le y \le x$ *et* $u < y^{1/3}$,

$$\sum_{\substack{\varphi(n)\le x\\ P_+(n)\le y}} 1 \le C(\sigma)\zeta(2\sigma)\exp\left(B - 1 - \frac{E}{\log y}\right) x \log y \exp(-u\log u + u)\,.$$

Démonstration. (ii) est conséquence de (i) par application de la méthode de Rankin :

$$\sum_{\substack{\varphi(n)\le x\\ P_+(n)\le y}} 1 \le x^{\theta} \sum_{\substack{n=1\\ P_+(n)\le y}}^{\infty} \varphi(n)^{-\theta}$$

et en choisissant $\theta = \sigma$. (Remarquons que l'hypothèse $u \le y^{1/3}$ implique que $\sigma \ge 2/3$.)

Considérons la somme $\sum_{n\ge 1, P_+(n)\le y} \varphi(n)^{-\theta}$ dans (i). On a

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n=1\\ P_+(n)\le y}}^{\infty} \varphi(n)^{-\theta} &\\ &= \prod_{p\le y}(1 + (p-1)^{-\theta} - p^{-\theta}) \prod_{p\le y}(1 + p^{-2\theta} + p^{-4\theta} + \ldots) \prod_{p\le y}(1 + p^{-\theta}) \\ &\le \zeta(2\theta)C(\theta)\prod_{p\le y}(1 + p^{-\theta})\,.\end{aligned}$$

Le lemme suit en appliquant le lemme 4(ii).

Par analogie à $P_+(n)$, notons $P_-(n)$ le plus petit facteur premier de n avec la convention $P_-(1) = \infty$.

Lemme 6. *Soient x, y des nombres réels tels que $319 \le y \le x$. Supposons $u \le y^{1/3}$. Alors, on a*

$$\Big|\sum_{\substack{n\le x\\ P_-(n)>y}} 1 - x\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right)\Big| \le \exp\left(B-1-\frac{E}{\log y}\right)x\log y\exp(-u\log u+u)\,.$$

Démonstration. Nous explicitons, ici, une idée de G. Tenenbaum (cf. [11], p. 439). On a

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{n\le x\\ P_-(n)>y}} 1 &= \sum_{n\le x}\sum_{\substack{m\mid n\\ P_+(m)\le y}} \mu(m) = \sum_{\substack{m\le x\\ P_+(m)\le y}} \mu(m)\left[\frac{x}{m}\right]\\
&= x\sum_{\substack{m\le x\\ P_+(m)\le y}} \frac{\mu(m)}{m} - \sum_{\substack{m\le x\\ P_+(m)\le y}} \mu(m)\left\{\frac{x}{m}\right\}\\
&= x\sum_{\substack{m=1\\ P_+(m)\le y}}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m} + \Bigg(-x\sum_{\substack{m>x\\ P_+(m)\le y}} \frac{\mu(m)}{m} - \sum_{\substack{m\le x\\ P_+(m)\le y}} \mu(m)\left\{\frac{x}{m}\right\}\Bigg)\\
&= x\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right) + R(x,y)
\end{aligned}$$

où

$$R(x,y) := -x\sum_{\substack{m>x\\ P_+(m)\le y}} \frac{\mu(m)}{m} - \sum_{\substack{m\le x\\ P_+(m)\le y}} \mu(m)\left\{\frac{x}{m}\right\}.$$

Il vient

$$\sum_{\substack{n\le x\\ P_-(n)>y}} 1 - x\prod_{p\le y}\left(1-\frac{1}{p}\right) = R(x,y)\,.$$

Considérons maintenant $R(x,y)$. On a, pour $0<\theta\le 1$,

$$|R(x,y)| \le \sum_{\substack{m=1\\ P_+(m)\le y}}^{\infty} |\mu(m)|\left(\frac{x}{m}\right)^{\theta}$$

car

$$\begin{aligned}
\frac{x}{m} &\le \left(\frac{x}{m}\right)^{\theta} \qquad \text{si } m>x \text{ et } \theta\le 1;\\
1 &\le \left(\frac{x}{m}\right)^{\theta} \qquad \text{si } m\le x \text{ et } \theta>0\,.
\end{aligned}$$

Maintenant, on applique la méthode de Rankin : pour $0 < \theta \le 1$, on a

$$|R(x,y)| \le x^\theta \sum_{\substack{m=1 \\ P_+(m)\le y}}^{\infty} |\mu(m)| m^{-\theta} = x^\theta \prod_{p\le y} (1+p^{-\theta})\,.$$

Le lemme suit en appliquant le lemme 4(ii) et en choisissant $\theta = \sigma$.

