ACTA ARITHMETICA
LX.3 (1992)

Extremale asymptotische Reichweitenbasen

von

Christoph Kirfel (Bergen)

1. Einleitung. Eine Menge von k natürlichen Zahlen $A_k = \{1 = a_1 < a_2 < \ldots < a_k\} \subset \mathbb{N}$ nennen wir eine *Reichweitenbasis* oder einfach eine *Basis*. Sei $n \in \mathbb{N}$, so hat n eine *h-Darstellung* mit A_k, falls nicht-negative ganzzahlige Koeffizienten $z_1, z_2, \ldots, z_k \in \mathbb{N}_0$ existieren, so daß

$$n = \sum_{i=1}^{k} z_i a_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{k} z_i \le h\,.$$

Ist N die kleinste natürliche Zahl ohne h-Darstellung, so nennen wir $N-1$ die *h-Reichweite*, $n_h(A_k)$ von A_k:

$$n_h(A_k) = \min\{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ hat keine } h\text{-Darstellung mit } A_k\} - 1\,.$$

Eine Darstellung

$$n = \sum_{i=1}^{k} e_i a_i \tag{1}$$

heißt *regulär*, falls a_k sooft als möglich vorkommt, a_{k-1} sooft als möglich in der Darstellung des Restes $n - e_k a_k$, u.s.w. Die reguläre Darstellung von n ist eindeutig bestimmt und dient uns im folgenden als Ausgangspunkt zur Erlangung einer beliebigen Darstellung.

Für die Basiselemente $a_i \in A_k$, $i = 2, 3, \ldots, k$, schreiben wir

$$a_i = \gamma_{i-1} a_{i-1} - \sum_{j=1}^{i-2} \beta_j^{(i)} a_j\,. \tag{2}$$

Dabei ist $\gamma_{i-1} = \lceil a_i / a_{i-1} \rceil$, und $\sum_{j=1}^{i-2} \beta_j^{(i)} a_j = \gamma_{i-1} a_{i-1} - a_i$ ist die reguläre Darstellung des Restes $\gamma_{i-1} a_{i-1} - a_i$. Hierbei bezeichnet $\lceil x \rceil$ die kleinste ganze Zahl $\ge x \in \mathbb{R}$. Die Darstellung (2) heißt *Normalform* von A_k.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ wie in (1) regulär mit A_k dargestellt, und seien $s_i \in \mathbb{Z}$,

$i = 2, 3, \ldots, k$, so ist

$$n = \sum_{i=1}^{k} e_i a_i + \sum_{i=2}^{k} s_i \Big(\gamma_{i-1} a_{i-1} - a_i - \sum_{j=1}^{i-2} \beta_j^{(i)} a_j\Big)$$
$$= \sum_{j=1}^{k} \Big(e_j - s_j + s_{j+1}\gamma_j - \sum_{i=j+2}^{k} s_i \beta_j^{(i)}\Big) a_j \,.$$

(Hierbei haben wir der Kürze halber $s_1 = s_{k+1} = \gamma_k = 0$ eingeführt.)

Mit $z_j = e_j - s_j + s_{j+1}\gamma_j - \sum_{i=j+2}^{k} s_i \beta_j^{(i)}$, gilt $n = \sum_{j=1}^{k} z_j a_j$, und dies heißt die $(s_2, s_3, \ldots, s_k)$-*Darstellung* von n. Wir bezeichnen mit

$$\varrho_j = e_j - z_j = s_j - s_{j+1}\gamma_j + \sum_{i=j+2}^{k} s_i \beta_j^{(i)}$$

die *Reduktion* des j-ten Koeffizienten der Darstellung von n. Auch negative Reduktionen können auftreten. Die Summe der Reduktionen gibt uns den *Gewinn* $G(s_2, s_3, \ldots, s_k)$ einer Ersetzung:

$$G(s_2, s_3, \ldots, s_k) = \sum_{j=1}^{k} \varrho_j = \sum_{j=1}^{k} (e_j - z_j)\,.$$

2. Extremale asymptotische Reichweitenbasen. Für festes k und h können wir nach derjenigen Basis $A_k^*(h)$ fragen, die unter allen Basen A_k die größte h-Reichweite erzielt. Die Basis $A_k^*(h)$ braucht allerdings nicht eindeutig bestimmt zu sein. Wir nennen diese Basen *extremal* und die zugehörigen h-Reichweiten *extremale h-Reichweiten*:

$$n_h(k) = n_h(A_k^*(h)) = \max\{n_h(A_k) \mid A_k \subset \mathbb{N},\, a_1 = 1\}\,.$$

In diesem Artikel beschäftigen wir uns ausschließlich mit der Frage der extremalen Reichweiten, wenn die Elementezahl k der Basis eine feste natürliche Zahl ist, und h, also die maximale erlaubte Summandenzahl, gegen unendlich wächst. Wir fragen dann nach den Extremalbasen $A_k^*(h)$ in Abhängigkeit von h.

