[8] C. L. Siegel, *Einheiten quadratischer Formen*, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. 13 (1940), pp. 209-239.

[9] — *Discontinuous groups*, Annals of Math. 44 (1943), pp. 674-689.

[10] J. Heinhold, *Verallgemeinerung und Verschärfung eines Minkowskischen Satzes*, Math. Zeitschrift 44 (1939), pp. 659-688.

MATHEMATISCH CENTRUM AMSTERDAM

Reçu par la Rédaction le 20. 4. 1960

ACTA ARITHMETICA
VI (1961)

Über die Darstellung der Zahlen durch einige ternäre quadratische Formen

von

G. Lomadse (Tbilissi)

§ 1. In der vorliegenden Arbeit bezeichnen die Buchstaben M, N, a, d, k, q, r, λ, ω natürliche Zahlen (in § 4 bezeichnet jedoch q beliebige ganze Zahlen); b, u, v ungerade natürliche Zahlen; p Primzahlen; $\varkappa$, l nichtnegative ganze Zahlen; H, c, g, h, j, m, n, s, x, y, α, β, γ, δ ganze Zahlen; A, μ, ν, ϱ, σ, ξ, η, t, w reelle Zahlen; z, ζ, τ, A, B, C, D, G komplexe Zahlen, wobei $\operatorname{Im}\tau > 0$. Mit K werden positive Zahlen bezeichnet, die an den betreffenden Stellen definiert sind.

Diese Buchstaben werden nötigenfalls mit Indizes oder Strichen versehen.

(h, m) ist der größte gemeinsame Teiler von h und m.

$d \mid m$ bedeutet, daß d in m als Teiler aufgeht; $d \nmid m$, daß d nicht in m aufgeht; $p^l \| m$, daß $p^l \mid m$, aber $p^{l+1} \nmid m$.

$\left(\frac{h}{u}\right)$ ist das Jacobische Symbol für $(h, u) = 1$, $u > 1$; ist Null für $(h, u) > 1$; ist Eins für $u = 1$.

Weiter sei

$$e(z) = \exp 2\pi i z; \qquad I(u) = i^{(u-1)^2/4};$$

$$\operatorname{sgn}\xi = \begin{cases} \dfrac{\xi}{|\xi|} & \text{für} \quad \xi \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad \xi = 0. \end{cases}$$

In der Summe $\sum\limits_{h \bmod q}$ durchläuft h ein vollständiges Restsystem $\bmod q$, in der Summe $\sum\limits_{h \bmod q}{}'$ ein reduziertes System. Leere Summen sind gleich Null zu setzen, leere Produkte gleich Eins.

Für $z \neq 0$ sei

$$-\frac{\pi}{2} < \arg z^{1/2} \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad z^{k/2} = (z^{1/2})^k.$$

Die Funktion $f(q)$ heiße multiplikativ, wenn

$$f(q_1 q_2) = f(q_1)f(q_2) \quad \text{für} \quad (q_1, q_2) = 1.$$

$\mu(q)$ ist die Möbiussche Funktion.
$\chi(a)$ ist der Charakter mod k.
Ferner sei

$$S(h, q) = \sum_{j \bmod q} e\left(\frac{hj^2}{q}\right), \tag{1.1}$$

$$S\left(\begin{smallmatrix} h \\ s \end{smallmatrix}; c, N\right) = \sum_{\substack{j \bmod N|s| \\ j \equiv c \pmod N}} e\left(\frac{hj^2}{2Ns}\right) \quad (s \neq 0,\ 2 \mid hsN), \tag{1.2}$$

$$c(h, q) = \sum_{j \bmod q}{}' e\left(\frac{hj}{q}\right) \quad \text{(die Ramanujansche Summe)}, \tag{1.3}$$

$$\tau(h, p^\lambda) = \sum_{j \bmod p^\lambda}{}' \left(\frac{j}{p}\right) e\left(\frac{hj}{p^\lambda}\right) \quad (p > 2), \tag{1.4}$$

$$\vartheta_{gh}(\tau; c, N) = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \equiv c \pmod N}}^{\infty} e\left(\frac{h(m-c)}{2N}\right) e\left(\frac{(m+\frac{1}{2}g)^2}{2N}\tau\right), \tag{1.5}$$

$$L(z, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{-z}, \tag{1.6}$$

$$L(k, m) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\frac{m}{u}\right) u^{-k}. \tag{1.7}$$

Weitere Bezeichnungen werden später eingeführt.

§ 2. $r(n; f) = r(n; a_1, a_2, a_3)$ bezeichne die Anzahl der Darstellungen von $n > 0$ durch die Form

$$f = (a_1, a_2, a_3)' = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2, \tag{2.1}$$

d. h. die Lösungszahl der Gleichung

$$n = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2, \tag{2.2}$$

bei gegebenen a_1, a_2, a_3.

Maass [10] erhielt mittels gewisser ganzer Modulformen und Jacobischer Thetafunktionen exakte Formeln für $r(n; f)$: $f = (1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 1, 3)$, $(1, 1, 5)$, $(1, 2, 2)$, $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 3)$, $(1, 5, 5)$, $(2, 2, 3)$, $(2, 3, 3)$.

In der vorliegenden Arbeit wird, wie in [8], [9], die Kloostermansche Methode ([4]) mit der Streefkerkschen ([11]) kombiniert. Auf diesem Wege werden im folgenden exakte Formeln für $r(n; f)$: $f = (1, 1, 7)$, $(1, 1, 10)$, $(2, 2, 5)$, gegeben.

Mit diesem Verfahren können analog auch andere Formen (2.1) behandelt werden.

§ 3. Im folgenden wird von einigen bekannten Ergebnissen Gebrauch gemacht die in den §§ 3 und 5 von [8] formuliert sind. Außerdem benutzen wir noch die folgenden Ergebnisse, die als Hilfssätze ausgedrückt werden:

Hilfssatz 1 ([11], S. 7, Formel (7)). *Für $\mu \neq 0$ ist*

$$\{-(\mu\tau + \nu)\}^{1/2} = i^{-\operatorname{sgn}\mu}(\mu\tau + \nu)^{1/2}, \tag{3.1}$$

$$\left(\frac{-1}{\mu\tau + \nu}\right)^{1/2} = \frac{i^{\operatorname{sgn}\mu}}{(\mu\tau + \nu)^{1/2}}. \tag{3.2}$$

Hilfssatz 2 ([11], S. 7, Formel (9)). *Es sei $\mu \neq 0$, $\sigma \neq 0$, $\xi \neq 0$ und*

$$(\xi\tau' + \eta)^{1/2} = \left(\frac{\mu\tau + \nu}{\sigma\tau + \varrho}\right)^{1/2}.$$

Dann ist

$$\left(\frac{\mu\tau + \nu}{\sigma\tau + \varrho}\right)^{1/2} = (-1)^{(\operatorname{sgn}\xi\sigma + 1)(\operatorname{sgn}\mu\sigma - 1)/4} \frac{(\mu\tau + \nu)^{1/2}}{(\sigma\tau + \varrho)^{1/2}}.$$

Hilfssatz 3 ([5], S. 326, Hilfssatz 3). *Die zahlentheoretische Funktion $h(q, d)$ sei definiert für jede q und jeden Teiler d von q. Für $(q_1, q_2) = 1$, $d_1 \mid q_1$, $d_2 \mid q_2$ habe die Funktion $h(q, d)$ die Eigenschaft*

$$h(q_1 q_2, d_1 d_2) = h(q_1, d_1) h(q_2, d_2).$$

Dann ist die Funktion

$$g(q) = \sum_{d \mid q} h(q, d)$$

multiplikativ.

