ACTA ARITHMETICA
VI (1961)

Über die Dichte der Nullstellen der Dirichletschen L-Funktionen

von

W. Staś (Poznań)

1. Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis eines Satzes über die Dichte der Nullstellen aller Dirichletschen L-Funktionen in der Nähe von der Gerade $\sigma = 1$.

Dieser Satz entspricht der Schärfe der Abschätzung nach, dem bekannten Satz von P. Turán, über die Dichte der Nullstellen der Riemannschen ζ-Funktion ([5], Satz XXXVIII).

Bezeichnen wir mit $N(\vartheta, T)$ die Gesammtzahl der Nullstellen aller $\varphi(k)$, L-Funktionen $\operatorname{mod} k$ $(k \geqslant 1)$ im Bereich $\sigma \geqslant \vartheta$, $\frac{1}{2} \leqslant \vartheta < 1$, $0 < t \leqslant T$ jede mit ihrer Vielfachheit gezählt. Wir werden den folgenden Satz zeigen:

Satz. *Für geeignete positive numerische b, c_1 und c_2 Konstanten gilt für*

$$1 - \min(b, 1/k^{40}) \leqslant \vartheta \leqslant 1 \tag{1.1}$$

und

$$T > \max(c_1, \exp\exp k^3) \tag{1.2}$$

die Abschätzung

$$N(\vartheta, T) < c_2 k^6 T^{2(1-\vartheta)+(1-\vartheta)^{1,08}} \log^8(kT). \tag{1.3}$$

2. Zum Beweis des Satzes (1.2) benutze ich die folgenden Sätze aus der Theorie der Dirichletschen $L(s, \chi)$-Funktionen:

I. *Sei $N(T)$ die Anzahl der Nullstellen aller $L(s, \chi)$, $\chi \operatorname{mod} k$ in* $0 \leqslant \sigma < 1$, $|t| \leqslant T$.

Es gilt für $k \geqslant 1$, $T \geqslant 0$

$$N(T+1) - N(T) < c_3 k \log k(T+2), \tag{2.1}$$

wo c_3 eine numerische Konstante ist ([2], Satz 3.3, S. 220).

II. *Sei* $m \geqslant 2$ *ganz. Es gibt eine Folge von Zahlen* T_m *mit* $m < T_m < m+1$, *für welche gilt*

$$\left|\sum_{\chi} \frac{L'}{L}(\sigma \pm iT_m, \chi)\right| < c_4 k \log^2(kT_m) \qquad (-1 \leqslant \sigma \leqslant 2) \tag{2.2}$$

mit von k, m *unabhängiger numerischen Konstante* c_4.

Diesen Satz kann man auf ähnlichem Weg finden wie in [2], Satz 4.2, S. 226.

III. *Für geeignete numerische* b, c_5, c_6 *und* c_7 *Konstanten gilt für*

$$1-b \leqslant \sigma \leqslant 1, \quad t \geqslant c_5 \tag{2.3}$$

die Abschätzung

$$\left|\prod_{\chi} L(s, \chi)\right| \leqslant c_6 k^k t^{2k(1-\sigma)^{4/3}} e^{c_7 k (\log\log t)^3}, \tag{2.4}$$

wo das Produkt über alle Charaktere mod k *gebildet ist.*

Diese Ungleichung folgt aus den Vinogradoffschen Abschätzungen, mit einer kleinen von Hua [1] stammender Verbesserung. Siehe [2], S. 292-294.

IV. *Sei* $k \geqslant 1$, *ganz. Bei passender numersichen Konstante* $c_8 > 0$ *ist* $\prod_{\lambda} L(s, \chi) \neq 0$, in

$$\sigma \geqslant 1 - \frac{c_8}{M(k, t)}, \tag{2.5}$$
$$M(k, t) = \max\{\log k, \log^{3/4}(|t|+3)\log\log^{3/4}(|t|+3)\},$$

eventuell ausgenommen die einfache reelle Nullstelle β_1, *welche Nullstelle der mit dem Ausnahmecharakter* χ_1 *definierten* L*-Funktion ist.* ([2], Satz 6.2, 295; [3].)

