in order to estimate the second one we use (1.10). This gives

$$\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{(\chi)}\sum_{\substack{\varrho(\chi)\\ \Re\varrho<7/27}}|D_1^{\varrho}|\cdot\left|\frac{e^{\psi_1\varrho}-e^{-\psi_1\varrho}}{2\psi_1\varrho}\right|^2=\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{(\chi)}\Bigg(\sum_{\substack{|\Im\varrho|<D_1\\ \Re\varrho<7/27}}+\sum_{\substack{|\Im\varrho|\geqslant D_1\\ \Re\varrho<7/27}}\Bigg)$$

$$\leqslant c_{25}\left(\frac{D_1^{7/27}}{\varphi(k)}\cdot N\left(\tfrac{20}{27},D_1\right)+\frac{D_1^{7/27}}{\varphi(k)}\int_{D_1}^{\infty}\frac{1}{\psi_1^2}\cdot\frac{dN\left(\frac{20}{27},x\right)}{x^2}\right)$$

$$\leqslant c_{26}\left(\frac{D_1^{7/27}}{\varphi(k)}\cdot k^{28/27}\cdot D_1^{56/81}\log^8 D_1+\frac{D_1^{2+7/27}}{\varphi(k)}\int_{D_1}^{\infty}\frac{N\left(\frac{20}{27},x\right)}{x^3}\,dx\right)$$

$$\leqslant c_{27}\left(D_1^{80/81}\log^9 D_1+D_1^{2+7/27}\log D_1\int_{D_1}^{\infty}\frac{\log^8 x}{x^{187/81}}\,dx\right)\leqslant c_{28}D_1,$$

so that by Lemma 3, (3.2)

$$\min_{h\leqslant j\leqslant N_1}|b_1+b_2+\ldots+b_j|>c_{29}D_1\log D_1,$$

and finally

$$|S_1|>T^{7/27}\cdot\exp\left(-3\frac{\log T}{\log\log T}\right).$$

Hence by (5.3) and (5.4) we obtain *a fortiori* (5.1).

References

[1] S. Knapowski, *On prime numbers in an arithmetical progression*, Acta Arithm. 4 (1958), pp. 57-70.

[2] — *On an explicit lower estimate in prime number theory*, Journal of the London Math. Soc. 34 (1959), pp. 437-441.

[3] D. H. Lehmer, *On the roots of the Riemann zeta-function*, Acta Math. 95, (1956), pp. 291-298.

[4] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.

[5] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

Reçu par la Rédaction le 14. 7. 1960

ACTA ARITHMETICA
VI (1961)

Über die Umkehrung eines Satzes von Ingham

by

W. Staś (Poznań)

1. Ich versuche in dieser Arbeit, zwei Fragen zu beantworten, die Herr Professor P. Turán mir gestellt hat. Die erste Frage betrifft die Möglichkeit der Umkehrung eines bekannten Satzes von A. E. Ingham, die zweite Frage betrifft den Einfluß den das Erdös-Selbergsche Restglied im Primzahlsatz auf die Nullstellenfreiheit der Riemannschen ζ-Funktion ausüben kann. Ich habe eine teilweise Umkehrung des Inghamschen Satzes gefunden. Es hat sich gezeigt, daß man den Umkehrungssatz sogar so weit ausziehen kann, daß er insbesondere eine positive Antwort auf die zweite Frage liefert. Denn das Erdös-Selbergsche Restglied liegt eigentlich außerhalb der Anwendungsmöglichkeit des Satzes von Ingham.

A. E. Ingham hat folgenen Satz bewiesen ([2], S. 60-65):

Wenn die Riemannsche ζ-Funktion keine Nullstellen in dem Gebiet

(1.1) $$\sigma>1-\eta(|t|)$$

besitzt, wo $\eta(t)$ für $t\geqslant 0$ eine abnehmende Funktion ist, die eine stetige Ableitung $\eta'(t)$ hat und folgende Bedingungen erfüllt:

(1.2) $$0<\eta(t)\leqslant\tfrac{1}{2},$$

(1.3) $$\eta'(t)\to 0,\quad t\to\infty$$

(1.4) $$\frac{1}{\eta(t)}=O(\log t),\quad t\to\infty$$

und wenn a eine Zahl aus dem Intervall $0<a<1$ bezeichnet, dann gilt die folgende Abschätzung des Restgliedes im Primzahlsatz