Maintenant, passons à la démonstration de la proposition. On a

$$N(x,y) = \sum_{\substack{\varphi(n)\le x \\ P_+(n)\le y}} 1 - \sum_{\substack{\varphi(n)\le x/y \\ P_+(n)\le y}} 1 + \sum_{\substack{\varphi(n)\le x/y \\ P_+(n)\le y}} \Big(\sum_{\substack{1\le m\le x/\varphi(n) \\ P_-(m)>y}} 1 \Big)\,.$$

La 3$^{\text{e}}$ somme du second membre s'écrit (cf. lemme 6)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{\varphi(n)\le x/y \\ P_+(n)\le y}} \bigg(\frac{x}{\varphi(n)} \prod_{p\le y} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) + R(x/\varphi(n),y) \bigg) \\
&\qquad = x \prod_{p\le y} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) \sum_{\substack{n=1 \\ P_+(n)\le y}}^{\infty} \varphi(n)^{-1} - x \prod_{p\le y} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) \sum_{\substack{\varphi(n)>x/y \\ P_+(n)\le y}} \varphi(n)^{-1} \\
&\qquad\qquad + \sum_{\substack{\varphi(n)\le x/y \\ P_+(n)\le y}} R(x/\varphi(n),y) \\
&\qquad = x \prod_{p\le y} \Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big) + \bigg\{ -x \prod_{p\le y} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) \sum_{\substack{\varphi(n)>x/y \\ P_+(n)\le y}} \varphi(n)^{-1} \\
&\qquad\qquad + \sum_{\substack{\varphi(n)\le x/y \\ P_+(n)\le y}} R(x/\varphi(n),y) \bigg\}\,.
\end{aligned}$$

Finalement en regroupant, on obtient

$$\begin{aligned}
&N(x,y) - x \prod_{p\le y} \Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big) \\
&\qquad = -x \prod_{p\le y} \Big(1-\frac{1}{p}\Big) \sum_{\substack{\varphi(n)>x/y \\ P_+(n)\le y}} \varphi(n)^{-1} + \sum_{\substack{\varphi(n)\le x/y \\ P_+(n)\le y}} R(x/\varphi(n),y) \\
&\qquad\quad + \Big(\sum_{\substack{\varphi(n)\le x \\ P_+(n)\le y}} 1 - \sum_{\substack{\varphi(n)\le x/y \\ P_+(n)\le y}} 1 \Big) \\
&\qquad := T_1 + T_2 + T_3\,.
\end{aligned}$$

M a j o r a t i o n d e T_1 : Pour $1/2 < \theta < 1$, on a

$$\sum_{\substack{\varphi(n)>x/y\\ P+(n)\le y}} \varphi(n)^{-1} \le y^{1-\theta} x^{-(1-\theta)} \sum_{\substack{n=1\\ P_+(n)\le y}}^{\infty} \varphi(n)^{-\theta}\,.$$

L'application du lemme 5(i) et le choix de $\theta = \sigma$ donnent

$$\sum_{\substack{\varphi(n)>x/y\\ P_+(n)\le y}} \varphi(n)^{-1} \le C(\sigma)\zeta(2\sigma)\exp\left(B-1-\frac{E}{\log y}\right)\log x \exp(-u\log u+u)$$

pour $x \ge y \ge 319$ et $u \le y^{1/3}$. Enfin, l'application du lemme 3 donne

$$\begin{aligned}|T_1| < C(\sigma)\zeta(2\sigma)e^{-\gamma}&\left(1+\frac{1}{2\log^2 y}\right)\exp\left(B-1-\frac{E}{\log y}\right)\\ &\times x\exp(-u\log u+u+\log u)\,.\end{aligned}$$

M a j o r a t i o n d e T_2 : On pose

$$u_n := \frac{\log(x/\varphi(n))}{\log y} = u - \frac{\log\varphi(n)}{\log y}\,.$$