V. *Wir bezeichnen mit* $N(\alpha, T)$ *die Gesammtzahl der Nullstellen aller* $\varphi(k)$ L*-Funktionen* mod k $(k \geqslant 1)$ *im Bereich* $\alpha < \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$ *jede mit ihrer Vielfachheit gezählt.*

Dann gilt

$$N(\alpha, T) < c_9 k^6 T^{4(1-\alpha)} \log^8 kT \tag{2.6}$$

für $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $T \geqslant 2$ *und* c_9 *ist eine numerische Konstante.*

Dieser Satz ist eine Folgerung von [2], Satz 1.1 Seite 299, [3].

Da $\prod_{\chi} L(s, \chi)$ eine Dedekindsche ζ-Funktion ist, kommt die Frage hervor, ob man den entsprechenden Satz gleich für jede Dedekindsche ζ-Funktion beweisen kann. Die dargestellte Methode, benutzt aber die Tatsache, daß die L-Funktionen mod k für

$$\sigma > 1 - c(k)\frac{\log\log k(|t|+2)}{\log k(|t|+2)}$$

nicht verschwinden und die entsprechende Tatsache für die Dedekindschen ζ-Funktionen steht noch nicht zur Verfügung. So entsteht die interessante Frage, ob man ohne diese Tatsache herauskommen kan und ob nur die Nullstellenfreiheit in

$$\sigma > 1 - \frac{c(k)}{\log k(|t|+2)}$$

ausreichen kann. Auf dieses Problem möchte ich noch zurückkehren.

3. Zum Beweis des Satzes (1.2) ist noch ein Lemma nötig das wir beweisen müssen.

LEMMA. *Sei* k *eine natürliche Zahl und sei*

$$a_n = \begin{cases} 1, & n \equiv 1 \pmod{k}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Für $\sigma > 1$, $\xi > 1$ *und positive ganze* l *gilt*

$$\left|\frac{1}{(l+1)!}\sum_{n \geqslant \xi} \frac{a_n \Lambda(n)}{n^s}\log^{l+1}\frac{n}{\xi} - \frac{\xi^{1-\sigma}}{(1-s)^{l+2}} + \sum \frac{\xi^{\varrho - s}}{(\varrho - s)^{l+2}}\right| < c_{10}\frac{k\log(k+1)\log(3+|t|)}{\xi^{3/2}}, \tag{3.2}$$

wo ϱ *alle Nullstellen von* $\prod_{\chi} L(s, \chi)$ *in dem Streifen* $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$ *durchlaüft.*

Beweis. (Vergl. [5], S. 190.) Sei $s = \sigma + it$, $w = u + iv$. Sei weiter

$$D = \frac{1}{2\pi i}\int_{u=-(\sigma-1)/2} \frac{\xi^w}{w^{l+2}} F(s+w)\,dw,$$

wo

$$F(z) = -\frac{1}{\varphi(k)}\sum_{\chi} \frac{L'}{L}(z, \chi)$$

bedeutet.

Für $\operatorname{Re} z > 1$, hat man wie bekannt

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \Lambda(n)}{n^s}.$$

Durch gliederweise Integration bekommt man einerseits

$$D = (-1)^l \sum_{n\geqslant\xi} \frac{a_n \Lambda(n)}{n^s} \cdot \frac{1}{(l+1)!} \log^{l+1} \frac{n}{\xi}.$$