(1.5) $$\Delta(x)=\sum_{n\leqslant x}\Lambda(n)-x=O(xe^{-\frac{1}{2}a\,\omega(x)})$$

und

$$\omega(x) = \min_{t\geqslant 1}\{\eta(t)\log x + \log t\}. \tag{1.6}$$

Ich werde mit Turánschen Methoden den folgenden Satz zeigen:

SATZ I. *Sei $\eta_1(\tau)$ eine für $\tau \geqslant 0$ stetige und abnehmende Funktion und sei α eine Zahl aus dem Intervall $0 < \alpha < 1$. Die Funktion $\eta_1(\tau)$ besitze folgende Eigenschaften:*

$$0 < \eta_1(\tau) \leqslant \tfrac{1}{2}, \tag{1.7}$$

$$\eta_1(\tau) < A_\alpha, \quad A_\alpha = \left(4\alpha\log\frac{3\cdot 10^3}{\alpha}\right)^{-1}, \quad \tau > c_1(\alpha). \tag{1.8}$$

$$\textit{Wenn}\quad \frac{1}{\eta_1(\tau)} = O(\log\tau) \quad \textit{dann} \quad \alpha\eta_1(\tau)\log\frac{1}{\eta_1(\tau^2)} \leqslant 1, \quad \tau > c_2(\alpha). \tag{1.9}$$

Sei außerdem $\omega_1^{-1}(x)$ die Umkehrungsfunktion von

$$\omega_1(x) = \min_{\tau\geqslant 1}\{\eta_1(\tau)\log x + \log\tau\} \tag{1.10}$$

und sei

$$|\Delta(x)| \leqslant c_3 x e^{-\frac{1}{4}\alpha\omega_1(x)}. \tag{1.11}$$

Dann ist $\zeta(s) \neq 0$ in dem Bereich

$$\sigma > 1 - \frac{1}{400}\cdot\frac{\log t}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{4/\alpha})}, \quad t \geqslant \max\big(c_4, c_5(\alpha)\big). \tag{1.12}$$

Wenn man eine Abschätzung von $\omega_1^{-1}(x)$ durchführt, so folgt aus diesem Satz:

SATZ I'. *Bei den Voraussetzungen des vorigen Satzes, hat die Riemannsche ζ-Funktion keine Nullstellen in dem Gebiet*

$$\sigma > 1 - \frac{\alpha}{(40)^2}\,\eta_1(t^{4/\alpha}), \quad t > \max\big(c_6, c_7(\alpha)\big). \tag{1.13}$$

P. Turán selbst, hat den Fall $\eta_1(\tau) = 1/\log^\vartheta\tau$ $(0 < \vartheta \leqslant 1)$ bewiesen (siehe [4], Satz XXXVII).

2. Als das bedeutendste Ereignis der neueren Zeit in der Entwicklung der analytischen Zahlentheorie darf wohl der durch Erdös und Selberg geleistete elementare Beweis des Primzahlsatzes bezeichnet werden ([1], [3]).

Wie bekannt, ist die beste auf dem elementaren Weg gefundene Abschätzung des Restgliedes, die folgende

$$\Delta(x) = O\left(\frac{x}{\log^{1/10}x}\right), \quad x\to\infty. \tag{2.1}$$

Wenn man Satz I bzw. Satz I' auf das Restglied (2.1) anwendet, bekommt man einfach:

SATZ II. *Bei* (2.1), *hat die Riemannsche ζ-Funktion keine Nullstellen in dem Gebiet*

$$\sigma > 1 - \frac{1}{400}\cdot\frac{\log t}{t^{20}}, \quad t > c_8. \tag{2.2}$$

Es ist ja merkwürdig, daß das Erdös-Selbergsche Restglied im Primzahlsatz, doch ein nichttriviales nullstellenfreihes Gebiet für $\zeta(s)$ nach sich zieht.

G. H. Hardy behauptete einmal, daß der elementare Beweis des Primzahlsatzes, die Entscheidung der Riemannschen Vermutung mit sich bringen wird. Der Satz II zeigt aber, das sich die Hardysche Behauptung nur in sehr geringem Masse bestätigt hat.

Die Bedingungen (1.8), (1.9) könnten einfacher durch

$$\eta_1(\tau) \leqslant \frac{1}{\log\log\tau}, \quad \tau > c_9 \tag{2.3}$$

ersetzt werden. Bei (2.3) mußte aber $\eta_1(\tau)$ notwendig zu Null streben, was der Allgemeinheit halber, unvorteilhaft wäre.