On a

$$|u_n \log u_n - u\log u| \le (\log(u)+1)\frac{\log\varphi(n)}{\log y}\,,$$

donc

$$\begin{aligned}&\exp(-u_n\log u_n+u_n)\\ &\qquad\le \exp(-u\log u+\log(\varphi(n))^{(\log(u)+1)/\log y}+u-\log(\varphi(n))^{1/\log y})\\ &\qquad\le \varphi(n)^{\log u/\log y}\exp(-u\log u+u)\end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{\varphi(n)\le x/y\\ P_+(n)\le y}} &\varphi(n)^{-1}\exp(-u_n\log u_n+u_n)\\ &\le \exp(-u\log u+u)\sum_{\substack{\varphi(n)\le x/y\\ P_+(n)\le y}}\varphi(n)^{\log u/\log y-1}\\ &\le \exp(-u\log u+u)\sum_{\substack{n=1\\ P_+(n)\le y}}^{\infty}\varphi(n)^{-\sigma}\,.\end{aligned}$$

D'après le lemme 6 et le lemme 5(i), on obtient, pour $x \geq y \geq 319$ et $u \leq y^{1/3}$,

$$|T_2| = \Big| \sum_{\substack{\varphi(n) \leq x/y \\ P_+(n) \leq y}} R(x/\varphi(n), y) \Big|$$
$$\leq C(\sigma)\zeta(2\sigma) \exp\left(2\left(B - 1 - \frac{E}{\log y}\right)\right) x \log^2 y \exp(-u \log u + 2u) .$$

Majoration de T_3 :

$$|T_3| = \Big| \sum_{\substack{\varphi(n) \leq x \\ P_+(n) \leq y}} 1 - \sum_{\substack{\varphi(n) \leq x/y \\ P_+(n) \leq y}} 1 \Big| \leq \sum_{\substack{\varphi(n) \leq x \\ P_+(n) \leq y}} 1$$
$$< C(\sigma)\zeta(2\sigma) \exp\left(B - 1 - \frac{E}{\log y}\right) x \log y \exp(-u \log u + u)$$

pour $x \geq y \geq 319$ et $u \leq y^{1/3}$, d'après le lemme 5(ii). Ceci achève la démonstration de la proposition.

III. Démonstration du théorème. Nous avons besoin d'introduire quelques notations et de présenter quelques lemmes.

Dans la suite, lorsque y est choisi comme fonction de x, on posera

$$y = y(x) = \exp(\sqrt{(1/2) \log x \log \log x}) .$$

On notera

$$v = x\left(1 - \frac{1{,}627 \log x}{y(x)}\right)^{-1}, \qquad T(x) = \frac{\log \log \log x + 4 - \log 2}{\log \log x},$$
$$R(x) = x \log x \log \log x \exp\{-(1 - T(x))\sqrt{(1/2) \log x \log \log x}\},$$
$$\widetilde{N}(x) = N(x, y(x)), \qquad \widetilde{\widetilde{N}}(x) = N(v, y(x))$$

et

$$\widetilde{u} = \log v / \log y .$$

Lemme 7. *On a, pour* $y \geq 319$,

$$\Big| \prod_{p \leq y} \left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} \Big| \leq a \frac{1}{y}$$

où

$$a = \frac{319}{318} \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} = 1{,}949708374\ldots < 1{,}95 .$$

D é m o n s t r a t i o n. On a

$$\prod_{p\le y}\Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big)=\prod_{p}\Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big)\prod_{p>y}\Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big)^{-1}$$
$$=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\prod_{p>y}\Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big)^{-1}.$$

D'autre part,

$$\prod_{p>y}\Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big)^{-1}=\exp\Big(-\sum_{p>y}\log\Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big)\Big)$$
$$\ge\exp\Big(-\sum_{p>y}\frac{1}{p(p-1)}\Big)$$
$$\ge\exp\Big(-\sum_{n>y}\frac{1}{n(n-1)}\Big)=\exp\Big(-\frac{1}{[y]}\Big)\ge 1-\frac{1}{[y]}.$$

Donc

$$\Big|\prod_{p\le y}\Big(1+\frac{1}{p(p-1)}\Big)-\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\Big|\le\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}\frac{1}{[y]}.$$

Le lemme suit alors en remarquant que

$$\frac{1}{[y]}\le\frac{1}{y-1}=\frac{y}{y-1}\frac{1}{y}\le\frac{319}{318}\frac{1}{y}.$$