Hilfssatz 4 (vgl. z. B. [12], S. 11, Hilfssatz 2). *Bei ungeradem h ist*

$$S(h, 2^\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{für } \lambda = 1, \\ (1 + i^h) 2^{\lambda/2} & \text{für } 2 \mid \lambda, \\ e\left(\frac{h}{8}\right) 2^{(\lambda+1)/2} & \text{für } 2 \nmid \lambda,\ \lambda > 1. \end{cases}$$

HILFSSATZ 5 (vgl. z. B. [12], S. 16, Hilfssatz 8). *Es sei* $(h, u) = 1$. *Dann ist*

$$S(h, u) = \left(\frac{h}{u}\right) I(u) u^{1/2}.$$

HILFSSATZ 6 ([11], S. 42, Hilfssatz 45). *Für gerade* N, $s \neq 0$, $\gamma \neq 0$, $\gamma \equiv 0 \pmod{2N}$, $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ *und* $s_1 = \gamma h + \delta s \neq 0$ *ist*

$$S\left(\frac{\alpha h + \beta s}{\gamma h + \delta s}; c, N\right) = e\left(-\frac{\operatorname{sgn} s\gamma s_1}{8}\right) e\left(\frac{\operatorname{sgn} \gamma\delta}{8}\right) \times \left(\frac{|s_1|}{|s\delta|}\right)^{1/2} S\left(\frac{\beta}{\delta}; c, N\right) S\left(\frac{h}{s}; \alpha c, N\right).$$

HILFSSATZ 7 ([2], S. 27, Hilfssatz 6). *Es sei* $p > 2$, $p^{\varkappa} \| h$. *Dann ist*

$$\tau(h, p^{\lambda}) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \varkappa \neq \lambda - 1, \\ p^{\lambda - 1/2}\left(\dfrac{p^{-\varkappa} h}{p}\right) I(p) & \text{für} \quad \varkappa = \lambda - 1. \end{cases}$$

HILFSSATZ 8 ([11], S. 16, Hilfssatz 20). *Es sei* $s \neq 0$. *Die Zahlen* ζ_q *mögen den folgenden Bedingungen genügen:*

1. ζ_q *sei in* q *multiplikativ;*
2. *die Reihe*

$$\sum_{q=1, (q, rs)=1}^{\infty} \zeta_q$$

konvergiere gegen S;

3. *die Reihe*

$$\sum_{q=1, (q, r)=1}^{\infty}{}^{*} \zeta_q,$$

wo q *nur diejenigen zu* r *teilerfremden Zahlen durchläuft, deren Primteiler in* s *aufgehen, konvergiere absolut gegen* T.

Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{q=1, (q, r)=1}^{\infty} \zeta_q$$

gegen ST.

HILFSSATZ 9 (vgl. z. B. [1], S. 109). *Wenn die Reihen*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n^2 \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$$

konvergieren, so konvergiert auch das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \zeta_n).$$

HILFSSATZ 10 (vgl. z. B. [6], S. 203, Hilfssatz 235). *Ist* χ *nicht Hauptcharakter* $\bmod k$ *und* $\operatorname{Re} z \geqslant \frac{1}{2}$, *so gilt*

$$|L(z, \chi)| < Kk(|\operatorname{Im} z| + 1),$$

wo K *von* z *unabhängig ist.*

HILFSSATZ 11 (vgl. z.B. [6], S. 204, Hilfssatz 237 und [7], S. 446, 449). *Für* $\operatorname{Re} z > 1$ *ist*

$$\prod_p \left(1 - \chi(p) p^{-z}\right) = L^{-1}(z, \chi).$$

Ist χ *nicht Hauptcharakter, so gilt dies auch für* $z = 1$, *und die Reihe*

$$\sum_p \chi(p) p^{-1}$$

konvergiert.

HILFSSATZ 12 ([11], S. 18, Hilfssatz 24). *Für* $\operatorname{Re} z \geqslant \sigma$, $\sigma > 1$, *konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^2(n) \chi(n) n^{-z} = \bar{L}(z, \chi)$$

gleichmäßig und absolut und stellt dort eine reguläre Funktion von z *dar. Ist* χ *nicht Hauptcharakter, so ist diese Funktion in die Halbebene* $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$ *analytisch fortsetzbar und dort gleich*

$$L(z, \chi) \prod_p \left(1 - \chi(p^2) p^{-2z}\right).$$

HILFSSATZ 13 ([3], S. 489-491, Formeln (d), (e), (f), (g)). *Es sei* ω *quadratfrei. Dann ist*

$$\begin{aligned} L(1, -\omega) &= \tfrac{1}{4}\pi & &\text{für} \quad \omega = 1, \\ &= \pi\omega^{-1/2} \sum_{1 \leqslant h \leqslant \omega/4} \left(\frac{h}{\omega}\right) & &\text{für} \quad \omega \equiv 1 \pmod 4,\ \omega > 1, \\ &= 2^{-1}\pi\omega^{-1/2} \sum_{1 \leqslant h \leqslant \omega/2} \left(\frac{h}{\omega}\right) & &\text{für} \quad \omega \equiv 3 \pmod 4, \end{aligned}$$

$$L(1,-\omega)=2^{-3/2}\pi \quad \textit{für} \quad \omega=2,$$

$$=\pi\omega^{-1/2}\Big\{\sum_{1\leqslant h\leqslant \omega/16}\Big(\frac{h}{\omega/2}\Big)-\sum_{3\omega/16<h\leqslant\omega/4}\Big(\frac{h}{\omega/2}\Big)\Big\}$$

$$\textit{für} \quad \omega\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,8),\ \omega>2,$$

$$=\pi\omega^{-1/2}\sum_{\omega/16<h\leqslant 3\omega/16}\Big(\frac{h}{\omega/2}\Big) \quad \textit{für} \quad \omega\equiv 6\ (\mathrm{mod}\,8).$$

§ 4. Im folgenden soll, ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$(a_1,a_2,a_3)=1,\quad a_3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,2) \tag{4.1}$$

angenommen werden.

Ferner sei $\varDelta=a_1a_2a_3$; a bedeute das kleinste gemeinsame Vielfache aller a_k.

Schließlich sei

(4.2) $\Psi(\tau,z)$

$$=1+\frac{1}{2\varDelta^{1/2}}\Big(\frac{i}{2}\Big)^{3/2}\sum_{\substack{q,H=-\infty\\(H,q)=1}}^{\infty}{}' i^{3(\mathrm{sgn}\,q-1)/2}\frac{\prod_{k=1}^{3}S(-a_kH\,\mathrm{sgn}\,q,|q|)}{|q|^{3/2}(q\tau+H)^{3/2}}|q\tau+H|^{-z},$$

wo der Strich bedeutet, daß die Glieder mit $q=0$ auszuschließen sind. Bei festem τ ist $\Psi(\tau,z)$ für $\mathrm{Re}\,z>\frac{1}{2}$ regulär.

HILFSSATZ 14. *Es sei*

$$T(m,z)=\int_{-\infty}^{\infty}e(-mt)\Big(\frac{\tau}{4a}+t\Big)^{-3/2}\Big|\frac{\tau}{4a}+t\Big|^{-z}dt, \tag{4.3}$$

$$F(m,z)=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}2^{-\lambda(3+z)}\sum_{h\,\mathrm{mod}\,2^\lambda}{}'e\Big(-\frac{mh}{2^{\lambda+2}a}\Big)\prod_{k=1}^{3}S(a_kh,2^\lambda), \tag{4.4}$$

$$G(m,z)=\sum_{\substack{q=1\\(q,2)=1}}^{\infty}q^{-3-z}\sum_{x\,\mathrm{mod}\,q}{}'e\Big(-\frac{mx}{4aq}\Big)\prod_{k=1}^{3}S(a_kx,q). \tag{4.5}$$

Dann ist für $\mathrm{Re}\,z>\frac{1}{2}$

$$\Psi(\tau,z)=1+2^{-5/2-2z}\varDelta^{-1/2}a^{-1/2-z}e\big(\tfrac{3}{8}\big)\sum_{\substack{m=-\infty\\m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4a)}}^{\infty}T(m,z)F(m,z)G(m,z). \tag{4.6}$$

Beweis. Für $\mathrm{Re}\,z>\frac{1}{2}$ folgt aus (4.2) wegen (3.1)

$$\Psi(\tau,z)=1+\varDelta^{-1/2}\Big(\frac{i}{2}\Big)^{3/2}\sum_{q=1}^{\infty}\sum_{\substack{H=-\infty\\(H,q)=1}}^{\infty}\frac{\prod_{k=1}^{3}S(-a_kH,q)}{q^{3/2}(q\tau+H)^{3/2}}|q\tau+H|^{-z}.$$

Setzt man $H=g+4aqm$, so ergibt sich

$$\Psi(\tau,z)=1+2^{-9/2-2z}\varDelta^{-1/2}a^{-3/2-z}i^{3/2}\sum_{q=1}^{\infty}q^{-3-z}\sum_{\substack{g\,\mathrm{mod}\,4aq\\(g,q)=1}}\prod_{k=1}^{3}S(-a_kg,q) \tag{4.7}$$

$$\times\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\tau}{4a}+\frac{g}{4aq}+m\Big)^{-3/2}\Big|\frac{\tau}{4a}+\frac{g}{4aq}+m\Big|^{-z}.$$

Nach Hilfssatz 11 von [8] und nach (4.3) ist

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(\frac{\tau}{4a}+\frac{g}{4aq}+m\Big)^{-3/2}\Big|\frac{\tau}{4a}+\frac{g}{4aq}+m\Big|^{-z}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e\Big(\frac{mg}{4aq}\Big)T(m,z). \tag{4.8}$$

Wegen $\mathrm{Re}\,z>\frac{1}{2}$ folgt aus (4.7) und (4.8)