Für $k = 2$ und $k = 3$ ist das Problem der extremalen Reichweiten vollständig gelöst, siehe dazu Stöhr [13] und Hofmeister [2], [3] und [4]. Für $k = 4$ kennen wir nur den asymptotischen Wert der extremalen Reichweite [6], [8] und [9], während wir für $k \geq 5$ lediglich untere und obere Schranken für den Reichweitenkoeffizienten kennen (siehe [5] für $k = 5$).

Die beiden folgenden Schranken für die extremale Reichweite stammen von Rohrbach [12] und Rödseth [11]

$$n_h(k) \leq \frac{(k-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{h}{k}\right)^k + O(h^{k-1}) < \binom{h+k}{k}, \tag{3}$$

wobei die schärfere auf Rödseth zurückgeht. Stöhr [13] zeigt sogar, daß die angegebene Schranke bereits die richtige Größenordnung für die extremale Reichweite hat, daß es nämlich reelle positive Konstanten $c, C \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$c \leq \frac{n_k(A_k^*(h))}{(h/k)^k} \leq C \quad \text{mit } c \geq 1\,. \tag{4}$$

Man sieht leicht, daß bei einer Basisfolge $A_k(h)$ — nicht unbedingt eine Folge von Extremalbasen — mit (4) die einzelnen Basiselemente $a_j = a_j(h)$ von der Größenordnung h^{j-1} sein müssen. D.h. es gibt positive reelle Konstanten $a, A \in \mathbb{R}$, so daß

$$ah^{j-1} \leq a_j(h) \leq Ah^{j-1}\,. \tag{5}$$

Nur solche Basisfolgen kommen bei uns in Betracht. Für die Größen $\gamma_j = \gamma_j(h)$ aus der Normalform (2) bedeutet dies, daß es positive Konstanten $\gamma, \Gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so daß

$$\gamma h \leq \gamma_j(h) \leq \Gamma h\,. \tag{6}$$

Nun ist $\gamma_j a_j \geq a_{j+1}$, und die Koeffizienten e_j in einer regulären Darstellung (1) müssen daher immer $< \gamma_j$ sein. Also

$$0 \leq e_j < \gamma_j \leq \Gamma h \quad \text{und} \quad 0 \leq \beta_j^{(i)} < \gamma_j \leq \Gamma h\,. \tag{7}$$

Hofmeister [4] zeigt nun den folgenden

Satz 1 (Hofmeister). *Es sei $A_k(h)$ eine Basisfolge mit (4). Dann gilt für die verwendeten $(s_2, s_3, \ldots, s_k)$-Ersetzungen von allen h-darstellbaren Zahlen $n \in \mathbb{N}$, daß $0 \leq s_j \leq K$, für $j = 2, 3, \ldots, k$, wobei K eine von h unabhängige Konstante ist.*

Hauptresultat in diesem Artikel ist der folgende

Satz 2 (Kirfel). *Für feste Elementezahl k existiert der Grenzwert*

$$\lim_{h\to\infty} \frac{n_h(k)}{(h/k)^k}\,.$$

Beweis. Wir betrachten nun eine Folge $A_k^*(h)$ von Extremalbasen. Laut Hofmeisters Satz 1 wissen wir bereits, daß die Anzahl der von dieser Folge verwendeten $(s_2, s_3, \ldots, s_k)$-Ersetzungen von h unabhängig beschränkt sein muß $(0 \leq s_j \leq K)$. Wir bezeichnen diese Ersetzungen mit $\tau^{(i)} = (s_2^{(i)}, s_3^{(i)}, \ldots, s_k^{(i)})$, $i = 1, 2, \ldots, F$. Wir betrachten nun alle möglichen