Lemme 8. *On a, pour* $x\ge 2{,}5\cdot 10^9$,

$$\widetilde{N}(x,y(x))\le N(x)\le\widetilde{\widetilde{N}}(v,y).$$

D é m o n s t r a t i o n. La première inégalité est valable pour tout $x\ge 1$ car pour tout $n\ge 1$, $\varphi(n)\le\varphi(n,y)$. Montrons la deuxième inégalité. On a (cf. [1], lemme 1), pour tout $n\ge 2$,

$$\varphi(n)\ge\varphi(n,y)\Big(1-\frac{\log n}{y\log 2}\Big).\tag{4}$$

Mais, si $x\ge\varphi(n)$, alors l'application de la formule (cf. [9])

$$\varphi(n)>\frac{n\log\log n}{e^\gamma(\log\log n)^2+2{,}50637}\qquad\text{pour } n\ge 3$$

donne pour $n\ge 36$

$$x\ge 0{,}30124\frac{n}{\log\log n},\tag{5}$$

et donc pour $x \geq 9$

$$\log n \leq 1{,}67482 \log x \,. \tag{6}$$

Or de (5)

$$n \leq 3{,}31962 x \log\log n \,,$$

et de (6)

$$\log\log n \leq 1{,}54475 \log\log x$$

pour $x \geq 2{,}5 \cdot 10^9$. D'où

$$n \leq 5{,}12799 x \log\log x \,. \tag{7}$$

Enfin de (7) on obtient $\log n \leq 1{,}12746 \log x$ pour $n \geq 36$ et $x \geq 2{,}5 \cdot 10^9$. Alors (4) donne

$$\varphi(n, y) \leq x \left(1 - \frac{1{,}627 \log x}{y}\right)^{-1}$$

valable pour $x \geq 2{,}5 \cdot 10^9$ et $n \geq 36$. Cette dernière inégalité est vérifiée pour $1 \leq n < 36$ car, dans ce cas, $\varphi(n) = \varphi(n, y)$ et $x \leq v$. D'où l'inégalité annoncée.

Lemme 9. *On a*, *pour* $x \geq 2{,}5 \cdot 10^9$,

$$\left(1 - \frac{1{,}627 \log x}{y(x)}\right)^{-1} \leq 1 + b \frac{\log x}{y(x)} \qquad \text{où } b = 1{,}8282599\ldots < 1{,}829 \,.$$

Démonstration. Posons :

$$u(x) = 1{,}627 \frac{\log x}{y(x)} \qquad \text{et} \qquad G(x) = \frac{1}{1 - u(x)} \,.$$

On a

$$\alpha = \sup_{x \geq 2{,}5 \cdot 10^9} \left(\frac{G(x) - 1}{u(x)}\right) = \sup_{x \geq 2{,}5 \cdot 10^9} (G(x)) = G(2{,}5 \cdot 10^9) = 1{,}1237\ldots$$

D'où

$$b = 1{,}627 \alpha = 1{,}8282599\ldots < 1{,}829 \,.$$

Lemme 10. (i) *La fonction* $\delta \to f(x, \delta) = (x-1)^{-\delta} - x^{-\delta}$ *est décroissante pour* $\delta > 1/\log(x-1)$. *En particulier*, *elle est décroissante dans l'intervalle* $0{,}77 \leq \delta \leq 1$, *pour* $x \geq 4{,}67$.

(ii) *On a*, *pour* $x \geq 2{,}5 \cdot 10^9$,

$$0{,}77 \leq \sigma(x, y(x)) = \sigma \leq 1 \,; \tag{a}$$

$$C(\sigma) \leq (1 + f(2,1))(1 + f(3,1)) \prod_{p \geq 5} (1 + f(p,\ 0{,}77)) \leq 1{,}999582\ldots \,; \tag{b}$$

$$\zeta(2\sigma) \leq \zeta(1{,}54) = 2{,}466929\ldots \,; \tag{c}$$

(d) $$D := C(\sigma)\zeta(2\sigma)\exp\left(B - 1 - \frac{E}{\log y(x)}\right)\left\{\exp\left(B - 1 - \frac{E}{\log y(x)}\right) + \frac{1}{\log y(x)} + \frac{e^{-\gamma}}{\log^2 y(x)} + \frac{e^{-\gamma}}{2\log^4 y(x)}\right\} \le 2{,}353580558\ldots < 2{,}36\,.$$

D é m o n s t r a t i o n. (i) est élémentaire.