Andererseits wendet man den Cauchyschen Integralsatz auf das Parallelogramm mit den Eckpunkten

$$-\frac{\sigma-1}{2} \pm iT_m, \quad -\tfrac{1}{2}-\sigma\pm iT_m$$

an, wo für T_m

$$3 \leqslant m < T_m < m+1$$

und wegen Satz (2.2)

$$\max_{-1/2\leqslant x\leqslant(\sigma+1)/2} \left| \sum_{\chi} \frac{L'}{L}(x\pm iT_m, \chi) \right| < c_{11} k \log^2(kT_m)$$

gelten. Wenn m über alle Grenzen wächst, so gilt

$$D = \frac{\xi^{1-s}}{(1-s)^{k+2}} - \sum_{\varrho} \frac{\xi^{\varrho-s}}{(\varrho-s)^{l+2}} - \frac{1}{2\pi i} \int_{(-1/2-\sigma)} \frac{\xi^w}{w^{l+2}} F(s+w)\, dw.$$

Daraus folgt mit [2], Satz 4.3, S. 227, unser Lemma.

4. Jetzt beweisen wir unseren Satz (1.2) Zur Durchführung des Beweises wenden wir den folgenden Satz an. Die Beweismethode wie in [5], S. 192.

Es sei $0 < \beta < 1$ vorgegeben, und

(4.1) $$1 < \sigma_0 \leqslant \tfrac{3}{2}.$$

Es sei weiter für $T \leqslant t \leqslant 2T$

(4.2) $$s = \sigma_0 + it$$

und ν sei eine ganze Zahl, für welche

(4.3) $$10 \leqslant \nu+1 \leqslant \log T.$$

Endlich fordern wir hier für den Parameter ξ nur

(4.4) $$\xi > e^{\nu+1}$$

Dann gilt die Abschätzung

(4.5) $$\left| \sum_{n\geqslant\xi} \frac{a_n \Lambda(n)}{n^s} \log^{\nu} \frac{n}{\xi} \right|$$
$$\leqslant \nu!\, T^{-\beta/2} \log^{3/2}\xi \cdot \left(3\sqrt{T} \frac{\xi^{1/2-\sigma_0}}{(\sigma_0-\frac{1}{2})^{\nu+1}} + 16 \frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{\nu+2}} \right)$$

(a_n ist mit (3.3) definiert) *für die s-Werte* (4.2) *mit Ausnahme einer Menge D^* vom Masse $m(D^*)$ mit*

(4.6) $$m(D^*) \leqslant T^{\beta} \log T.$$

Wir bezeichnen das Intervall

(4.7) $$\sigma = \sigma_0, \quad T + \frac{j}{[\log^3 T]} \leqslant t < T + \frac{j+1}{[\log^3 T]}$$

mit l_j ($1 \leqslant j \leqslant T\log^3 T$). Es gibt zwischen diesen vielleicht solche, welche ganz in der Menge D^* liegen; diese bezeichnen wir mit l_j^*. Da die l_j-Intervalle untereinander fremd sind, so folgt aus (4.6), daß die Anzahl der l_j''-Intervalle unterhalb

(4.8) $$\leqslant T^{\beta} \log^4 T$$

ist. Alle übrigen l_j-Intervalle enthalten also wenigstens einen Punkt $\sigma_0 + it$ welcher zu der Komplementärmenge $\overline{D^*}$ von D^* gehört; diese bezeichnen wir mit l_j' und wir wählen in jedem, einen Punkt von $\overline{D^*}$. Wir werden sie kürzungshalber „gute" s-Werte nennen.

Dann gilt (4.5) für jedes gute s.

Aus dem Lemma (3.2) mit $l = \nu - 1$ und aus (4.5) folgt

(4.9) $$\left| \frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{\nu+1}} - \sum_{\varrho} \frac{\xi^{\varrho-s}}{(s-\varrho)^{\nu+1}} \right|$$
$$< T^{-\beta/2} \log^{3/2}\xi \left\{ 3\sqrt{T} \frac{\xi^{1/2-\sigma_0}}{(\sigma_0-\frac{1}{2})^{\nu+1}} + 16 \frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{\nu+2}} \right\} + c_{12}\, \xi^{-3/2} k \log(k+3) \log T.$$