(4.9) $\Psi(\tau,z)=$

$$1+2^{-9/2-2z}\varDelta^{-1/2}a^{-3/2-z}i^{3/2}\sum_{m=-\infty}^{\infty}T(m,z)\sum_{q=1}^{\infty}q^{-3-z}\sum_{\substack{g\,\mathrm{mod}\,4aq\\(g,q)=1}}e\Big(\frac{mg}{4aq}\Big)\prod_{k=1}^{3}S(-a_kg,q).$$

Setzt man $g=s+jq$, so ergibt sich

$$\sum_{\substack{g\,\mathrm{mod}\,4aq\\(g,q)=1}}e\Big(\frac{mg}{4aq}\Big)\prod_{k=1}^{3}S(-a_kg,q) \tag{4.10}$$

$$=\begin{cases}4a\displaystyle\sum_{s\,\mathrm{mod}\,q}{}'e\Big(-\frac{ms}{4aq}\Big)\prod_{k=1}^{3}S(a_ks,q) & \text{für}\quad 4a\,|\,m,\\[2ex] 0 & \text{für}\quad 4a\nmid m.\end{cases}$$

Aus (4.9) und (4.10) folgt also

$$\Psi(\tau,z)=1+2^{-5/2-2z}\varDelta^{-1/2}a^{-1/2-z}e\big(\tfrac{3}{8}\big)$$

$$\times\sum_{\substack{m=-\infty\\m\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,4a)}}^{\infty}T(m,z)\sum_{q=1}^{\infty}q^{-3-z}\sum_{s\,\mathrm{mod}\,q}{}'e\Big(-\frac{ms}{4aq}\Big)\prod_{k=1}^{3}S(a_ks,q).$$

Setzt man hier $q = 2^l q'$ (q' ungerade, $l \geqslant 0$) und $s = x\cdot 2^l + hq'$ ($l \geqslant 1$), berücksichtigt Hilfssatz 4 von [8] und schreibt q, λ statt q', l, so ergibt sich die Behauptung.

Hilfssatz 15. *Für* $m \equiv 0 \pmod{4a}$ *ist das durch* (4.4) *definierte* $F(m, z)$ *eine ganze Funktion von* z. *In der Halbebene* $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ *gilt*

$$|F(m, z)| < K|m|^{\varepsilon}, \qquad \varepsilon > 0,$$

wo K *nicht von* m *und* z *abhängt.*

Beweis. Es sei

$$a_k = 2^{\gamma_k} b_k \qquad (\gamma_k \geqslant 0;\ k = 1, 2, 3);$$

dabei möge wegen (4.1) ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3 = 0, \qquad (b_1, b_2, b_3) = 1 \tag{4.11}$$

gelten; b bedeute das kleinste gemeinsame Vielfache aller b_k.

Führt man jetzt in (4.4) statt h einen neuen Summationsbuchstaben s durch $h \equiv bs \pmod{2^\lambda}$ ein, so ergibt sich nach Hilfssatz 4 und (4.11)

$$F(m, z) = 1 + \sum_{\lambda=2}^{\infty} 2^{-\lambda(3+z)} \sum_{s \bmod 2^\lambda}{}' e\left(-\frac{ms}{2^{\lambda+\gamma_1+2}}\right)$$
$$\times S(2^{\gamma_1} b_1 bs, 2^\lambda)\, S(2^{\gamma_2} b_2 bs, 2^\lambda)\, S(b_3 bs, 2^\lambda).$$

Hieraus folgt, nach Hilfssatz 2 von [8] und Hilfssatz 4 der vorliegenden Arbeit,

$$F(m, z) = 1 + \sum_{\substack{\lambda=2\\ 2\mid\lambda}}^{\gamma_2} R_1 + \sum_{\substack{\lambda=2\\ 2\nmid\lambda}}^{\gamma_2} R_2 + \sum_{\substack{\lambda=\gamma_2+2\\ 2\mid\lambda}}^{\gamma_1} R_3 + \sum_{\substack{\lambda=\gamma_2+2\\ 2\nmid\lambda}}^{\gamma_1} R_4 + \sum_{\substack{\lambda=\gamma_1+2\\ 2\mid\lambda}}^{\infty} R_5 + \sum_{\substack{\lambda=\gamma_1+2\\ 2\nmid\lambda}}^{\infty} R_6, \tag{4.12}$$

wobei

1. für $2\mid\gamma_2$, $2\mid\gamma_1$.

$$R_1 = 2^{-\lambda(1/2+z)}\left\{c\left(\frac{m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right) + c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1}bb_3 - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right\},$$

$$R_2 = 2^{-\lambda(1/2+z)+1/2}\, c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}bb_3 - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right),$$

$$R_3 = 2^{-\lambda(1+z)+\gamma_2/2}\left\{\left(1 + (-1)^{(b_2+b_3)/2}\right) c\left(\frac{m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right.$$
$$\left. + c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1}bb_2 - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right) + c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1}bb_3 - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right\},$$

$$R_4 = 2^{-\lambda(1+z)+\gamma_2/2+1}\, c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_2+b_3) - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right),$$

$$R_5 = 2^{-\lambda(3/2+z)+(\gamma_1+\gamma_2)/2}\left\{\left(1 + (-1)^{(b_1+b_2)/2} + (-1)^{(b_1+b_3)/2}\right.\right.$$
$$\left. + (-1)^{(b_2+b_3)/2}\right) c\left(\frac{m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right) + \left(1 + (-1)^{(b_2+b_3)/2}\right) c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1}bb_1 - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)$$
$$\left. + c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1}bb_2 - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right) + c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1}bb_3 - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right\},$$

$$R_6 = 2^{-\lambda(3/2+z)+(\gamma_1+\gamma_2+3)/2}\, c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_1+b_2+b_3) - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right);$$

2. für $2\mid\gamma_2$, $2\nmid\gamma_1$

R_1, R_2, R_3 und R_4 dieselben Werte haben wie in 1.,

$$R_5 = 2^{-\lambda(3/2+z)+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2}\left\{\left(1 + (-1)^{(b_2+b_3)/2}\right) c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}bb_1 - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right.$$
$$\left. + c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_1+2b_2) - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right) + c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_1+2b_3) - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right\},$$

$$R_6 = 2^{-\lambda(3/2+z)+(\gamma_1+\gamma_2)/2+1}\left\{c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_2+b_3) - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right.$$
$$\left. + c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(2b_1+b_2+b_3) - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right\};$$

3. für $2\nmid\gamma_2$, $2\mid\gamma_1$

R_1 und R_2 dieselben Werte haben wie in 1,

$$R_3 = 2^{-\lambda(1+z)+(\gamma_2+1)/2}\left\{c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}bb_2 - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right.$$
$$\left. + c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_2+2b_3) - m}{2^{\gamma_1+2}}, 2^\lambda\right)\right\},$$

$$R_4 = 2^{-\lambda(1+z)+(\gamma_2+1)/2}\left\{c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}bb_3-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right.$$

$$\left.+c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(2b_2+b_3)-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right\},$$

$$R_5 = 2^{-\lambda(3/2+z)+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2}\left\{\left(1+(-1)^{(b_1+b_3)/2}\right)c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}bb_2-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right.$$

$$\left.+c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(2b_1+b_2)-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)+c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_2+2b_3)-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right\},$$

$$R_6 = 2^{-\lambda(3/2+z)+(\gamma_1+\gamma_2)/2+1}\left\{c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_1+b_3)-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right.$$

$$\left.+c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_1+2b_2+b_3)-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right\};$$

4. für $2\nmid\gamma_2$, $2\nmid\gamma_1$

R_1, R_2, R_3 und R_4 dieselben Werte haben wie in 3,

$$R_5 = 2^{-\lambda(3/2+z)+(\gamma_1+\gamma_2)/2+1}\left\{c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_1+b_2)-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right.$$

$$\left.+c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(b_1+b_2+2b_3)-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right\},$$

$$R_6 = 2^{-\lambda(3/2+z)+(\gamma_1+\gamma_2+1)/2}\left\{\left(1+(-1)^{(b_1+b_2)/2}\right)c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}bb_3-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right.$$

$$\left.+c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(2b_1+b_3)-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)+c\left(\frac{2^{\lambda+\gamma_1-1}b(2b_2+b_3)-m}{2^{\gamma_1+2}},\, 2^\lambda\right)\right\}.$$

Es sei $2^\varkappa \| m$ $(\varkappa \geqslant \gamma_1+2)$ und $\lambda+\gamma_1-1>\varkappa$. Dann verschwinden wegen $\varkappa-\gamma_1-2<\lambda-3$, nach Hilfssatz 7 von [8], alle in R_5 und R_6 auftretenden Ramanujansche Summen.

Also ist $F(m,z)$ eine endliche Summe ganzer Funktionen, d. h. selbst eine ganze Funktion.