Die Bedingungen (1.8), (1.9) bzw. (2.3) bringen eine Abschwächung unserer Umkehrung des Inghamschen Satzes. Wir nutzen aber die Inghamschen Bedingungen (1.3) und (1.4) nich aus.

3. Wir zeigen jetzt folgendes Lemma:

LEMMA. *Sei $\omega_1(x)$ die mit* (1.10) *definierte Funktion und sei $\omega_1^{-1}(x)$ ihre Umkehrungsfunktion. Es gilt dann*

$$\omega_1^{-1}(x) = \max_{\tau\geqslant 1}\left(\frac{1}{\tau}e^x\right)^{1/\eta_1(\tau)} \overset{\mathrm{df}}{=} \varphi(x). \tag{3.1}$$

Beweis. $\omega_1(x)$ is eine für $x > 0$ streng wachsende Funktion, die für $x > 1$ die Ungleichung

$$0 < \omega_1(x) < \log x \tag{3.2}$$

erfüllt ([2], S. 64). Wir zeigen jetzt, daß für jedes $x > 0$ ist

$$\omega_1\big(\varphi(x)\big) \geqslant x.$$

Es gilt nach (1.10)

$$\omega_1(\varphi(x)) = \min_{t\geqslant 1}\{\eta_1(t)\log\varphi(x)+\log t\}.$$

Es bezeichne t_0 die Zahl für welche das Minimum erreicht ist. Dann hat man nach (3.1)

$$\omega_1(\varphi(x)) = \eta_1(t_0)\log\left(\max_{\tau\geqslant 1}\left(\frac{1}{\tau}e^x\right)^{1/\eta_1(\tau)}\right)+\log t.$$

Wir wählen jezt $\tau = t_0$. Daraus folgt

$$\omega_1(\varphi(x)) \geqslant \eta_1(t_0)\log\left(\frac{1}{t_0}e^x\right)^{1/\eta_1(t_0)}+\log t_0 = -\log t_0+x+\log t_0 = x.$$

Man kann auch leicht zeigen daß $\omega_1(\varphi(x)) \leqslant x$. Damit ist unser Lemma Vollständig bewiesen.

4. Zum Beweis des Satzes I, betrachte man die Polynome (vergl. [4], S. 151)

$$f_{N_1N_2}(t) = \sum_{N_1\leqslant n\leqslant N_2}\Delta(n)e^{-it\log n}, \quad t>0. \tag{4.1}$$

Da aus der Definition von $\Delta(x)$, für $n>1$

$$\Delta(n) = 1+(\Delta(n)-\Delta(n-1)),$$

so folgt

$$|f_{N_1N_2}(t)| \leqslant \Big|\sum_{N_1\leqslant n\leqslant N_2}e^{-it\log n}\Big|+\Big|\sum_{N_1\leqslant n\leqslant N_2}(\Delta(n)-\Delta(n-1))e^{-it\log n}\Big| = I_1+I_2. \tag{4.2}$$

Wenn N_1 und N_2 z. B. gnze Zahlen >1 bedeuten, folgt nach partieller Summation

$$I_2 \leqslant |\Delta(N_1-1)|+|\Delta(N_2)|+\sum_{n=N_1}^{N_2-1}|\Delta(n)||1-e^{-it\log(1+1/n)}|. \tag{4.3}$$

Es sei t so groß, daß mit dem obigen c_3 und a

$$1+t^2 \leqslant \omega_1^{-1}(\log t^{4/a}) \tag{4.4}$$

ist. Das ist möglich weil wegen (3.2)

$$\omega_1(1+t^2) < \log(1+t^2) < \log t^{4/a}$$

gilt. Es sei N_1, N_2 so groß, daß

$$\omega_1^{-1}(\log t^{4/a}) \leqslant \tfrac{1}{2}N < N_1 < N_2 \leqslant N. \tag{4.5}$$

Dann ist also

$$I_2 < c_1(N_1-1)e^{-\frac{1}{2}a\omega_1(N_1-1)}+c_1N_2e^{-\frac{1}{2}a\omega_1(N_2)}+ + c_1e^{-\frac{1}{2}a\omega_1(N/2)}\sum_{n=N_1}^{N_2}n|1-e^{-it\log(1+1/n)}| < c_2Nte^{-\frac{1}{2}a\omega_1(N/2)}.$$