Das besteht wenn nur (4.1), (4.2), (4.3) und (4.4) erfüllt sind. Es sei außerdem

(4.10) $$1 > \beta \geqslant \log^{-0,8} T$$

und

(4.11) $$(10 \leqslant)\ \beta \log T \leqslant \nu+1 \leqslant \log T.$$

Aus diesem und aus (4.4) folgt $\xi \geqslant T^{\beta}$ und nach (4.1)

$$\frac{1}{\xi} < T^{-\beta/2} \frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{\nu+2}}$$

also aus (4.9)

(4.12) $$\left| \frac{\xi^{1-s}}{(s-1)^{\nu+1}} - \sum_{\varrho} \frac{\xi^{\varrho-s}}{(s-\varrho)^{\nu+1}} \right|$$
$$< c_{13} k \log(k+3)\, T^{-\beta/2} \log^{3/2}\xi \log T \left\{ \sqrt{T} \frac{\xi^{1/2-\sigma_0}}{(\sigma_0-\frac{1}{2})^{\nu+1}} + \frac{\xi^{1-\sigma_0}}{(\sigma_0-1)^{\nu+2}} \right\}.$$

Es sei nun j eine solche ganze Zahl, daß l_j ein l_j' ist und wir betrachten den Streifen

$$(4.13)\qquad 0<\sigma<1,\quad T+\frac{j}{[\log^3 T]}\leqslant t<T+\frac{j+1}{[\log^3 T]},\quad 0\leqslant j<[T\log^3 T].$$

Es bedeute $\varrho^*=\sigma^*+it^*$ eine der Nullstellen von $\prod_\chi L(s,\chi)$ im Streifen (4.13) mit dem größten reellen Teil. Nach der Multiplikation mit

$$|\xi^{s-\varrho^*}(s-\varrho^*)^{\nu+1}| = \xi^{\sigma_0-\sigma^*}|s-\varrho^*|^{\nu+1}$$

folgt aus (4.12) und wegen

$$|s-\varrho^*|\leqslant(\sigma_0-\sigma^*)+\frac{1}{[\log^3 T]}$$

unsere Ausgangsungleichung

$$(4.14)\qquad \left|\xi^{1-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-1}\right)^{\nu+1}-\sum_\varrho \xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right|$$

$$\leqslant c_{14}k\log(k+3)\frac{T^{-\beta/2}}{\sigma_0-1}\log^{3/2}\xi\log T\left\{\xi^{1-\sigma^*}\left(\frac{(\sigma_0-\sigma^*)+[\log^3 T]^{-1}}{\sigma_0-1}\right)^{\nu+1}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{T}\,\xi^{1/2-\sigma^*}\left(\frac{(\sigma_0-\sigma^*)+[\log^3 T]^{-1}}{\sigma_0-\frac12}\right)^{\nu+1}\right\},$$

wenn nur (4.1), (4.2), (4.4), (4.8) und (4.11) erfüllt sind.

5. β war bisher nur der Einschränkung (4.10) unterworfen. Wenn wir die Abkürzungen

$$(5.1)\qquad \beta^{2/25}=\eta^*,$$

$$(5.2)\qquad \tfrac12-\tfrac15\beta^{2/25}=A_1,$$

$$(5.3)\qquad \frac{24\cdot 30^2 A_1}{(1-\eta^*)\beta^{46/50}}=A_2$$

einführen, sei $\beta<b$ so klein, daß

$$(5.4)\qquad \beta<10^{-400},$$

$$(5.5)\qquad \tfrac13<A_1<\tfrac12,$$

$$(5.6)\qquad \frac{1}{1-\frac15\eta^*}\cdot\frac{1}{A_2}<1,$$

$$(5.7)\qquad \beta<1/A_2,$$

$$(5.8)\qquad \frac{1}{30^2}\beta^{21/25}<\tfrac12.$$

Mit diesen Konventionen und Beschränkungen werden wir zeigen, daß in jedem l_j'-Streifen $\prod_\chi L(s,\chi)\neq 0$ für