Anordnungen der Gewinne $G(\tau^{(i)})$ und der Komponentenreduktionen $\varrho_j^{(i)}$:

$$(8)\quad G(\tau^{(i_1)}) \geq G(\tau^{(i_2)}) \geq \ldots \geq 0 \geq \ldots \geq G(\tau^{(i_F)}),$$
$$\varrho_j(\tau^{(l_1^{(j)})}) \geq \varrho_j(\tau^{(l_2^{(j)})}) \geq \ldots \geq 0 \geq \ldots \geq \varrho_j(\tau^{(l_F^{(j)})}) \text{ für } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Eine jede solche Anordnung nennen wir wie Braunschädel [1] eine *Struktur*. Natürlich erhalten wir nur endlich viele solche Strukturen $S_1, S_2, \ldots, S_N$.

Wir wählen nun eine Teilfolge h_m aus, so daß

$$\lim_{m\to\infty} \frac{n_{h_m}(A_k^*(h_m))}{(h_m/k)^k} = \limsup_{h\to\infty} \frac{n_h(A_k^*(h))}{(h/k)^k} = T.$$

Letzterer existiert wegen (4). Für jedes h_m gehört die entsprechende Extremalbasis $A_k^*(h_m)$ zu einer der genannten Strukturen $S_1, S_2, \ldots, S_N$. Zu einer dieser Strukturen müssen also unendlich viele Basen $A_k^*(h_m)$ gehören. Diese nennen wir S_L und wählen eine weitere Teilfolge $(h_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ aus, so daß alle $A_k^*(h_{m_l})$ zu S_L gehören. Der Einfachheit halber schreiben wir auch für diese Teilfolge h_m. Für die reguläre Darstellung der extremalen h_m-Reichweite von $A_k^*(h_m)$ schreiben wir

$$n_{h_m}(A_k^*(h_m)) = \varepsilon_k(h_m)a_k^*(h_m) + \varepsilon_{k-1}(h_m)a_{k-1}^*(h_m) + \ldots + \varepsilon_1(h_m).$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\varepsilon_k a_k^*(h_{m_l}) \leq n_{h_{m_l}}(A_k^*(h_{m_l})) &< (\varepsilon_k + 1)a_k^*(h_{m_l}) \\ &< (\varepsilon_k + 1)\gamma_{k-1}(h_{m_l})\gamma_{k-2}(h_{m_l}) \ldots \gamma_1(h_{m_l}),\end{aligned}$$

und wir haben mit $\varepsilon_k\gamma_{k-1}\gamma_{k-2}\ldots\gamma_1$ einen Ausdruck für die extremale asymptotische Reichweite gefunden.

Nur führen wir die folgenden zusätzlichen Größen $\varrho_j^{(0)}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, ein, die keiner konkreten Ersetzung entsprechen:

$$\begin{aligned}\varrho_1^{(0)} &= \gamma_1, \\ \varrho_j^{(0)} &= \gamma_j - 1, \quad \text{für} \quad j = 2, 3, \ldots, k-1, \\ \varrho_k^{(0)} &= \varepsilon_k - 1.\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Größen und der bereits bekannten Komponentenreduktionen bilden wir nun "Schlüsselzahlen", indem wir alle positiven Reduktionen $\varrho_j^{(i)}$ durchlaufen und sie zu regulären Darstellungen mit $A_k^*(h_m)$ auf die folgende Art und Weise kombinieren:

$$\sum_{j=1}^{k}(\varrho_j^{(l_j)} - 1)a_j^* \leq \varepsilon_k a_k^*.$$

(Eine solche Zahl läßt eine Darstellung mit $\tau^{(l_j)}$ nicht zu und ist in gewisser Weise maximal mit dieser Eigenschaft.) Da nun alle diese Zahlen h_m-darstellbar sind, können wir für jede eine Ersetzung τ finden, die uns die

Minimaldarstellung gibt, wo die Koeffizientensumme $\le h_m$ sein muß. Also

$$\sum_{j=1}^{k} \varrho_j^{(l_j)} - G(\tau) \le h_m + \delta\,.$$

Hier sind $\varrho_j^{(l_j)}$ und $G(\tau)$ lineare Funktionen in unseren Variablen, und die Größe δ, die den konstanten Termen in der Ungleichung entspricht, ist unabhängig von h beschränkt, weil höchstens k Einheiten von den Schlüsselzahlen herrühren und möglicherweise einige $s_j^{(i)}$ auftreten können. Für jede Schlüsselzahl erhalten wir somit eine Ungleichung

$$\sum_{j=1}^{k-1} p_j\gamma_j + p_k\varepsilon_k + \sum_{j=1}^{k}\sum_{b=j+2}^{k} p_j^{(b)}\beta_j^{(b)} \le h_m + \delta\,.$$