Da aus (4.5)

$$\frac{1}{t^2} \geqslant \exp\{-\tfrac{1}{2}a\omega_1(N/2)\},$$

folgt aus dem vorigen

$$I_2 < c_{10}\frac{N}{t}. \tag{4.6}$$

Man kann zeigen (vergl. [4] Seite 153) daß

$$I_1 < c_{11}\left(\frac{N}{\sqrt{1+t^2}}+\sqrt{1+t^2}\right);$$

also nach (4.4), (4.5)

$$I_1 = \Big|\sum_{N_1\leqslant n\leqslant N_2}e^{-it\log n}\Big| < c_{12}\frac{N}{t}.$$

Aus diesem und (4.2) folgt

$$|f_{N_1N_2}(t)| \leqslant c_{13}\frac{N}{t}, \tag{4.7}$$

wenn nur (4.4) und (4.5) erfüllt ist.

Für $\sigma>1$ gibt eine partielle Summation aus (4.7) unter derselben Einschränkung von N und t

$$\Big|\sum_{N_1\leqslant n\leqslant N_2}\frac{\Delta(n)}{n^s}\Big| < c_{14}\frac{N^{1-\sigma}}{t}. \tag{4.8}$$

5. Sei

$$\eta \geqslant \omega_1^{-1}(\log t^{4/a}). \tag{5.1}$$

Wir wenden (4.8) mit

$$N_1 = \eta\cdot 2^j, \quad N_2 = \eta\cdot 2^{j+1}; \quad j = 0,1,2,\ldots$$

an. Dann folgt

$$\Big|\sum_{n\geqslant\eta}\frac{\Delta(n)}{n^s}\Big| < \frac{c_{14}'\eta^{1-\sigma}}{t(\sigma-1)}. \tag{5.2}$$

Sei endlich

$$(5.3)\qquad \xi \geqslant \omega_1^{-1}(\log t^{4/\alpha})$$

und k eine positive ganze Zahl. Wenn wir (5.2) so wie in [4], S. 154 behandeln, bekommen wir

$$(5.4)\qquad \Big|\sum_{n\geqslant\xi}\frac{\Lambda(n)}{n^s}\log^{k+1}\frac{n}{\xi}\Big| < \frac{c_{15}}{t(\sigma-1)}\cdot\frac{(k+1)!\,\xi^{1-\sigma}}{(\sigma-1)^{k+1}}.$$

Aus dem Satz [4], S. 190 folgt, daß dann

$$(5.5)\qquad \Big|\frac{\xi^{1-s}}{(1-s)^{k+2}}-\sum_{\varrho}\frac{\xi^{\varrho-s}}{(\varrho-s)^{k+2}}\Big| \leqslant c_{16}\Big(\frac{\log(2+t)}{\xi}+\frac{\xi^{1-\sigma}}{t(\sigma-1)^{k+2}}\Big)$$

ist. Wenn nun

$$(5.6)\qquad 1<\sigma\leqslant\tfrac{3}{2},\qquad t\geqslant 2,$$

dann folgt aus (5.6) und (5.3)

$$\xi^{2-\sigma}\geqslant\sqrt{\xi}>t;$$

d. h.

$$\frac{\xi^{1-\sigma}}{t}>\frac{1}{\xi}.$$

Es folgt aus (5.5) unsere Ausgangsformel

$$(5.7)\qquad \Big|\sum_{\varrho}\frac{\xi^{\varrho-s}}{(s-\varrho)^{k+2}}\Big| < c_{17}\frac{\xi^{1-\sigma}\log t}{t(\sigma-1)^{k+2}}.$$

6. Wenn unsere Behauptung (1.12) falsch wäre, dann gäbe es unendlich viele

$$\varrho^*=\sigma^*+it^*,\qquad t^*\to\infty$$

Nullstellen mit

$$(6.1)\qquad \sigma^*>1-\frac{1}{400}\cdot\frac{\log t^*}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/\alpha})}.$$

Wir können gleich

$$(6.2)\qquad t^*>e^{20}$$

voraussetzen. Jetzt wenden wir die Ausgangsungleichung (5.7) mit

$$(6.3)\qquad s=s_1=1+\frac{1}{10}\cdot\frac{\log t^*}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/\alpha})}+it^*\equiv\sigma_1+it^*,$$

und außerdem mit

$$(6.4)\qquad \lambda=10\,\frac{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/\alpha})}{\log t^*},$$

$$(6.5)\qquad \xi=e^{(k+2)\lambda},$$

an, wo k ganz ist und

$$(6.6)\qquad \log t^*\leqslant k+2\leqslant\tfrac{54}{40}\log t^*.$$

Dann ist (5.3) offensichtlich erfüllt. Dasselbe gilt für (4.4). Endlich folgt aus der Definition von σ_1 nach (6.3), daß $1<\sigma_1\leqslant\frac{3}{2}$ auch erfüllt ist. Wir haben nämlich