$$(5.9)\qquad \sigma>1-\tfrac12\beta+\tfrac15\beta^{27/25}=1-A_1\beta.$$

Daraus folgt, daß die Nullstellen von $\prod_\chi L(s,\chi)$ im Gebiete

$$(5.10)\qquad \sigma>1-A_1\beta,\qquad T\leqslant t\leqslant 2T$$

nur in l_j''-Streifen liegen können. Wegen (4.8) und (2.1) folgt also, daß

$$(5.11)\qquad N(1-A_1\beta,2T)-N(1-A_1\beta,T)<c_{15}kT^\beta\log^5(kT),$$

wenn nur

$$(5.12)\qquad b>\beta>\log^{-0,8}T,\qquad T>c_{16}.$$

Wir ersetzen (5.12) durch

$$(5.13)\qquad b>\beta\geqslant 10\log^{-0,8}T,\qquad T>c_{17},$$

dann können wir die Ungleichung (5.11) statt T mit

$$\frac{T}{2},\frac{T}{2^2},\ldots,\frac{T}{2^\gamma}$$

anwenden, wo das ganzzahlige γ durch

$$T/2^{\gamma-1}>\sqrt[4]{T}\geqslant T/2^\gamma$$

definiert ist (da dann (5.12) erfüllt ist).

Also folgt nach Summation

$$N(1-A_1\beta,T)-N(1-A_1\beta,\sqrt[4]{T})<c_{18}kT^\beta\log^5(kT).$$

Wendet man auf das zweite Glied links die Abschätzung (2.6) an, so bekommt man

$$(5.14)\qquad N(1-A_1\beta,T)<c_{19}k^6T^\beta\log^8(kT).$$

Das ist nur unter Annahme von (5.12) bewiesen, es sei nun

$$(5.15)\qquad \beta<10\log^{-0,8}T.$$

Dann ist

$$N(1-A_1\beta,T)\leqslant\sum_\varrho 1,$$

wo die Summation rechts auf die nichttrivialen Nullstellen von $\prod_\chi L(s,\chi)$ in dem Rechtecke mit den Eckpunkten

$$1,\ 1+iT,\ 1-6\log^{-0,8}T,\ 1-6\log^{-0,8}T+iT$$

zu erstrecken ist. Aber nach (2.5) enthält dieses Rechteck keine Nullstelle von $\prod_\chi L(s,\chi)$ für $T>\max(c_{20}, k^{\log k})$. So gilt (5.13) auch in Falle (5.15), also gleichmäßig für

(5.16) $$0<\beta<b.$$

Wenn man

$$1-A_1\beta = 1-\tfrac{1}{2}\beta+\tfrac{1}{5}\beta^{27/25} = \vartheta$$

setzt, folgt leicht unser Satz (1.2).

Es genügt also die Behauptung (5.9) zu beweisen.

6. Um dies zu zeigen wenden wir unsere Ausgangsungleichung (4.14) mit (4.10) und

(6.1) $$\sigma_0 = 1+(1-\eta^*)^2\frac{1}{30^2}\beta^{21/25},$$

(6.2) $$\xi = e^{A_2(\nu+1)}$$

an, wo ν ganz ist und die Bedingung

(6.3) $$\frac{1}{A_2}\log T \leqslant \nu+1 \leqslant \frac{1}{1-\frac{1}{5}\eta^*}\cdot\frac{1}{A_2}\log T$$

erfüllt ist.

Bei dieser Annahme (4.1), (4.4) und (4.11) sind erfüllt.

Die untere Abschätzung in (6.3) ermöglicht uns (4.14) zu vereinfachen zu der Form

(6.4) $$\left|\xi^{1-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-1}\right)^{\nu+1} - \sum_\varrho \xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right|$$
$$< c_{21}k\log(k+2)\frac{T^{-\beta/2}}{\sigma_0-1}\xi^{1-\sigma^*}\log^{3/2}\xi\log T\left(\frac{\sigma_0-\sigma^*+[\log^3 T]^{-1}}{\sigma_0-1}\right)^{\nu+1}.$$