Ferner ist

$$|F(m,z)| < 1+\sum_{\lambda=2}^{\varkappa-\gamma_1+1} 2^{-\lambda(1/2+\mathrm{Re}\,z)+(\gamma_1+\gamma_2)/2+3},$$

folglich für $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{2}$

$$|F(m,z)| < 1+\varkappa\cdot 2^{\gamma_1+3} < K|m|^\varepsilon, \qquad \varepsilon > 0.$$

Hilfssatz 16. *Für $m \equiv 0 \pmod{4a}$ und $\mathrm{Re}\,z > 0$ ist die durch (4.5) definierte Funktion $G(m,z)$ regulär. Sie ist in die Halbebene $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{2}$ fortsetzbar. In jedem beschränkten Gebiet der Halbebene $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{4}$ gilt*

$$|G(m,z)| < K|m|^3,$$

wo K nicht von m und z abhängt.

Beweis. I. Aus (4.5) folgt

$$G(m,z) = \sum_{q=1,(q,2)=1}^{\infty} A(q,z); \tag{4.13}$$

$$A(q,z) = q^{-3-z}\sum_{x \bmod q}{}' e\left(-\frac{mx}{4aq}\right)\prod_{k=1}^{3} S(a_k x, q). \tag{4.14}$$

Es sei

$$q = (q, a_k)q_k, \qquad a_k = (q, a_k)a_k' \qquad (k = 1, 2, 3). \tag{4.15}$$

Aus (4.14), (4.15), Hilfssatz 2 von [8] und Hilfssatz 5 der vorliegenden Arbeit folgt

$$A(q,z) = q^{-3/2-z}\prod_{k=1}^{3}(q,a_k)^{1/2}\prod_{k=1}^{3} I(q_k)\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{a_k'}{q_k}\right)\sum_{x \bmod q}{}' e\left(-\frac{mx}{4aq}\right)\left(\frac{x}{q_1q_2q_3}\right). \tag{4.16}$$

In (4.16) sei

$$q = p^\lambda, \qquad p^{l_k}\| a_k \qquad (k = 1, 2, 3), \qquad p^\varkappa \Big\| \frac{m}{4a}.$$

Ferner werde die größte der Zahlen l_1, l_2, l_3 mit $\bar{l}$, die kleinste, also nach (4.1) Null mit $\underline{l}$, die dritte mit l' bezeichnet, so daß $\bar{l} \geqslant l' \geqslant \underline{l} = 0$. Dabei seien $\bar{a}, a', \underline{a}$ diejenigen a_k, bei denen $l_k = \bar{l}, l', \underline{l}$. Schließlich sei $l = \bar{l}+l'$. Demnach ist

$$\begin{aligned} A(p^\lambda, z) &= p^{-\lambda(3/2+z)}p^{\{\min(\lambda,\bar{l})+\min(\lambda,l')\}/2} I(p^\lambda) I(p^{\lambda-\min(\lambda,\bar{l})}) \\ &\times I(p^{\lambda-\min(\lambda,l')})\left(\frac{-\underline{a}}{p}\right)^\lambda\left(\frac{-p^{-\min(\lambda,l')}a'}{p}\right)^{\lambda-\min(\lambda,l')}\left(\frac{-p^{-\min(\lambda,\bar{l})}\bar{a}}{p}\right)^{\lambda-\min(\lambda,\bar{l})} \\ &\times \sum_{x \bmod p^\lambda}{}' e\left(\frac{mx}{4ap^\lambda}\right)\left(\frac{x}{p}\right)^{\lambda-\min(\lambda,\bar{l})-\min(\lambda,l')} \end{aligned} \tag{4.17}$$

und daher für $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{2}$

$$|A(p^\lambda, z)| < p^{\bar{l}}. \tag{4.18}$$

II. Aus (4.17) ergibt sich, nach Hilfssatz 7 von [8] und Hilfssatz 7 der vorliegenden Arbeit:

1. für $\lambda \leqslant l' \leqslant \bar{l}$, $2|\lambda$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda > \varkappa+1,$$
$$= -p^\lambda p^{-(z+3/2)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1,$$
$$= p^\lambda (1-p^{-1}) p^{-\lambda(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda < \varkappa+1;$$

2. für $\lambda \leqslant l' \leqslant \bar{l}$, $2\nmid\lambda$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda \neq \varkappa+1,$$
$$= \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{p^{-\varkappa}m/4a}{p}\right) p^\lambda p^{-(z+1)} p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1;$$

3. für $l' < \lambda \leqslant \bar{l}$, $2|\lambda$, $2|l'$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda > \varkappa+1,$$
$$= -p^{(\lambda+l')/2}\cdot p^{-(z+3/2)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1,$$
$$= p^{(\lambda+l')/2}(1-p^{-1}) p^{-\lambda(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda < \varkappa+1;$$

4. für $l' < \lambda \leqslant \bar{l}$, $2|\lambda$, $2\nmid l'$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda \neq \varkappa+1,$$
$$= \left(\frac{p^{-l'}a'}{p}\right)\left(\frac{p^{-\varkappa}m/4a}{p}\right) p^{(\lambda+l')/2}\cdot p^{-(z+1)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1;$$

5. für $l' < \lambda \leqslant \bar{l}$, $2\nmid\lambda$, $2|l'$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda > \varkappa+1,$$
$$= -\left(\frac{-p^{-l'}aa'}{p}\right) p^{(\lambda+l')/2}\cdot p^{-(z+3/2)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1,$$
$$= \left(\frac{-p^{-l'}aa'}{p}\right) p^{(\lambda+l')/2}(1-p^{-1}) p^{-\lambda(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda < \varkappa+1;$$

6. für $l' < \lambda \leqslant \bar{l}$, $2\nmid\lambda$, $2\nmid l'$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda \neq \varkappa+1,$$
$$= \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{p^{-\varkappa}m/4a}{p}\right) p^{(\lambda+l')/2}\cdot p^{-(z+1)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1;$$

7. für $l' \leqslant \bar{l} < \lambda$, $2|\lambda$, $2|l'$, $2|\bar{l}$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda > \varkappa+1,$$
$$= -p^{(l'+\bar{l})/2}\cdot p^{-(z+3/2)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1,$$
$$= p^{(l'+\bar{l})/2}(1-p^{-1}) p^{-\lambda(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda < \varkappa+1;$$

8. für $l' \leqslant \bar{l} < \lambda$, $2|\lambda$, $2\nmid l'$, $2\nmid\bar{l}$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda > \varkappa+1,$$
$$= -\left(\frac{-p^{-(l'+\bar{l})}a'\bar{a}}{p}\right) p^{(l'+\bar{l})/2}\cdot p^{-(z+3/2)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1,$$
$$= \left(\frac{-p^{-(l'+\bar{l})}a'\bar{a}}{p}\right) p^{(l'+\bar{l})/2}(1-p^{-1}) p^{-\lambda(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda < \varkappa+1;$$

9. für $l' \leqslant \bar{l} < \lambda$, $2|\lambda$, $2|l'$, $2\nmid\bar{l}$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda \neq \varkappa+1,$$
$$= \left(\frac{p^{-\bar{l}}\bar{a}}{p}\right)\left(\frac{p^{-\varkappa}m/4a}{p}\right) p^{(l'+\bar{l})/2}\cdot p^{-(z+1)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1;$$

10. für $l' \leqslant \bar{l} < \lambda$, $2|\lambda$, $2|\bar{l}$, $2\nmid l'$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda \neq \varkappa+1,$$
$$= \left(\frac{p^{-l'}a'}{p}\right)\left(\frac{p^{-\varkappa}m/4a}{p}\right) p^{(l'+\bar{l})/2}\cdot p^{-(z+1)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1;$$

11. für $l' \leqslant \bar{l} < \lambda$, $2\nmid\lambda$, $2\nmid l'$, $2|\bar{l}$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda > \varkappa+1,$$
$$= -\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}a}{p}\right) p^{(l'+\bar{l})/2}\cdot p^{-(z+3/2)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1,$$
$$= \left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}a}{p}\right) p^{(l'+\bar{l})/2}(1-p^{-1}) p^{-\lambda(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda < \varkappa+1;$$

12. für $l' \leqslant \bar{l} < \lambda$, $2\nmid\lambda$, $2\nmid\bar{l}$, $2|l'$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \qquad \text{falls} \quad \lambda > \varkappa+1,$$
$$= -\left(\frac{-p^{-l'}a'a}{p}\right) p^{(l'+\bar{l})/2}\cdot p^{-z(z+3/2)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1,$$
$$= \left(\frac{-p^{-l'}a'a}{p}\right) p^{(l'+\bar{l})/2}(1-p^{-1}) p^{-\lambda(z+1/2)} \qquad \text{falls} \quad \lambda < \varkappa+1;$$

13. für $l' \leqslant \bar{l} < \lambda$, $2 \nmid \lambda$, $2 \nmid l'$, $2 \nmid \bar{l}$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \quad \text{falls} \quad \lambda \neq \varkappa+1,$$

$$= \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{p^{-\varkappa}m/4a}{p}\right)p^{(l'+\bar{l})/2}\cdot p^{-(z+1)/2}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \quad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1;$$