Das System dieser Ungleichungen zusammen mit (8) bildet dann das zu S_L *assoziierte Ungleichungssystem*. Auch (8) kann als Ungleichungssystem der Form

$$\sum_{j=1}^{k-1} q_j\gamma_j + \sum_{j=1}^{k}\sum_{b=j+2}^{k} q_j^{(b)}\beta_j^{(b)} \le \delta$$

aufgefaßt werden, wobei δ wieder eine Konstante darstellt, die unabhängig von h_m beschränkt ist.

Wir führen nun neue Variablen ein:

$$\begin{aligned} x_j &= \gamma_j/h_m\,, \qquad \text{für } j = 1,2,\dots,k-1\,,\\ x_k &= \varepsilon_k/h_m\,,\\ x_l &= \beta_j^{(b)}/h_m\,, \qquad \text{für passende } l > k\,. \end{aligned} \tag{9}$$

R bezeichne ab jetzt die Gesamtzahl der Variablen. Wir konstruieren nun das sogenannte *mit S_L assoziierte reduzierte Ungleichungssystem*, indem wir die früheren Ungleichungen durch h_m dividieren und die Konstanten weglassen. Wir nummerieren die Koeffizienten p_j, $p_j^{(b)}$, q_j und $q_j^{(b)}$ in passender Weise neu und erhalten

$$\sum_{i=1}^{R} p_i x_i \le 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{R} q_i x_i \le 0\,. \tag{10}$$

Dabei ist zu bemerken, daß es sich bei den Größen p_i und q_i durchgehend um ganze Zahlen handelt. Da wir bei der Weglassung der Konstanten möglicherweise die Bedingungen im Ungleichungssystem verschärft haben, ist gar nicht mehr sicher, ob das reduzierte Ungleichungssystem überhaupt noch Lösungen besitzt. Nun ist aber für alle $j = 1,2,\dots,k-1$ die Zahl $(\gamma_j - 1)a_j^*(h_m)$ h_m-darstellbar, aber keine Ersetzung läßt sich anwenden. Deshalb muß $\gamma_j - 1 \le h_m$ gelten, also $\gamma_j \le 2h_m$. Mit demselben Argument kann man $\varepsilon_k \le h_m$ zeigen. Wegen (7) ist auch $0 \le \beta_j^{(b)} \le \gamma_j - 1 \le h_m$, und somit $0 \le x_i \le 2$ bei allen unseren Variablen x_i, $i = 1, 2, \ldots, R$. Deshalb finden wir eine Teilfolge $(h_{m_l})_{l\in\mathbb{N}}$ von $(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$, bei der für alle $1 \le i \le R$ der Grenzwert

$$\lim_{l\to\infty} x_i(h_{m_l}) = \overline{x}_i$$

existiert. Die beiden Ungleichungen $\sum_{i=1}^R p_i x_i(h_{m_l}) \le 1 + \delta/h_{m_l}$ und $\sum_{i=1}^R q_i x_i(h_{m_l}) \le \delta/h_{m_l}$ implizieren dann aber

$$\sum_{i=1}^R p_i \overline{x}_i \le 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^R q_i \overline{x}_i \le 0\,.$$

Also gibt es Punkte in dem Simplex, der sich dem reduzierten Ungleichungssystem zuordnen läßt (nicht notwendigerweise im Inneren). Es gilt sogar

$$\overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_k = \lim_{l\to\infty} \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}\varepsilon_k/h_{m_l}^k\,.$$

Wir betrachten nun folgende Objektfunktion

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_R) = \prod_{j=1}^k x_j\,,$$

die der asymptotischen Reichweite entspricht und auf dem Simplex, der zu dem reduzierten Ungleichungssystem gehört, definiert ist. Da nun dieser Simplex im Würfel $0 \le x_i \le 2$, $1 \le i \le R$ enthalten ist, und die Nebenbedingungen allesamt nur das "$\le$" Zeichen benutzen, ist die Definitionsmenge für f kompakt. Da f stetig ist, können wir einen Maximalwert M von f in einem Punkt $\overrightarrow{x^*} = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_R^*)$ in unserem Simplex finden. Der Punkt $\overrightarrow{x^*}$ braucht dabei nicht eindeutig bestimmt zu sein.