$$\frac{1}{10}\cdot\frac{\log t^*}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/\alpha})}\leqslant\frac{1}{2},$$

weil wegen (3.2)

$$\omega_1(t^{*1/5})\leqslant\log t^{*1/5}\leqslant\log t^{*4/\alpha},$$

gilt. Unsere Ausgangsformel (5.7) ist also mit $s=s_1$ wirklich anwendbar. Beiderseits mit

$$|\xi^{s_1-\varrho^*}(s_1-\varrho^*)^{k+2}|=\xi^{\sigma_1-\sigma^*}(\sigma_1-\sigma^*)^{k+2}$$

multiplizierend, gelangen wir zu

$$(6.7)\qquad \Big|\sum_{\varrho}\xi^{\varrho-\varrho^*}\Big(\frac{s_1-\varrho^*}{s_1-\varrho}\Big)^{k+2}\Big| < c_{17}\frac{\xi^{1-\sigma^*}\log t^*}{t^*}\Big(\frac{\sigma_1-\sigma^*}{\sigma_1-1}\Big)^{k+2}.$$

Da

$$\Big(\frac{\sigma_1-\sigma^*}{\sigma_1-1}\Big)^{k+2}=\Big(1+\frac{1-\sigma^*}{\sigma_1-1}\Big)^{k+2},$$

folgt also nach (6.1) und (6.3)

$$\Big(\frac{\sigma_1-\sigma^*}{\sigma_1-1}\Big)^{k+2}<\Big(\frac{41}{40}\Big)^{k+2}<e^{(k+2)/40},$$

woraus wegen (6.6)

$$\Big(\frac{\sigma_1-\sigma^*}{\sigma_1-1}\Big)^{k+2}<t^{*11/320}$$

ist. Es folgt also aus (6.7)

$$(6.8)\qquad \Big|\sum_{\varrho}\xi^{\varrho-\varrho^*}\Big(\frac{s_1-\varrho^*}{s_1-\varrho}\Big)^{k+2}\Big| < c_{18}\frac{\xi^{1-\sigma^*}\log t^*}{(t^*)^{309/320}}.$$

Durch Abspaltung der Teilsummen für welche

$$|t_\varrho - t^*| > 6(\sigma_1 - \sigma^*), \qquad \sigma_\varrho < 1 - 3(\sigma_1 - \sigma^*)$$

ist, gelangen wir zu

$$(6.9) \qquad |V| \equiv \Bigg| \sum_{\substack{\varrho \\ |t_\varrho - t^*| \leqslant 6(\sigma_1 - \sigma^*) \\ \sigma_\varrho \geqslant 1 - 3(\sigma_1 - \sigma^*)}} \left(e^{\lambda(\varrho - \varrho^*)} \frac{s_1 - \varrho^*}{s_1 - \varrho}\right)^{k+2} \Bigg| < c_{19} \frac{\xi^{1-\sigma^*} \log t^*}{(t^*)^{309/320}}.$$

7. Um $|V|$ von unten abzuschätzen, wenden wir den folgenden Satz von Turán an ([4], Satz X, S. 52)

Für $m > 0$, $k \leqslant N$ und

$$|z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \ldots \geqslant |z_k|, \qquad |z_1| \geqslant 1$$

und für beliebige komplexe Zahlen b_j gibt es eine ganze Zahl ν so daß

$$m \leqslant \nu \leqslant m + N$$

und

$$(7.1) \qquad |l_1 z_1^\nu + l_2 z_2^\nu + \ldots + l_k z_k^\nu| \geqslant \left(\frac{1}{48c^2} \cdot \frac{N}{2N + m}\right)^N \min_{1 \leqslant j \leqslant k} |l_1 + \ldots + l_j|.$$

Die Rolle der Zahlen z_j spielen die Größen

$$e^{\lambda(\varrho - \varrho^*)} \frac{s_1 - \varrho^*}{s_1 - \varrho},$$

welche die Bedingung $\max |z_j| \geqslant 1$, offenbar erfüllen. Es sei

$$(7.2) \qquad m = \log t^*.$$

Zur Angabe von N müssen wir die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ im Gebiet

$$(7.3) \qquad \sigma \geqslant 1 - 3(\sigma_1 - \sigma^*), \qquad |t - t^*| \leqslant 6(\sigma_1 - \sigma^*)$$

von oben abschätzen. Wir wenden folgendes Lemma an ([4], S. 187).