14. für $l' \leqslant \bar{l} < \lambda$, $2 \nmid \lambda$, $2 \mid l'$, $2 \mid \bar{l}$

$$A(p^\lambda, z) = 0 \quad \text{falls} \quad \lambda \neq \varkappa+1,$$

$$= \left(\frac{-p^{-l}\Delta}{p}\right)\left(\frac{p^{-\varkappa}m/4a}{p}\right)p^{(l'+\bar{l})/2}\cdot p^{-(z+1)}\cdot p^{-\varkappa(z+1/2)} \quad \text{falls} \quad \lambda = \varkappa+1.$$

Ist $\varkappa = l = 0$, d. h. $(p, m) = 1$, so folgt aus 7 und 14

$$A(p^\lambda, z) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \lambda \geqslant 2, \\ \left(\frac{-\Delta}{p}\right)\left(\frac{m/4a}{p}\right)p^{-(z+1)} & \text{für} \quad \lambda = 1. \end{cases} \tag{4.19}$$

III. Es soll jetzt gezeigt werden, daß die Größen $A(q, z)$ allen Bedingungen von Hilfssatz 8 genügen:

1. Nach Hilfssatz 4 von [8] ist $A(q, z)$ in q multiplikativ.

2. Da $A(q, z)$ multiplikativ ist, folgt aus (4.19)

$$S = \sum_{q=1,(q,2m)=1}^{\infty} A(q, z) = \sum_{q=1,(q,2)=1}^{\infty} \mu^2(q)\left(\frac{-\Delta m/4a}{q}\right)q^{-(z+1)}. \tag{4.20}$$

Diese Reihe konvergiert für $\operatorname{Re} z \geqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, gleichmäßig und absolut.

Es sei $\chi_0(q)$ Charakter mod 2. Dann ist

$$\chi_1(q) = \chi_0(q)\left(\frac{-\Delta}{q}\right)\left(\frac{m/4a}{q}\right) \tag{4.21}$$

nicht Hauptcharakter und man kann nach Hilfssatz 12 schreiben:

$$S = \sum_{q=1}^{\infty} \mu^2(q)\chi_1(q)q^{-(z+1)} = \bar{L}(z+1, \chi_1). \tag{4.22}$$

3. Wir betrachten jetzt die Reihe

$$\sum_{q=1,(q,2)=1}^{\infty}{}^{*} A(q, z),$$

wo q nur diejenigen ungeraden Zahlen durchläuft, deren Primteiler in m aufgehen. Nach (4.18) ist hier

$$|A(q, z)| < a; \tag{4.23}$$

außerdem ist

$$A(q, z) = 0, \tag{4.24}$$

wenn für eine gewisse Primzahl p

$$p^\lambda \mid q, \quad \lambda > \varkappa+1.$$

Also ist diese Reihe endlich und daher für $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ absolut und gleichmäßig konvergent. Ihre Summe bezeichne man mit T.

Daher, nach Hilfssatz 8, konvergiert die Reihe

$$\sum_{q=1,(q,2)=1}^{\infty} A(q, z)$$

für $\operatorname{Re} z \geqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, gleichmäßig und absolut gegen ST, d. h. die Funktion $G(m, z)$ ist in der Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ regulär.

IV. Ferner ist die Funktion $G(m, z)$ in die Halbebene $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ fortsetzbar. In der Tat gilt dies nach Hilfssatz 12 für die Funktion $\bar{L}(z+1, \chi_1)$, und die Reihe

$$\sum_{q=1,(q,2)=1}^{\infty}{}^{*} A(q, z)$$

stellt in der Halbebene $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$ eine reguläre Funktion dar.

Deshalb ist für $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$

$$G(m, z) = ST, \tag{4.25}$$

wobei nach Hilfssatz 12

$$S = L(z+1, \chi_1)\prod_p \left(1-\chi_1(p^2)p^{-2(z+1)}\right) \tag{4.26}$$

und

$$T = \sum_{q=1,(q,2)=1}^{\infty}{}^{*} A(q, z). \tag{4.27}$$

Nach Hilfssatz 10 ist für $\operatorname{Re} z > -\frac{1}{2}$

$$|L(z+1, \chi_1)| < Kk\left(|\operatorname{Im}(z+1)|+1\right). \tag{4.28}$$

Hier bezeichnet k den Modul von $\chi_1(q)$, so daß ist nach (4.21)

$$k < K|m|. \tag{4.29}$$

In jedem beschränkten Gebiet ist ferner

$$|\mathrm{Im}(z+1)| < K. \tag{4.30}$$

Ferner ist für $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{4}$

$$\Big|\prod_p (1-\chi_1(p^2)p^{-2(z+1)})\Big| < \prod_p (1+p^{-3/2}) = K. \tag{4.31}$$

Aus (4.27), (4.23) und (4.24) folgt

$$|T| < \sum_{a=1,(a,2)=1}^{\infty}{}^{*} a < Km^2. \tag{4.32}$$

Aus (4.25)-(4.32) folgt, daß in jedem beschränkten Gebiet der Halbebene $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{4}$

$$|G(m, z)| < K|m|^3.$$

Hilfssatz 17. *Die durch* (4.2) *definierte Funktion* $\Psi(\tau, z)$ *ist in die Halbebene* $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{4}$ *fortsetzbar.*

Beweis. Für $\mathrm{Re}\,z > \frac{1}{2}$ ist die Funktion $\Psi(\tau, z)$ nach Definition regulär. Es sei D ein beliebiges beschränktes Gebiet in der Halbebene $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{4}$.

Nach (4.3) und Hilfssatz 12 von [8] ist

$$T(m, z) = U(z; \tfrac{3}{2}, \tau/4a, m) \tag{4.33}$$

in D regulär und dort

$$|T(m, z)| < Ke^{-K'|m|}, \tag{4.34}$$

wobei K und K' von m und z unabhängig sind.

Nach den Hilfssätzen 15 und 16 ist das Produkt $F(m, z)G(m, z)$ auch in D regulär und dort

$$|F(m, z)G(m, z)| < K|m|^{3+\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \tag{4.35}$$

Daher konvergiert in D die Reihe

$$\sum_{\substack{m=-\infty \\ m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4a)}}^{\infty} T(m, z)F(m, z)G(m, z)$$

absolut und gleichmäßig; sie stellt dort eine reguläre Funktion von z dar. Nach (4.6) ist also

$$1+2^{-5/2-2z}\Delta^{-1/2}a^{-1/2-z}e(\tfrac{3}{8}) \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4a)}}^{\infty} T(m, z)F(m, z)G(m, z)$$

die gesuchte analytische Fortsetzung von $\Psi(\tau, z)$ in die Halbebene $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{4}$.

Hilfssatz 18. *Für* $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ *erfüllt die Funktion*

$$\begin{aligned}\Theta(\tau) &= \Theta(\tau; a_1, a_2, a_3) \\ &= 1+2^{-5/2}\Delta^{-1/2}a^{-1/2}e(\tfrac{3}{8}) \sum_{\substack{m=-\infty \\ m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4a)}}^{\infty} T(m, 0)F(m, 0)G(m, 0)\end{aligned} \tag{4.36}$$

die Bedingungen 1 *und* 3 *von Definition* 1 *einer ganzen Modulform in* [8].

Beweis. Man wähle in der Halbebene $\mathrm{Re}\,z > -\frac{1}{4}$ das Gebiet D so, daß es den Punkt $z = 0$ enthalte. Dann ist, nach Hilfssatz 17, die Funktion $\Psi(\tau, z)$ in $z = 0$ regulär, und man bekommt nach (4.36)

$$\Theta(\tau) = \Psi(\tau, 0). \tag{4.37}$$

Aus (4.36), (4.33) und Hilfssatz 12 von [8] ergibt sich

$$\Theta(\tau) = 1+\frac{\pi}{\Delta^{1/2}a^{1/2}} \sum_{\substack{m=1 \\ m\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4a)}}^{\infty} m^{1/2} e\left(\frac{\tau m}{4a}\right)F(m, 0)G(m, 0). \tag{4.38}$$

Die Behauptung folgt aus (4.38) und (4.35).