(ii) La première majoration de $C(\sigma)$ découle de (i) en posant $x = p$ et du fait que $f(2,\sigma)$ et $f(3,\sigma)$ sont des fonctions croissantes en σ dans l'intervalle $[0{,}77,\ 1]$. Le calcul numérique du produit est fait par M. Deléglise. Sa méthode qui s'inspire d'une idée de Riesel (cf. [8], p. 69) s'applique, en général, au cas de sommes eulériennes

$$\sum_p g(1/p)$$

où g est supposée analytique au voisinage de 0. Il s'agit moyennant le développement de g en série entière en 0, de se ramener à une série du type

$$\sum_n a_n S(n) \quad \text{où} \quad S(n) = \sum_p 1/p^n\,,$$

dont la convergence est géométrique. En outre $S(n)$ se calcule avec une bonne précision dès que l'on connaît les valeurs de $\zeta(kn)$ puisque on a (cf. [8], p. 69)

$$S(n) = \sum_k \frac{\mu(k)}{k}\log\zeta(kn)$$

où μ est la fonction de Möbius.

Lemme 11. *On a, pour* $x \ge 2{,}5\cdot 10^9$,

$$\left| v\prod_{p\le y(x)}\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x\right| \le 3{,}657x\log x\cdot e^{-\sqrt{(1/2)\log x\log\log x}}\,.$$

D é m o n s t r a t i o n. On a, d'après les lemmes 7 et 9,

$$v\prod_{p\le y}\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) = \left(x + \varepsilon_1 bx\frac{\log x}{y}\right)\left(\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)} + \varepsilon_2\frac{a}{y}\right)$$

avec $|\varepsilon_1| \le 1$ et $|\varepsilon_2| \le 1$. Il vient, en posant $y = y(x)$,

$$v\prod_{p\le y}\left(1 + \frac{1}{p(p-1)}\right) - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x = \varepsilon\frac{x\log x}{y(x)}\left\{\frac{a}{\log x} + \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}b + \frac{ab}{y(x)}\right\}$$

où $|\varepsilon| \le 1$. Le lemme suit en effectuant les calculs numériques.

Lemme 12. *On a, pour* $x \ge 2{,}5\cdot 10^9$,

(i) $$\left|\widetilde{N}(x)-\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x\right| \le 1{,}2x\log x\log\log x\exp\{-(1-T(x))\sqrt{(1/2)\log x\log\log x}\}.$$

(ii) $$\left|\widetilde{\widetilde{N}}(x)-\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x\right| \le 1{,}4x\log x\log\log x\exp\{-(1-T(x))\sqrt{(1/2)\log x\log\log x}\}.$$

Démonstration. (i) D'après la proposition, on a

$$\widetilde{N}(x)=x\prod_{p\le y}\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)+\varepsilon Dx\log^2 y\exp(-u\log u+2u)$$

avec $|\varepsilon|\le 1$. En posant $y=y(x)$, on obtient

$$\log^2 y=\tfrac{1}{2}\log x\log\log x\,,$$

$$\exp(-u\log u+2u)=\exp\{-(1-T(x))\sqrt{(1/2)\log x\log\log x}\}\,,$$

et

$$\prod_{p\le y}\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}+\varepsilon' a\exp(-\sqrt{(1/2)\log x\log\log x})$$

où $|\varepsilon'|\le 1$. D'où

$$\left|\widetilde{N}(x)-\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x\right|\le\left[\frac{D}{2}+\frac{a}{\log x\log\log x\exp(T(x)\sqrt{(1/2)\log x\log\log x})}\right]$$
$$\times x\log x\log\log x\exp\{-(1-T(x))\sqrt{(1/2)\log x\log\log x}\}\,,$$

et

$$\frac{D}{2}+\frac{a}{\log x\log\log x\exp(T(x)\sqrt{(1/2)\log x\log\log x})}\le 1{,}2$$

pour $x\ge 2{,}5\cdot 10^9$. Le (ii) se traite de la même façon. La proposition donne

$$\widetilde{\widetilde{N}}(x)=v\prod_{p\le y}\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)+\varepsilon Dv\log^2 y\exp(-\widetilde{u}\log\widetilde{u}+2\widetilde{u})$$

où $|\varepsilon|\le 1$. En posant $y=y(x)$, le lemme 11 donne, pour $x\ge 2{,}5\cdot 10^9$,

$$v\prod_{p\le y}\left(1+\frac{1}{p(p-1)}\right)=\frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x+\varepsilon'\cdot 3{,}657x\log x\cdot e^{-\sqrt{(1/2)\log x\log\log x}}$$