Sei $s_0 = 1 + \mu + it'$, $0 \leqslant \mu \leqslant \frac{1}{40}$, $R = 16\mu$, $t' \geqslant 10$. Es bezeichne N die Anzahl der Nullstellen von $\zeta(s)$ in dem Kreis $|z - s_0| \leqslant \frac{1}{2}R$. Dann gilt

$$(7.4) \qquad N < \tfrac{25}{2} \mu \log t' + c_{20} \log\log t'.$$

Wir setzen

$$\mu = \frac{1}{10} \cdot \frac{\log t^*}{\log \omega_1^{-1} (\log t^{*4/\alpha})}, \qquad s_0 = \sigma_1 + it^*$$

an. Dieses Lemma ist hier anwendbar, da die größte Entfernung d eines Punktes des Gebietes (7.2) von s_0

$$d = |(\sigma_1 - 1) + 3(\sigma_1 - \sigma^*) + i6(\sigma_1 - \sigma^*)|$$

ist und wegen

$$1 - \sigma^* \leqslant \frac{1}{40} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{\log t^*}{\log \omega_1^{-1} (\log t^{*4/\alpha})} \leqslant \frac{1}{40} (\sigma_1 - 1)$$

und

$$\sigma_1 - \sigma^* = (\sigma_1 - 1) + (1 - \sigma^*) \leqslant \tfrac{41}{40} (\sigma_1 - 1)$$

ist diese Distanz

$$d < (\sigma_1 - 1) |1 + \tfrac{123}{40} + i \tfrac{246}{40}| < 8(\sigma_1 - 1) = 8\mu.$$

Folglich können wir nach (7.4)

$$N = 13\mu \log t^* + c_{20} \log\log t^*$$

wählen. Das Intervall $(m, m+N)$ ist in (6.6) enthalten, da

$$N < \tfrac{14}{40} \log t^*.$$

Wenn wir nun $(k+2)$ aus dem Turánschen Satz bestimmen und beachten, daß

$$N < \tfrac{14}{40} m, \qquad \frac{N}{m + 2N} > \frac{N}{3m},$$

so ergibt sich für $t^* \geqslant c_{21}$

$$(7.5) \qquad |V| \geqslant \left(\frac{1}{96e^2} \cdot \frac{\frac{13}{10} \cdot \frac{(\log t^*)^2}{\log \omega_1^{-1} (\log t^{*4/\alpha})} + c_{20} \log\log t^*}{\log t^*}\right)^{\frac{13}{10} \cdot \frac{\log t^*}{\log \omega_1^{-1} (\log t^{*4/\alpha})} + c_{20} \log\log t^*}.$$

8. Um $|V|$ von unten weiter abzuschätzen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden:

$$(8.1) \qquad 0 < \eta_1(\tau) \leqslant \frac{1}{\log \tau}, \qquad \tau > c_{21}$$

und

$$(8.2) \qquad \frac{1}{\log \tau} \leqslant \eta_1(\tau), \qquad \tau > c_{22}.$$

Im zweiten Fall, fangen wir mit der Abschätzung

$$(8.3)\qquad |V| \geqslant \left(\frac{13}{960e^2}\cdot\frac{\log t^*}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/a})}\right)^{\frac{13}{10}\cdot\frac{(\log t^*)^2}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/a})}+c_{20}\log\log t^*}$$

an. Aus (3.1) folgt aber daß einerseits

$$(8.4)\qquad \frac{\log t^*}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/a})} \leqslant \frac{a}{2}\,\eta_1(t^{*2/a})$$

und andererseits

$$(8.5)\qquad \frac{\log t^*}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/a})} \geqslant \frac{a}{4}\,\eta_1(t^{*4/a})$$

ist. Wir haben nämlich nach (3.1)

$$(8.6)\qquad \omega_1^{-1}(\log t^{*4/a}) = \max_{\tau\geqslant 1}\left(\frac{t^{*4/a}}{\tau}\right)^{1/\eta_1(\tau)}.$$