Hilfssatz 19. *Für jede Substitution der Gruppe* $\Gamma(4a)$ *ist*

$$\Theta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = (\gamma\tau+\delta)^{3/2} i^{3\,\mathrm{sgn}\,\gamma\,(\mathrm{sgn}\,\delta-1)/2}|\delta|^{-3/2}\prod_{k=1}^{3} S(a_k\beta\,\mathrm{sgn}\,\delta, |\delta|)\,\Theta(\tau).$$

Beweis. Ersetzt man in (4.2)

$$\tau \quad \text{durch} \quad \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}$$

und schreibt

$$\begin{cases} aq+\gamma H = q_0, \\ \beta q+\delta H = H_0, \end{cases} \quad \text{d. h.} \quad \begin{cases} \delta q_0-\gamma H_0 = q, \\ -\beta q_0+\alpha H_0 = H, \end{cases} \tag{4.39}$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}&\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, z\right) \\ &= 1+\frac{1}{2\Delta^{1/2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{3/2} \sum_{\substack{q,H=-\infty \\ (H,q)=1}}^{\infty}{}' i^{3(\mathrm{sgn}\,q-1)/2} \frac{\prod_{k=1}^{3} S(-a_k H\,\mathrm{sgn}\,q, |q|)}{|q|^{3/2}\left(\dfrac{q_0\tau+H_0}{\gamma\tau+\delta}\right)^{3/2}}\left|\frac{\gamma\tau+\delta}{q_0\tau+H_0}\right|^{z}.\end{aligned} \tag{4.40}$$

In (4.40) kann man jetzt q_0 und H_0 als neue Summationsbuchstaben statt q und H einführen. Dabei beachte man, daß die Glieder $q=0$, $H=\pm 1$ in der Summe auszuschließen sind und betrachte die Fälle $\gamma\neq 0$, $\gamma=0$ gesondert.

1. Es sei $\gamma\neq 0$. Dann sind in den neuen Summationsbuchstaben die Glieder $q_0=\gamma$, $H_0=\delta$ und $q_0=-\gamma$, $H_0=-\delta$ wegzulassen. Die Glieder $q=-\gamma$, $H=\alpha$ und $q=\gamma$, $H=-\alpha$ erhalten wir jetzt bei $q_0=0$, $H_0=\pm 1$. Nach Hilfssatz 2 und (3.2) ist für $\mathrm{Re}\, z>\frac{1}{2}$

(4.41)
$$\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, z\right)=1+\frac{1}{\Delta^{1/2}}(\gamma\tau+\delta)^{3/2}|\gamma\tau+\delta|^{z}(2|\gamma|)^{-3/2}$$
$$\times e(-3\operatorname{sgn}\gamma/8)\prod_{k=1}^{3} S(a_k\alpha\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|)+\frac{1}{2\Delta^{1/2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{3/2}(\gamma\tau+\delta)^{3/2}|\gamma\tau+\delta|^{z}$$
$$\times\sum_{\substack{q_0,H_0=-\infty\\(H_0q_0)=1}}^{\infty}{}'' i^{3(\operatorname{sgn}q_0-1)/2}e(-3\operatorname{sgn}\gamma/8)e(3\operatorname{sgn}qq_0\gamma/8)\frac{\prod_{k=1}^{3}S(-a_kH\operatorname{sgn}q, |q|)}{|q|^{3/2}(q_0\tau+H_0)^{3/2}}$$
$$\times|q_0\tau+H_0|^{-z},$$

wo zur Abkürzung $H=\alpha H_0-\beta q_0$ und $q=\delta q_0-\gamma H_0$ gesetzt ist. Ferner bedeuten die zwei Striche am Summenzeichen, daß die Glieder $q_0=0$, $H_0=\pm 1$; $q_0=\gamma$, $H_0=\delta$ und $q_0=-\gamma$, $H_0=-\delta$ auszuschließen sind.

Aus (1.1), (1.2), (4.39) und Hilfssatz 6 folgt

(4.42)
$$\prod_{k=1}^{3}S(-a_kH\operatorname{sgn}q, |q|)=\prod_{k=1}^{3}S\left(\begin{matrix}-\alpha H_0+\beta q_0\\-\gamma H_0+\delta q_0\end{matrix}; 0, 2a_k\right)$$
$$=e(-3\operatorname{sgn}q_0\gamma q/8)e(3\operatorname{sgn}\gamma\delta/8)$$
$$\times\left(\frac{|q|}{|q_0||\delta|}\right)^{3/2}\prod_{k=1}^{3}S(a_k\beta\operatorname{sgn}\delta, |\delta|)\prod_{k=1}^{3}S(-a_kH_0\operatorname{sgn}q_0, |q_0|).$$

Schreibt man wieder q, H statt q_0, H_0, so bekommt man aus (4.41) und (4.42)

(4.43)
$$\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, z\right)=1+\frac{(\gamma\tau+\delta)^{3/2}|\gamma\tau+\delta|^{z}}{\Delta^{1/2}(2|\gamma|)^{3/2}}e(-3\operatorname{sgn}\gamma/8)\prod_{k=1}^{3}S(a_k\alpha\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|)$$
$$-\Delta^{-1/2}(2|\gamma\delta|)^{-3/2}e(3\operatorname{sgn}\gamma\delta/8)\prod_{k=1}^{3}S(-a_k\delta\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|)\prod_{k=1}^{3}S(a_k\beta\operatorname{sgn}\delta, |\delta|)+$$

$$+\frac{(\gamma\tau+\delta)^{3/2}|\gamma\tau+\delta|^{z}}{2\Delta^{1/2}(2|\delta|)^{3/2}}e(3(1-\operatorname{sgn}\gamma+\operatorname{sgn}\gamma\delta)/8)\prod_{k=1}^{3}S(a_k\beta\operatorname{sgn}\delta, |\delta|)$$
$$\times\sum_{\substack{q,H=-\infty\\(H,q)=1}}^{\infty}{}' i^{3(\operatorname{sgn}q-1)/2}\frac{\prod_{k=1}^{3}S(-a_kH\operatorname{sgn}q, |q|)}{|q|^{3/2}(q\tau+H)^{3/2}}|q\tau+H|^{-z},$$

wo der Strich bedeutet, daß nur die Glieder $q=0$ auszuschließen sind.

Es ist (vgl. [9], S. 123, Formel (6.47))

$$S(a_k\alpha\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|)S(-a_k\beta\operatorname{sgn}\alpha, |\alpha|)=e(\operatorname{sgn}\alpha\gamma/8)(2a_k|\alpha\gamma|)^{1/2},$$

d.h.

(4.44)
$$\prod_{k=1}^{3}S(a_k\alpha\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|)\prod_{k=1}^{3}S(-a_k\beta\operatorname{sgn}\alpha, |\alpha|)=e(3\operatorname{sgn}\alpha\gamma/8)(2|\alpha\gamma|)^{3/2}\Delta^{1/2}.$$

Ersetzt man hier α, β, γ, δ durch δ, $-\beta$, $-\gamma$, α, so ergibt sich

(4.45)
$$\prod_{k=1}^{3}S(-a_k\delta\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|)\prod_{k=1}^{3}S(a_k\beta\operatorname{sgn}\delta, |\delta|)$$
$$=e(-3\operatorname{sgn}\delta\gamma/8)(2|\delta\gamma|)^{3/2}\Delta^{1/2}.$$

Aus (4.44) folgt

(4.46)
$$\Delta^{-1/2}(2|\gamma|)^{-3/2}e(-3\operatorname{sgn}\gamma/8)\prod_{k=1}^{3}S(a_k\alpha\operatorname{sgn}\gamma, |\gamma|)\prod_{k=1}^{3}S(-a_k\beta\operatorname{sgn}\alpha, |\alpha|)$$
$$=e(3\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn}\alpha-1)/8)|\alpha|^{3/2}.$$

Ferner ist nach Hilfssatz 6

(4.47)
$$e(3(-\operatorname{sgn}\gamma+\operatorname{sgn}\gamma\delta)/8)|\delta|^{-3/2}\prod_{k=1}^{3}S(a_k\beta\operatorname{sgn}\delta, |\delta|)$$
$$\times\prod_{k=1}^{3}S(-a_k\beta\operatorname{sgn}\alpha, |\alpha|)=e(3\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn}\alpha-1)/8)|\alpha|^{3/2}.$$

Aus (4.43), (4.45)-(4.47) und (4.2) folgt für $\mathrm{Re}\, z>\frac{1}{2}$

(4.48)
$$\Psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}, z\right)$$
$$=(\gamma\tau+\delta)^{3/2}|\gamma\tau+\delta|^{z}i^{3\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sng}\delta-1)/2}|\delta|^{-3/2}\prod_{k=1}^{3}S(a_k\beta\operatorname{sgn}\delta, |\delta|)\Psi(\tau, z).$$

2. Es sei $\gamma=0$. Wegen $\alpha\equiv\delta\equiv 1\ (\mathrm{mod}\, 4a)$ ist $\alpha=\delta=1$. Man hat daher in den neuen Summationsbuchstaben die Glieder $q_0=0$,

$H_0 = \pm 1$ wegzulassen, was durch $\sum'$ angedeutet sei. Es ergibt sich für $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$

$$\Psi(\tau+\beta, z)$$

$$= 1 + \frac{1}{2\Delta^{1/2}}\left(\frac{i}{2}\right)^{3/2} \sum_{\substack{q_0, H_0=-\infty \\ (H_0,q_0)=1}}^{\infty}{}' \, i^{3(\operatorname{sgn} q_0 - 1)/2} \frac{\prod_{k=1}^{3} S(-a_k H_0 \operatorname{sgn} q_0, |q_0|)}{|q_0|^{3/2}(q_0\tau+H_0)^{3/2}} |q_0\tau+H_0|^{-} ,$$

d.h.

$$(4.49) \qquad \Psi(\tau+\beta, z) = \Psi(\tau, z).$$

Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung gelten die Identitäten (4.48) und (4.49) auch in D, d.h. insbesondere für $z = 0$. Die Behauptung des Hilfssatzes folgt jetzt aus (4.37).