7. Das erste Glied links ist dem Absolutwerte nach kleiner als

(7.1) $$\xi^{1-\sigma^*}/T^4.$$

Den Beitrag derjenigen ϱ-Nullstellen, für welche

$$t_\varrho \geqslant t+20$$

bleibt wegen (2.1) dem Absolutwert unterhalb

$$c_{22}k\sum_{n\geqslant 20}\log(T+n)(2/n)^{\nu+1} < ck\xi^{1-\sigma^*}e^{-2(\nu+1)}\log T$$

da aus (4.11)

$$e^{2(\nu+1)} > T^\beta$$

ist, so hat der obige Ausdruck die obere Schranke

$$c_{23}k\frac{\xi^{1-\sigma^*}\log T}{T^\beta}.$$

Dasselbe gilt für den Beitrag der Glieder mit $t_\varrho\leqslant t-20$. Da

$$\frac{\sigma_0-\sigma^*+[\log^{-3}T]}{\sigma_0-1} > 1,$$

so folgt also

$$\left|\sum_{\substack{\varrho\\|t_\varrho-t|<20}}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right|$$
$$< c_{24}k\log(k+3)\frac{\xi^{1-\sigma^*}\log^{3/2}\xi\log(kT)}{(\sigma_0-1)T^{\beta/2}}\left(\frac{\sigma_0-\sigma^*+[\log^3 T]^{-1}}{\sigma_0-1}\right)^{\nu+1}.$$

Da aus der Definition von σ_0 und ξ, für $\beta<b$

$$\sigma_0-1 > \frac{1}{2\cdot 30^2}\cdot\frac{1}{\log T},\qquad \log\xi = A_2(\nu+1) < 2\log T$$

folgt ferner

(7.2) $$\left|\sum_{\substack{\varrho\\|t_\varrho-t|<20}}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right|$$
$$< c_{25}k\log(k+3)\frac{\log(kT)\log^3 T\,\xi^{1-\sigma^*}}{T^{\beta/2}}\left(\frac{\sigma_0-\sigma^*+[\log^3 T]^{-1}}{\sigma_0-1}\right)^{\nu+1}.$$

8. Wir setzen jetzt voraus, die Behauptung (5.9) wär enicht gültig, also in einem I_j' Intervalle wäre

(8.1) $$\sigma^* > 1-A_1\beta$$

daraus werden wir einen Widerspruch ableiten, wenn $\beta<\min(b, 1/k^{40})$ und $T>\max(c_{26}, e^{e^{k^3}})$. Wir halten dieses j fest, und versuchen auf der rechten Seite von (7.2) eine Übersicht zu gewinnen.

Man kann zeigen daß (vergl. [5], S. 168-169)

(8.2) $$\left|\sum_{\substack{\varrho\\|t_\varrho-t|<20}}\xi^{\varrho-\varrho^*}\left(\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\right)^{\nu+1}\right| < c_{27}k\log(k+3)\frac{\log(kT)\log^3 T}{T^{\beta\eta^*/20}}.$$

Wenn wir den Absolutwert des Beitrages derjenigen Teilsumme berücksichtigen, für welche

$$|s-\varrho|\geqslant\beta^{21/25},\qquad |t-t_\varrho|<20$$

bekommen wir aus (8.2)

$$(8.3)\qquad V \equiv \Bigg| \sum_{\substack{\varrho \\ |s-\varrho|\leqslant\beta^{21/25}}} \Big(e^{A_2(\varrho-\varrho^*)}\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}\Big)^{\nu+1}\Bigg|$$

$$< c_{28}k\log(k+3)\,T^{-\frac{1}{2}\beta^{27/25}}\log^3 T\log(kT).$$

9. Um V von unten abzuschätzen wenden wir den folgenden Satz von P. Turán an ([5], Satz X)

Für $m>0$, $k\leqslant N$ und

$$|z_1|\geqslant|z_2|\geqslant\ldots\geqslant|z_k|,\qquad |z_1|\geqslant 1$$

und für beliebige Zahlen b_j gibt es eine ganze Zahl ν, so daß

$$m\leqslant\nu\leqslant m+N$$

und

$$(9.1)\qquad |b_1z_1^\nu+b_2z_2^\nu+\ldots+b_kz_k^\nu|\geqslant\Big(\frac{1}{48e^2}\cdot\frac{N}{2N+m}\Big)^N\min_{1\leqslant j\leqslant k}|b_1+\ldots+b_j|.$$