Wenn man $\tau = t^{*2/a}$ einsetzt, bekommt man

$$\omega_1^{-1}(\log t^{*4/a}) \geqslant (t^{*2/a})^{1/\eta_1(t^{*2/a})}$$

also ist (8.4) gültig. Um (8.5) zu zeigen, nehmen wir wieder (8.4) in Betracht. Es ist klar, daß das Maximum aus (8.6) in dem Intervall

$$1 \leqslant \tau \leqslant t^{*4/a}$$

liegen muß. Die Funktion $1/\eta_1(\tau)$ ist doch wachsend und sogar $1/\eta_1(\tau) \geqslant 2$, für $\tau \geqslant 0$. Deswegen hat man sicher die Abschätzung

$$\max_{\tau\geqslant 1}\left(\frac{t^{*4/a}}{\tau}\right)^{1/\eta_1(\tau)} \leqslant (t^{*4/a})^{1/\eta_1(t^{*4/a})},$$

und daraus folgt wirklich (8.5). Aus (8.3), wegen (8.4) und (8.5), folgt

$$(8.7)\qquad |V| \geqslant \left\{\frac{13}{960e^2}\cdot\frac{a}{4}\,\eta_1(t^{*4/a})\right\}^{\frac{13}{10}\cdot\frac{a}{2}\eta_1(t^{*2/a})\log t^* + c_{20}\log\log t^*}$$

$$= \left(\frac{13a}{4\cdot 960\cdot e^2}\right)^{(\dots)}\left(\eta_1(t^{*4/a})\right)^{(\dots)} = V_1V_2.$$

Es ist aber

$$V_2 = \exp\left(-\tfrac{13}{20}\,a\log t^*\,\eta_1(t^{*2/a})\log\frac{1}{\eta_1(t^{*4/a})} - c_{20}\log\log t^*\log\frac{1}{\eta_1(t^{*4/a})}\right)$$

($\exp x = e^x$). Wegen (1.9) und (8.2), für $t^* > \max(c_{23}, c_2(a), e^{4/a}) = T_1$ gilt

$$(8.8)\qquad V_2 \geqslant \exp\left(-\tfrac{13}{20}\log t^* - c_{24}(\log\log t^*)^2\right).$$

Für den ersten Faktor hat man

$$V_1 = \exp\left(-\tfrac{13}{20}\,a\log t^*\,\eta_1(t^{*2/a})\log\frac{960\cdot 4\cdot e^2}{13\cdot a} - c_{20}\log\log t^*\log\frac{960\cdot e^2\cdot 4}{13a}\right).$$

Nach (1.8) gilt aber, für $t^* > \max(c_{25}, c_1(a)) = T_2$,

$$a\eta_1(t^{*2/a})\log\frac{960\cdot 4\cdot e^2}{13a} \leqslant \frac{1}{4}$$

und endlich für $t^* > \max\left(\exp\left(\frac{3\cdot 10^3}{a}\right), T_2\right) = T_3$

$$(8.9)\qquad V_1 \geqslant \exp\left(-\tfrac{13}{80}\log t^* - c_{27}(\log\log t^*)^2\right).$$

Aus (8.7), (8.8) und (8.9) hat man endlich für $t^* \geqslant \max(T_1, T_3) = T_4$

$$(8.10)\qquad |V| \geqslant \exp\left(-\left(\frac{13}{20}+\frac{13}{80}\right)\log t^* - c_{28}(\log\log t^*)^2\right) \geqslant \frac{1}{t^{*131/160}}.$$

Durch Vergleich der beiden Abschätzungen (6.9) und (8.10) für $t^* > (c_{29}(a), T_4)$ folgt endlich

$$\xi^{1-\sigma^*} > t^{*9/64}$$

Bei Berücksichtigung von (6.5), (6.4) und (6.6) hat man

$$\tfrac{9}{64}\log t^* < (1-\sigma^*)\log\xi = (1-\sigma^*)(k+2)\lambda \leqslant (1-\sigma^*)\tfrac{54}{4}\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/a})$$

und hieraus

$$1-\sigma^* \geqslant \frac{1}{96}\cdot\frac{\log t^*}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/a})},$$

was der Annahme (6.1) widerspricht.