Hilfssatz 20. *Es sei $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Dann gilt in der Umgebung von*

$$\tau = -\frac{\delta}{\gamma} \qquad (\gamma \neq 0,\ (\delta, \gamma) = 1)$$

die Entwicklung

$$(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\Theta(\tau) = e\left(\frac{h}{16a}\cdot\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)\sum_{n=0}^{\infty} A_n e\left(\frac{n}{4a}\cdot\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right),$$

wobei $h = 1$ oder 3.

Beweis. Es sei

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

eine beliebige Matrix der Gruppe Γ. Nach Hecke und Petersson schreibt man

$$(4.50) \qquad (\gamma\tau+\delta)^{-3/2}\Theta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = \Theta | L.$$

Aus dieser Definition ergibt sich bekanntlich für beliebige Matrizen L_1 und L_2 von Γ, mit einer geeigneten Einheitswurzel ε,

$$(4.51) \qquad \varepsilon\cdot\Theta | L_1 L_2 = (\Theta | L_1) | L_2.$$

Aus Hilfssatz 2 ergibt sich ferner ohne Schwierigkeit, daß $\varepsilon = 1$ in den folgenden vier Fällen ist:

$$(4.52) \qquad \left\{\begin{array}{lll} \gamma_1\gamma_2 \neq 0 & \text{und} & (\gamma_1 a_2 + \delta_1\gamma_2)\gamma_2 > 0, \\ \gamma_1 \neq 0,\ \gamma_2 = 0 & \text{und} & \delta_2 > 0, \\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0 & \text{und} & \delta_1 > 0, \\ \gamma_1 = \gamma_2 = 0 & \text{und} & \delta_2 > 0. \end{array}\right.$$

Für eine beliebige Matrix V der Gruppe $\Gamma(4a)$ ist nach Hilfssatz 19

$$(4.53) \qquad \Theta | V = \zeta\Theta, \quad \zeta = e\left(\frac{h}{4}\right) \quad (h = 1 \text{ oder } 3).$$

In der Tat ergibt sich aus Hilfssatz 5

$$\left\{i^{3\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn}\delta-1)/2}|\delta|^{-3/2}\prod_{k=1}^{3} S(a_k\beta\operatorname{sgn}\delta, |\delta|)\right\}^4 = 1.$$

Es sei $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist $U^{4a} = \begin{pmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ eine Matrix der Gruppe $\Gamma(4a)$; also gehört auch

$$LU^{4a}L^{-1} = \begin{pmatrix} 1-4a\alpha\gamma & 4a\alpha^2 \\ -4a\gamma^2 & 4a\alpha\gamma+1 \end{pmatrix}$$

dieser Gruppe an, und es ist nach (4.53)

$$(4.54) \qquad \Theta | LU^{4a}L^{-1} = \zeta\Theta.$$

Setzt man

$$(4.55) \qquad \Theta | L = \varphi(\tau),$$

so ist nach (4.51) und (4.52)

$$\Theta | LU^{4a} = \varphi(\tau) | U^{4a} = \varphi(\tau+4a).$$

Andererseits hat man nach (4.51), (4.52) und (4.54)

$$\Theta | LU^{4a} = (\Theta | LU^{4a}L^{-1}) | L = \zeta\varphi(\tau).$$

Folglich ist

$$\varphi(\tau+4a) = \zeta\varphi(\tau).$$

Für

$$(4.56) \qquad \varphi_1(\tau) = e\left(-\frac{h\tau}{16a}\right)\varphi(\tau)$$

ist

$$\varphi_1(\tau+4a) = \varphi_1(\tau).$$

Die reguläre Funktion $\varphi_1(\tau)$ hat mithin die Periode $4a$. Daher ist sie in eine absolut konvergente Fourierreihe

$$(4.57) \qquad \varphi_1(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e\left(\frac{\tau n}{4a}\right)$$

entwickelbar. Hierbei sind die Koeffizienten A_n durch das Integral

$$A_n = \frac{1}{4a} \int_{\tau_0-2a}^{\tau_0+2a} \varphi_1(\tau) e\left(-\frac{\tau n}{4a}\right) d\tau \tag{4.58}$$

gegeben, wo τ_0 eine beliebiger Punkt der oberen Halbebene ist.

Aus (4.50), (4.55)-(4.57) folgt

$$(\gamma\tau+\delta)^{-3/2} \Theta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e\left(\frac{h\tau}{16a}\right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n e\left(\frac{\tau n}{4a}\right) \tag{4.59}$$

und

$$A_n = \frac{1}{4a} \int_{\tau_0-2a}^{\tau_0+2a} (\gamma\tau+\delta)^{-3/2} \Theta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) e\left(-\frac{h+4n}{16a}\tau\right) d\tau. \tag{4.60}$$

Ferner zeigt man wie beim Beweis des Hilfssatzes 25 von [8] (S. 165--166), daß

$$|A_n| \leqslant \exp\frac{\pi\eta_0}{8a}(h+4n)\left(\eta_0^{-3/2} + K\eta^{-15/2}(4a^2+\eta_0^2)^6\right) \qquad (\eta_0 = \operatorname{Im}\tau_0 > 0).$$

Hieraus folgt $|A_n| \to 0$ für $\eta_0 \to \infty$ und $n < 0$ (da auch $h+4n < 0$).

Man hat somit

$$(\gamma\tau+\delta)^{-3/2} \Theta\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = e\left(\frac{h\tau}{16a}\right) \sum_{n=0}^{\infty} A_n e\left(\frac{\tau n}{4a}\right).$$

Ersetzt man hier

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \tau, \quad \text{durch} \quad \delta,\ -\beta,\ -\gamma,\ \alpha,\ \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},$$

so ergibt sich die Behauptung.

Es sei

$$M = 4an. \tag{4.61}$$

Aus (2.2) folgt dann

$$M = \sum_{k=1,\ y_k\equiv 0 \pmod{2a_k}}^{3} \frac{a}{a_k} y_k^2. \tag{4.62}$$

$R(M;f)$ bezeichne die Lösungszahl der Gleichung (4.62). Offenbar ist

$$r(n;f) = R(M;f). \tag{4.63}$$

Aus (1.5) und (4.62) folgt

$$\prod_{k=1}^{3} \vartheta_{00}(\tau;0,2a_k) = 1 + \sum_{\substack{M=1\\ M\equiv 0 \pmod{4a}}}^{\infty} R(M;f) Q^M, \tag{4.64}$$

wobei $Q = e\left(\frac{\tau}{4a}\right)$.

Ferner sei

$$\begin{aligned} \psi(\tau) &= \psi(\tau;a_1,a_2,a_3) \\ &= \prod_{k=1}^{3} \vartheta_{00}(\tau;0,2a_k) - \Theta(\tau;a_1,a_2,a_3) - \mathrm{A}\prod_{k=1}^{3} \vartheta_{g_k h_k}(\tau;0,2N_k), \end{aligned} \tag{4.65}$$

wobei g_k gerade, $N_k|a$ und $2|a\sum_{k=1}^{3}\frac{h_k^2}{N_k}$.

Hilfssatz 21. *Die Funktion $\psi^4(\tau)$ ist bei konstantem A eine ganze Modulform der Stufe $4a$ und der Dimension -6.*

Beweis. Nach (1.5), (4.64) und Hilfssatz 18 erfüllt die Funktion $\psi(\tau)$, und folglich auch $\psi^4(\tau)$, die Bedingungen 1 und 3 einer ganzen Modulform (vgl. Definition 1 in [8]).

Jede Substitution der Gruppe $\Gamma(4a)$ gehört auch den Gruppen $\Gamma(4a_k)$ und $\Gamma(4N_k)$ an. Aus $|\delta| \equiv \pm 1 \pmod{4a}$ folgt

$$\left(\frac{a_k}{|\delta|}\right) = \left(\frac{N_k}{|\delta|}\right) = 1.$$

Daher gilt, nach Hilfssatz 15 von [8], Hilfssätze 19 und 5 der vorliegenden Arbeit, für jede Substitution der Gruppe $\Gamma(4a)$

$$\psi\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = i^{3\operatorname{sgn}\gamma(\operatorname{sgn}\delta-1)/2}(\gamma\tau+\delta)^{3/2}\left(\frac{\beta\operatorname{sgn}\delta}{|\delta|}\right) I^3(|\delta|)\,\psi(\tau).$$

Folglich

$$\psi^4\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right) = (\gamma\tau+\delta)^6 \psi^4(\tau). \tag{4.66}$$

Die Bedingung 2 von Definition 1 ist also erfüllt.