Wegen der Existenz der Grenzwerte $\lim_{l\to\infty} x_j(h_{m_l}) = \lim_{l\to\infty} \gamma_j/h_{m_l}$ für alle $j = 1, 2, \ldots, k-1$, und weil $\lim_{l\to\infty} x_k(h_{m_l}) = \lim_{l\to\infty} \varepsilon_k/h_{m_l}$, haben wir

$$\begin{aligned}(11)\qquad M = f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_R^*) &\ge \overline{x}_1\overline{x}_2\ldots\overline{x}_k = \lim_{l\to\infty} \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{k-1}\varepsilon_k/(h_{m_l})^k \\ &= \lim_{l\to\infty} n_{h_{m_l}}(A_k^*(h_{m_l}))/(h_{m_l})^k = T/k^k\,.\end{aligned}$$

Wir versuchen nun einen *rationalen* Punkt in unserem Simplex "in der Nähe" von $\overrightarrow{x^*}$ aufzuspüren. Es ist nicht sofort offensichtlich, wie dies zu bewerkstelligen ist, da die intuitive Methode, alle Variablen x_i^* zu einer rationalen Zahl "abzurunden" möglicherweise gegen die Nebenbedingungen verstößt, weil dort auch negative Koeffizienten auftreten können.

Sei $\varepsilon > 0$. Wir werden zeigen, daß wir für festes δ und $K \in \mathbb{N}$ zu jedem $h = Kt + \delta$ eine Basis $A_k(t)$ angeben können, so daß bei dieser Basisfolge der

Vorfaktor vor $(h/k)^k$ in der Reichweitenformel $\geq T - 2\varepsilon$ ist. Wähle $\delta_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, k$, so daß

$$x_j^* - \delta_j \in \mathbb{Q} \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, k\,,$$

$$\prod_{j=1}^{k} (x_j^* - \delta_j) > M - \varepsilon\,.$$

Wir führen nun zusätzliche lineare rationale Nebenbedingungen für unsere Variablen ein:

$$x_j \geq x_j^* - \delta_j \qquad \text{für } j = 1, 2, \ldots, k\,,$$

und erhalten einen neuen nichtleeren Simplex S, der im ersteren enthalten ist. Besteht S nur aus einem einzigen Punkt, so hat dieser rationale Koordinaten, da er Schnittpunkt von linearen Gleichungen mit ganzzahligen oder rationalen Koeffizienten ist. Falls zwei Punkte in S enthalten sind, so auch wegen der Konvexität von S deren Verbindungslinie, und wir können eine Variable x_i finden, so daß die Projektion des Simplexes auf die x_i-Achse ein Intervall $[u_i, v_i]$ enthält, worin wir eine rationale Zahl b_i wählen können. Siehe dazu Abbildung 1.

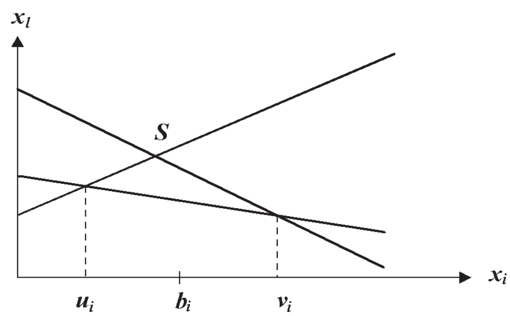

Abbildung 1

Wir betrachten nun den Schnitt der Hyperebene $x_i = b_i$ mit dem Simplex und fahren induktiv mit dieser Methode fort. So finden wir einen rationalen Punkt in S, wo $x_j = b_j \in \mathbb{Q}$, für alle Indizes $j = 1, 2, \ldots, R$, und

$$\prod_{j=1}^{k} x_j = \prod_{j=1}^{k} b_j > M - \varepsilon\,.$$

Mit Hilfe dieses rationalen Punktes werden wir nun die versprochene Basisfolge konstruieren. Es sei K der kleinste gemeinsame Nenner von $b_1, b_2, \ldots, b_R$. Die Basisfolge $A_k(t)$ ist nun folgendermaßen definiert:

$$\gamma_j = b_j K t + 1\,, \quad \beta_j^{(b)} = b_l K t \qquad \text{entsprechend der Definition (9)}\,.$$