Die Rolle der z_j Zahlen werden hier die Zahlen

$$e^{A_2(\varrho-\varrho^*)}\frac{s-\varrho^*}{s-\varrho}$$

spielen. Das ist sicherlich wahr wenn man zeigt, daß ϱ^* in der Summe V vorkommt. Da für die Nullstelle ϱ^* nach (6.1), (8.1) und (4.10)

$$|s-\varrho^*|<\tfrac{1}{300}\beta^{21/25}+\tfrac{1}{2}\beta+\beta^3<\beta^{21/25}$$

gilt, so liegt ϱ^* wirklich im Summationsgebiet von V.

Die Jensensche Ungleichung und der Satz III ergeben für die Anzahl der Glieder in V die obere Abschätzung

$$(9.2)\qquad \beta^{164/150}\log T+(\log\log T)^6$$

für

$$\beta\leqslant 1/k^{40},\qquad T>\max(c_{29},\exp\exp k^3).$$

Also das N kann durch (9.2) defieniert werden.

Es sei weiter

$$m=\frac{1}{A_2}\log T.$$

Das Intervall $(m, m+N)$ liegt ganz im Intervall (6.3), weil wegen (5.12) für $T>c_{30}$ und $\beta<b$

$$\beta^{168/150}\log T+(\log\log T)^5<\frac{\frac{1}{5}\eta^*}{1-\frac{1}{5}\eta^*}\cdot\frac{1}{A_2}\log T.$$

Wenn wir berücksichtigen, daß

$$m<\beta^{23/25}\log T,\qquad m>N,$$

ist, so folgt, wenn man $\nu+1$ in Sinne des Satzes (9.1) bestimmt

$$V>\Big(\frac{c}{144e^2}\cdot\frac{\beta^{164/150}\log T+(\log\log T)^6}{\beta^{23/25}\log T}\Big)^{\beta^{164/150}\log T+(\log\log T)^6}$$

also für $\beta<b$, $T>c_{31}$

$$V>T^{-\beta^{163/150}}e^{-(\log\log T)^7}.$$

Aus (8.3), folgt für $T>\max(c, k)$

$$T^{-\beta^{163/150}}e^{-(\log\log T)^7}<T^{-\frac{1}{2}\beta^{162/150}}\log^5 T$$

also

$$T^{\frac{1}{4}\beta^{162/150}}<e^{2(\log\log T)^7},$$

daß heißt für $\beta<b$

$$\beta^{162/150}<\frac{8(\log\log T)^7}{\log T}.$$

Da aber $\beta>\log^{-0,8}T$, folgt daraus

$$\log^{-1296/1500}T<8\frac{(\log\log T)^7}{\log T},$$

was für $T>c_{32}$ nicht wahr ist. Damit ist unser Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] L. K. Hua, *An improvement of Vinogradov mean-value theorem and several applications*, Quart. J. Oxford 20 (1949), S. 48-61.

[2] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.

[3] T. Tatuzawa, *On the zeros of Dirichlets L-Functions*, Proc. Japan. Acad. 26, no. 9, (1950), S. 1-13.

[4] — *On the number of primes in an arithmetic progression*, Jap. J. Math. 21 (1951), S. 93-111.

[5] P. Turán, *Eine Neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953 und die chinesische umgearbeitete und erweiterte Auflage dieses Buches, Peking 1956.

UNIWERSYTET IM. ADAMA MICKIEWICZA W POZNANIU
ADAM MICKIEWICZ UNIVERSITÄT IN POZNAŃ

Reçu par la Rédaction le 29. 4. 1960