où $|\varepsilon'|\le 1$. Mais, pour $x\ge 2{,}5\cdot 10^9$, on a

$$\exp(-\widetilde{u}\log\widetilde{u}+2\widetilde{u})\le 1{,}0439\exp\{-(1-T(x))\sqrt{(1/2)\log x\log\log x}\}$$

et

$$v\log^2 y\le 0{,}569x\log x\log\log x\,.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
&\left|\widetilde{\widetilde{N}}(x) - \frac{\zeta(2)\zeta(3)}{\zeta(6)}x\right| \\
&\quad \le \left(\frac{3{,}657}{\log\log x \exp(T(x)\sqrt{(1/2)\log x \log\log x})} + 0{,}569 \cdot 1{,}0439D\right) \\
&\qquad \times x \log x \log\log x \exp\{-(1-T(x))\sqrt{(1/2)\log x \log\log x}\} \\
&\quad \le 1{,}4x \log x \log\log x \exp\{-(1-T(x))\sqrt{(1/2)\log x \log\log x}\}\,,
\end{aligned}$$

pour $x \ge 2{,}5 \cdot 10^9$. D'où le lemme.

LEMME 13. *La fonction $x \to R(x)$ est croissante pour $x \ge e^e = 15{,}15\ldots$*

Démonstration. Elle est élémentaire.

LEMME 14. *Soient $a \le b$ des entiers positifs*, $a \ge 16$. *On a*

(i) $$C_{(a,b)} := \sup_{a \le x \le b} \frac{|N(x) - C(1)x|}{R(x)} \le C^*_{(a,b)} := \frac{1}{R(a)} \max\{|N(b) - C(1)a|, |N(a) - C(1)b|\}.$$

(ii) *Pour* $3 \le x \le 2{,}5 \cdot 10^9$

$$|N(x) - C(1)x| \le dR(x)\,.$$

La valeur de la constante $d = 0{,}3445353\ldots$ est atteinte en $x = 3$.

Démonstration. (i) D'une part, $R(x)$ est croissante pour $x \ge 16$ (cf. lemme 13), et d'autre part,

$$N(a) \le N(x) \le N(b) \quad \text{et} \quad -C(1)b \le -C(1)x \le -C(1)a\,.$$

D'où le résultat.

(ii) Pour $3 \le x \le 10^3$ la vérification se fait à l'aide d'un ordinateur (cf. tables I et II, m_0 désignant la valeur où le maximum $C_{(a,b)}$ est atteint).

Pour $10^3 \le x \le 2{,}5 \cdot 10^9$, on calcul sur ordinateur les valeurs $N(m)$ pour $m = 10^4,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^7,\ 10^8,\ 10^9,\ 2{,}5 \cdot 10^9$ (cf. table III), puis on applique (i) dans les intervalles $[10^3, 10^4]$, $[10^4, 10^5]$, etc. jusqu'à $[10^9, 2{,}5{\cdot}10^9]$ (cf. table IV). L'algorithme de calcul $N(m)$, dû à M. Deléglise, est basée sur la méthode de backtracking. Notons, pour tout entier $k \ge 1$, $\phi(k,x)$ le nombre d'entiers $n \ne 1$, sans facteur premier inférieur au k-ième nombre premier p_k et tels que $\varphi(n) \le x$. On a

$$N(x) = 1 + \phi(1,x)\,.$$

Le calcul de $\phi(k,x)$ se fait comme suit :

1er cas. Si $p_k > x + 1$ alors $\phi(k,x) = 0$.

2e cas. Si $p_k(p_k - 1) > x$ alors $\phi(k,x) = \pi(x+1) - (k-1)$ ($\pi(z)$ étant le nombre de nombres premiers $\le z$).

3e cas. Il s'agit de classer les entiers n selon l'exposant α_k de p_k dans la décomposition de n en facteurs premiers. Notons $\phi_i(k,x)$ le nombre d'entiers $n \neq 1$, sans facteur premier $< p_k$ et dont l'exposant $\alpha_k = i$ et tels que $\varphi(n) \le x$. On a alors $\phi_0(k,x) = \phi(k+1,x)$ et pour $i \ge 1$

$$\phi_i(k,x) = 1 + \phi(k+1, x/p_k^{i-1}(p_k-1)) .$$

Il s'ensuit alors

$$\phi(k,x) = \phi_0(k,x) + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(k,x) .$$

Le théorème est conséquence immédiate des lemmes 8, 12 et 14(ii).