Um die zugehörige Reichweite abzuschätzen, müssen wir von dem reduzierten Ungleichungssystem zu einem unreduzierten übergehen und aus diesem die Darstellungen der Zahlen unterhalb der Reichweite ableiten. In den Formeln für den Gewinn einer Darstellung fallen nun die konstanten Terme weg und wir erhalten für die tatsächlichen Gewinne $G(\tau)$ dieselbe Anordnung wie für die reduzierten $\tilde{G}(\tau)$, da

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \sum_{j=1}^{k} \Big(s_j - s_{j+1}\gamma_j + \sum_{b=j+2}^{k} s_b \beta_j^{(b)} \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \Big(s_j - s_{j+1}(b_j K t + 1) + \sum_{b=j+2}^{k} s_b \beta_j^{(b)} \Big) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \Big(- s_{j+1} b_j K t + \sum_{b=j+2}^{k} s_b \beta_j^{(b)} \Big) . \end{aligned}$$

Wir nehmen zunächst an, daß niemals das Gleichheitszeichen in den reduzierten Ungleichungen für die $\tilde{\varrho}_i$, die wir uns mit Hilfe der b_i ausgedrückt denken müssen, gilt. Für hinreichend großes t haben wir dann dieselbe Anordnung der tatsächlichen Reduktionen wie beim reduzierten System (10).

Betrachte nun eine positive ganze Zahl $n \leq b_k K t a_k(t)$ mit der regulären Darstellung

$$n = e_k a_k(t) + e_{k-1} a_{k-1}(t) + \ldots + e_1 .$$

Wir finden dann Indizes l_j und l_{j+1}, so daß

$$\varrho_j^{(l_j)} > e_j \geq \varrho_j^{(l_{j+1})} .$$

Zwischen der oberen und der unteren ϱ-Schranke liegen natürlich keine weiteren ϱ_j mehr, was soviel heißt, daß die Ersetzung, die bei $\sum_{j=1}^{k} (\varrho_j^{(l_j)} - 1) a_j(t)$ die Minimaldarstellung erzeugt, auch bei unserem n verwendet werden kann. Die entsprechende Ungleichung aus dem reduzierten System besagt

$$\sum_{j=1}^{k} \tilde{\varrho}_j - \tilde{G}(\tau) \leq 1 ,$$

was für $A_k(t)$ dann bedeutet, daß

$$\sum_{j=1}^{k} \varrho_j - G(\tau) \leq K t + \delta ,$$

da die γ_j Werte ja um eine Einheit erhöht worden sind. Hier ist wieder δ unabhängig von t beschränkt. Damit können wir also alle ganze Zahlen

$\leq b_k K t a_k$ mit höchstens $Kt + \delta$ Summanden darstellen, weil ja $\varrho_1^{(0)} - 1 = \gamma_1 - 1$, und $\varrho_j^{(0)} = \gamma_j - 1$, $j = 2, 3, \ldots, k-1$, die maximalen Koeffizienten in den regulären Darstellungen sind.

Sind nun einige der $\tilde{\varrho}_j$ gleich, gelte z.B. $\tilde{\varrho}_j^{(l_m^{(j)})} = \tilde{\varrho}_j^{(l_m^{(j)}+1)}$, dann können die tatsächlichen Reduktionen ϱ_j in umgekehrter Reihenfolge verglichen mit den reduzierten aus (9) auftreten, also $\varrho_j^{(l_m^{(j)})} < \varrho_j^{(l_m^{(j)}+1)}$, da die konstanten Terme unterschiedlich ausfallen können. Diese Differenz ist aber auf jeden Fall unabhängig von t beschränkt. Wurde nun e_j zwischen solchen Werten gewählt, so benutzen wir für n die Darstellung des kleineren und erhöhen die Konstante δ in $Kt + \delta$ um den möglicherweise noch fehlenden Betrag.