Kehren wir jetzt zum Fall (8.1). Erfüllt $\eta_1(\tau)$ die Bedingung (8.1), dann gilt wegen (8.4) für $t^* > c_{30}$

$$\frac{13}{10}\cdot\frac{(\log t^*)^2}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/a})} < \frac{13}{10}\cdot\frac{a}{2}\log t^*\,\eta_1(t^{*2/a})$$

$$< \frac{13}{10}\cdot\frac{a}{2}\log t^*\frac{1}{\log t^{*2/a}} \leqslant c_{20}\log\log t^*.$$

Daraus hat man aus (7.5) für $t^* > c_{31}$

$$|V| \geqslant \left(\frac{1}{\log t^*}\right)^{c_{32}\log\log t^*} = e^{-c_{32}(\log\log t^*)^2}.$$

Mit Berücksichtigung von (6.9) ist weiter

$$c_{19}\,\frac{\xi^{1-\sigma^*}\log t^*}{(t^*)^{309/320}} > \frac{1}{e^{c_{32}(\log\log t^*)^2}} > \frac{\log t^*}{t^{*1/320}}.$$

Also endlich

$$\xi^{1-\sigma^*} > t^{*19/20}$$

und nach (6.5), (6.4), (6.6), ist

$$\tfrac{19}{20}\log t^* < (1-\sigma^*)\log\xi = (1-\sigma^*)(k+2)\lambda \leqslant (1-\sigma^*)\tfrac{54}{4}\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/\alpha}).$$

Daraus folgt

$$1-\sigma^* \geqslant \frac{19}{270}\cdot\frac{\log t^*}{\log\omega_1^{-1}(\log t^{*4/\alpha})},$$

was der Annahme (6.1) widerspricht. Damit ist unser Satz bewiesen. Um Satz I′ zu bekommen, genügt es nur die Abschätzung (8.5) auf (1.12) anzuwenden.

Die Abschätzung in (8.5) ist eigentlich ganz grob. Es muß so sein, weil wir zu wenig von der Funktion $\eta_1(\tau)$ angenommen haben. Wenn wir die Methoden der Differentialrechnung auf die Abschätzung von (3.1) bzw. (8.6) anwenden wollen, dann zeigt sich, dass die Lokalisation des Maximums in (8.6), von dem, wie schnell die Ableitung $\eta_1'(\tau)$ zu Null strebt abhängen muß. Auf diesem Weg könnte man eine Verbesserung von (1.13) erwarten, jedoch auf Kosten zusätzlicher Bedingungen für die Funktion $\eta_1(\tau)$.

Literaturverzeichnis

[1] P. Erdös, *On new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc, Nat. Acad. Sci. USA 35 (1949), S. 374-384.

[2] A. E. Ingham, *The distribution of prime numbers*, Cambridge 1932.

[3] A. Selberg, *An elementary proof of the prime-number theorem*, Ann. Math. Princeton, II. 50 (1949), S. 305-313.

[4] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen* Budapest 1953.

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
ADAM MICKIEWICZ UNIVERSITÄT IN POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 22. 8. 1960

ACTA ARITHMETICA
VI (1961)

The easier Waring problem in algebraic number fields

by

ROSEMARIE M. STEMMLER* (Urbana, Ill.)

I. Introduction. Let K be an algebraic number field of degree n, $n = n_1+2n_2$, and J its ring of integers. Let $K^{(1)}, K^{(2)}, \ldots, K^{(n)}$ be the n conjugate fields of K, $K^{(r)}$ $(r = 1, 2, \ldots, n_1)$ being real and $K^{(r)}$, $K^{(r+n_2)}$ $(r = n_1+1, \ldots, n_1+n_2)$ being conjugate complex. Let J_m be the group generated under addition by the m-th powers of the integers of K, where $m \geqslant 2$. Actually J_m is a ring. We define $v(m; K)$ as the least value of s for which every integer ν in J_m is representable in the form

$$\nu = \pm\lambda_1^m \pm \lambda_2^m \pm \ldots \pm \lambda_s^m,$$

where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ are integers of K. By the easier Waring problem we mean the problem of determining $v(m; K)$.

If there exists an identity

$$\sum_{k=1}^{r} e_k(a_k x + b_k)^m = cx + d, \quad c \neq 0, \quad e_k = \pm 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

with rational integral coefficients, we see that J_m consists of certain residue classes modulo c. We let $\Delta_K(m, c)$ be the least value of s such that every member of J_m is congruent modulo c to an integer of the form $\pm\lambda_1^m \pm \ldots \pm \lambda_s^m$, where $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ are integers in K. Then clearly

$$v(m; K) \leqslant r + \Delta_K(m, c).$$

From the $(m-1)$-th difference of x^m we have

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^{m-1-k}\binom{m-1}{k}(x+k)^m = m!\,x + \tfrac{1}{2}(m-1)\,m!,$$

* Doctoral dissertation, University of Illinois, Urbana, Illinois. This research was supported by the U. S. Office of Naval Research. Thanks are due to Professor P. T. Bateman for his help and encouragement.