IV. Annexe

Table I

$[a,b]$	m_0	$N_{(m_0)}$	$C_{(a,b)}$
$[3,10]$	3	5	0,3445353
$[11,20]$	12	26	0,0060936
$[21,30]$	24	53	0,0017233
$[31,40]$	35	64	0,0017233
$[41,50]$	48	101	0,0020639
$[51,60]$	59	110	0,0009286
$[61,70]$	69	129	0,0008129
$[71,80]$	72	148	0,0012083
$[81,90]$	84	168	0,0005727
$[91,100]$	95	177	0,0007793

Table II

$[a,b]$	m_0	$N_{(m_0)}$	$C_{(a,b)}$
$[101,150]$	120	242	0,0006505
$[151,200]$	159	301	0,0004088
$[201,250]$	240	484	0,0005203
$[251,300]$	288	576	0,0003809
$[301,350]$	311	592	0,0002647
$[351,400]$	360	716	0,0002875
$[401,450]$	432	856	0,0002291
$[451,500]$	480	954	0,0002584
$[501,550]$	504	990	0,0001202
$[551,600]$	575	1097	0,0002012
$[601,650]$	623	1194	0,0001493
$[651,700]$	672	1328	0,0001765
$[701,750]$	720	1432	0,0002413
$[751,800]$	768	1512	0,0001320
$[801,851]$	839	1616	0,0000899
$[851,900]$	864	1702	0,0001344
$[901,950]$	950	1832	0,0000758
$[951,1000]$	960	1890	0,0001255

Table III

m	$N_{(m)}$	$\frac{\lvert N(m)-C(1)m\rvert}{R(m)}$
10^3	1941	$0{,}0128384885 \cdot 10^{-3}$
10^4	19452	$0{,}0519895719 \cdot 10^{-4}$
10^5	194424	$0{,}0166275062 \cdot 10^{-4}$
10^6	1943930	$0{,}0636483430 \cdot 10^{-5}$
10^7	19436914	$0{,}0151546700 \cdot 10^{-5}$
10^8	194361790	$0{,}0296819021 \cdot 10^{-6}$
10^9	1943603114	$0{,}0821790541 \cdot 10^{-7}$
$2{,}5 \cdot 10^9$	4858995847	$0{,}0224831736 \cdot 10^{-7}$

Table IV

$[a,b]$	$C^*_{(a,b)}$
$[10^3,10^4]$	0,0865731
$[10^4,10^5]$	0,0567350
$[10^5,10^6]$	0,0419443
$[10^6,10^7]$	0,0333797
$[10^7,10^8]$	0,0279156
$[10^8,10^9]$	0,0241909
$[10^9, 2{,}5\cdot 10^9]$	0,0035883

Références

[1] M. Balazard and A. Smati, *Elementary proof of a theorem of Bateman*, dans : Analytic Number Theory, Proc. Conf. in Honor of Paul T. Bateman, Allerton Park, Ill., 1989, Progr. Math. 85, Birkhäuser, Boston 1990, 41–46.

[2] P. T. Bateman, *The distribution of values of the Euler function*, Acta Arith. 21 (1972), 329–345.

[3] R. E. Dressler, *A density which counts multiplicity*, Pacific J. Math. 34 (1970), 371–378.

[4] P. Erdős, *Some remarks on Euler's ϕ-function and some related problems*, Bull. Amer. Math. Soc. 51 (1945), 540–544.

[5] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, 5th ed., Clarendon Press, Oxford 1979.

[6] J.-L. Nicolas, *Distribution des valeurs de la fonction d'Euler*, Enseign. Math. 30 (1984), 331–338.

[7] D. P. Parent, *Exercises de théorie des nombres*, Gauthier-Villars, Paris 1978.

[8] H. Riesel, *Prime Numbers and Computer Methods for Factorization*, Birkhäuser, 1985.

[9] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. 6 (1962), 64–94.

[10] A. Smati, *Répartition des valeurs de la fonction d'Euler*, Enseign. Math. 35 (1989), 61–76.

[11] G. Tenenbaum, *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres*, Publ. Inst. Elie Cartan 13, Université de Nancy, 1990.

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES DE LIMOGES
123, AVENUE ALBERT THOMAS
87060 LIMOGES CEDEX, FRANCE

Reçu le 12.7.1990
et révisé le 26.7.1991 (2061)