Aus der Definition von $A_k(t)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} n_h(A_k(t)) &\geq b_k K t a_k(t) \geq b_k K t b_{k-1} K t a_{k-1}(t) \geq \ldots \\ &\geq b_k b_{k-1} \ldots b_1 (Kt)^k . \end{aligned}$$

Setzen wir $h = Kt + \delta$, und wählen wir t so groß, daß

$$(M - \varepsilon)(Kt/(Kt + \delta))^k \geq M - 2\varepsilon ,$$

so erhalten wir

$$\frac{n_h(A_k(t))}{(h/k)^k} \geq (M - \varepsilon)(Kt/(Kt + \delta))^k k^k \geq (M - 2\varepsilon) k^k .$$

Mrose [10] zeigte, daß falls wir eine Basisfolge $A_k(t)$ für $h = Kt + \delta$ finden können, wobei $\delta, K \in \mathbb{N}$ feste positive ganze Zahlen sind und t die positiven ganzen Zahlen durchläuft, so daß die asymptotische h-Reichweite $\geq (M - 2\varepsilon)(h/k)^k$, dann ist auch

$$\liminf_{h \to \infty} \frac{n_h(A_k^*(h))}{(h/k)^k} \geq M - 2\varepsilon .$$

Hier erhalten wir also wegen (11)

$$T - 2\varepsilon k^k \leq (M - 2\varepsilon) k^k \leq \liminf_{h \to \infty} \frac{n_h(A_k^*(h))}{(h/k)^k} ,$$

und wir sind fertig, weil die Differenz zwischen

$$\limsup_{h \to \infty} n_h(A_k^*(h))/(h/k)^k \quad \text{und} \quad \liminf_{h \to \infty} n_h(A_k^*(h))/(h/k)^k$$

kleiner als jede vorgegebene Schranke gemacht werden kann.

Kolsdorf [5] zeigt wie man mit Hilfe der Kuhn–Tucker Bedingungen entscheiden kann, ob eine gefundene Basisfolge die extremale asymptotische Reichweite für die zugehörige Struktur liefert, was im konkreten Fall außerordentlich hilfreich sein kann.

Prof. E. S. Selmer möchte ich hier ganz herzlich für die außerordentlich gründliche Durchsicht des Artikels und all seine Kommentare zur Kürzung sowie zum besseren Verständnis des Textes aufs wärmste danken.

Literaturhinweise

[1] R. Braunschädel, *Zum Reichweitenproblem*, Diplomarbeit, Math. Inst., Joh. Gutenberg-Univ., Mainz 1988.
[2] G. Hofmeister, *Asymptotische Abschätzungen für dreielementige Extremalbasen in natürlichen Zahlen*, J. Reine Angew. Math. 232 (1968), 77–101.
[3] —, *Zum Reichweitenproblem*, Mainzer Seminarberichte in additiver Zahlentheorie 1 (1983), 30–52.
[4] —, *Die dreielementigen Extremalbasen*, J. Reine Angew. Math. 339 (1983), 207–214.
[5] C. Kirfel, G. Hofmeister und H. E. Kolsdorf, *Extremale Reichweitenbasen*, Inst. Rep. No. 60, Math. Inst., Univ. Bergen, 1991.
[6] C. Kirfel and S. Mossige, *The extremal asymptotic h-range for four element bases*, in Vorbereitung.
[7] H. Kolsdorf, *Reichweite fünfelementiger Mengen natürlicher Zahlen*, Dissertation, Math. Inst., Joh. Gutenberg-Univ., Mainz 1977.
[8] S. Mossige, *On the extremal h-range of the postage stamp problem with four stamp denominations*, Inst. Rep. No. 41, Math. Inst., Univ. Bergen, 1986.
[9] —, *On extremal h-bases* A_4, Math. Scand. 61 (1987), 5–16.
[10] A. Mrose, *Ein rekursives Konstruktionsverfahren für Abschnittsbasen*, J. Reine Angew. Math. 271 (1974), 214–217.
[11] Ö. Rödseth, *An upper bound for the h-range of the postage stamp problem*, Acta Arith. 54 (1990), 301–306.
[12] H. Rohrbach, *Ein Beitrag zur additiven Zahlentheorie*, Math. Z. 42 (1937), 1–30.
[13] A. Stöhr, *Gelöste und ungelöste Fragen über Basen der natürlichen Zahlenreihe, I*, J. Reine Angew. Math. 194 (1955), 40–65.

MATEMATISK INSTITUTT
UNIVERSITETET I BERGEN
ALLÉGT. 55
N-5007 BERGEN, NORWAY

Eingegangen am 21.8.1990
und in revidierter Form am 3.6.1991 (2072)