Die Identität (4.66) schreibe man in der Gestalt

$$\psi^4 | V = \psi^4,$$

wo V eine beliebige Matrix der Gruppe $\Gamma(4a)$ ist. Die Funktion $\psi^4(\tau)$

icm©

ist regulär, folglich ergibt wie beim von Hilfssatz 20 für eine beliebige Matrix L der Gruppe Γ

$$(\gamma\tau+\delta)^{-6}\psi^4\left(\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e\left(\frac{\tau n}{4a}\right).$$

Ersetzt man hier

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \tau \quad \text{durch} \quad \delta,\ -\beta,\ -\gamma,\ \alpha,\ \frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta},$$

so folgt

$$(4.67)\qquad (\gamma\tau+\delta)^6\psi^4(\tau)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e\left(\frac{n}{4a}\cdot\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n z^{4n},$$

wobei

$$(4.68)\qquad z=e\left(\frac{1}{16a}\cdot\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

Andererseits hat man nach Hilfssatz 16 von [8] und Hilfssatz 20 der vorliegenden Arbeit

$$(4.69)\qquad (\gamma\tau+\delta)^{3/2}\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{00}(\tau;0,2a_k)=\sum_{n=0}^{\infty}D_n z^n,$$

$$(4.70)\qquad (\gamma\tau+\delta)^{3/2}\prod_{k=1}^{3}\vartheta_{g_k h_k}(\tau;0,2N_k)=\sum_{n=0}^{\infty}D'_n z^n,$$

$$(4.71)\qquad (\gamma\tau+\delta)^{3/2}\Theta(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}G_n z^n.$$

Aus (4.65), (4.69)-(4.71) folgt

$$(4.72)\qquad (\gamma\tau+\delta)^6\psi^4(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n z^n.$$

Aus (4.67), (4.72) und (4.68) ergibt sich

$$(\gamma\tau+\delta)^6\psi^4(\tau)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n e\left(\frac{n}{4a}\cdot\frac{\alpha\tau+\beta}{\gamma\tau+\delta}\right).$$

Die Bedingung 4 von Definition 1 ist also auch erfüllt.

In den folgenden Paragraphen bezeichnen α,β,γ nichtnegative ganze Zahlen; n natürliche Zahlen; m positive ungerade Zahlen; ω quadratfreie Zahlen.

§ 5. Nach (4.38) gilt

$$(5.1)\qquad \Theta(\tau;a_1,a_2,a_3)=1+\sum_{\substack{M=1\\ M\equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ a)}}^{\infty}\varrho(M;a_1,a_2,a_3)Q^M,$$

wo

$$(5.2)\qquad \varrho(M;a_1,a_2,a_3)=\frac{\pi}{\Delta^{1/2}a^{1/2}}M^{1/2}F(M,0)G(M,0).$$

In diesem Paragraphen wird eine Formel für die Funktion $\varrho(M;a_1,a_2,a_3)$ hergeleiten, die für numerische Rechnungen geeignet ist.

Sei

$$(5.3)\qquad X_2=F(M,0)$$

und für $p>2$

$$(5.4)\qquad X_p(z)=1+\sum_{\lambda=1}^{\infty}A(p^\lambda,z),\qquad X_p=X_p(0).$$

Hilfssatz 22.

$$G(M,0)=\prod_{p>2}X_p.$$

Beweis. Da die Funktion $A(q,z)$ in q multiplikativ ist und die Reihe

$$\sum_{q=1,(q,2)=1}^{\infty}A(q,z)$$

für $\mathrm{Re}\,z\geqslant\varepsilon$, $\varepsilon>0$, absolut konvergiert, so ist nach (4.13) und (5.4)

$$G(M,z)=\prod_{p>2}X_p(z)\qquad (\mathrm{Re}\,z\geqslant\varepsilon,\ \varepsilon>0).$$

Ferner ist erstens

$$(5.5)\qquad \prod_{p>2}X_p(z)=\prod_{p>2,\,p\mid M}X_p(z)\prod_{p\nmid 2M}X_p(z);$$

zweitens nach (4.27)

$$(5.6)\qquad \prod_{p>2,\,p\mid M}X_p(z)=T;$$

drittens für $\mathrm{Re}\,z\geqslant\varepsilon$, $\varepsilon>0$, nach (4.20) und (4.22),

$$(5.7)\qquad \prod_{p\nmid 2M}X_p(z)=\bar{L}(z+1,\chi_1)=S.$$

Aus (5.4), (4.19) und (4.21) folgt

$$\prod_{p\nmid 2M} X_p = \prod_{p} \left(1+\chi_1(p)p^{-1}\right). \tag{5.8}$$

Da nach Hilfssatz 11 die Reihe $\sum \chi_1(p)p^{-1}$ konvergiert und die Reihe $\sum (\chi_1(p)p^{-1})^2$ offenbar absolut konvergiert, so konvergiert nach Hilfssatz 9 das Produkt $\prod \left(1+\chi_1(p)p^{-1}\right)$. Also ist nach den Hilfssätzen 11 und 12

$$\prod_{p} \left(1+\chi_1(p)p^{-1}\right) = \bar{L}(1, \chi_1). \tag{5.9}$$

Aus (5.8) und (5.9) folgt, das (5.7) auch für $z = 0$ gilt. Somit ergibt sich die Behauptung aus (4.25) und (5.5)-(5.7).

Hilfssatz 23. *Es sei* $n = 2^\alpha m$, $a_k = 2^{\gamma_k} b_k$ $(k = 1, 2, 3)$, $\gamma_1 \geqslant \gamma_2 \geqslant \gamma_3 = 0$, $\gamma = \sum_{k=1}^{3} \gamma_k$, $(b_1, b_2, b_3) = 1$. *Dann ist*

1. *für* $2|\gamma_2$, $2|\gamma_1$

$$X_2 = \left(1+(-1)^{(m-b_3)/4}\right)2^{\alpha/2+1}$$
$$\text{falls } 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m \equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= 0 \quad \text{falls } 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2|\alpha,\ m \not\equiv b_3 \pmod 4 \text{ oder falls}$$
$$0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2\nmid\alpha \text{ oder falls } \alpha = \gamma_2-1;$$
$$= \left(1+(-1)^{(m-b_3)/2}\right)2^{\alpha/2} \quad \text{falls } \alpha = \gamma_2-2;$$
$$= \left(1+(-1)^{(m-b_3)/2}\right)2^{\gamma_2/2}$$
$$\text{falls } \gamma_2 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_1-2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= 2^{\gamma_2/2} \quad \text{falls } \alpha = \gamma_2 \leqslant \gamma_1-2,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\alpha-\gamma_2)2^{\gamma_2/2-1} + \left(1-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2\right)2^{\gamma_2/2}$$
$$\text{falls } \gamma_2 < \alpha \leqslant \gamma_1-2,\ 2|\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3-2m)/4}\right)2^{\gamma_2/2}$$
$$\text{falls } \gamma_2 < \alpha < \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= 2^{\gamma_2/2} \quad \text{falls } \gamma_2 < \alpha = \gamma_1-1,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\alpha-\gamma_2-1)2^{\gamma_2/2-1}$$
$$\text{falls } \gamma_2 < \alpha \leqslant \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4;$$

$$X_2 = \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2-2)2^{\gamma_2/2-1} + 2^{\gamma_2/2}\cdot 3$$
$$+\left((-1)^{(m-\Sigma b_k)/4}-1\right)2^{-(\alpha-\gamma)/2-1};$$
$$\text{falls } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2+2,\ 2|\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$
$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2-2)2^{\gamma_2/2-1} + \left(1-2^{-(\alpha-\gamma_1)/2-1}\right)\cdot 2^{\gamma_2/2}\cdot 3$$
$$\text{falls } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2+2,\ 2|\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \not\equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$
$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2-2)2^{\gamma_2/2-1} + \left(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\right)2^{\gamma_2/2}\cdot 3$$
$$\text{falls } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2+2,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \left(2^{(\alpha-\gamma_1)/2+2} + (-1)^{(m-\Sigma b_k)/4}-1\right)2^{\gamma_1-\alpha/2-1}$$
$$\text{falls } \alpha \geqslant \gamma_1 = \gamma_2,\ 2|\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$
$$= \left(2^{(\alpha-\gamma_1)/2+2}-3\right)2^{\gamma_1-\alpha/2-1}$$
$$\text{falls } \alpha \geqslant \gamma_1 = \gamma_2,\ 2|\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \not\equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$
$$= \left(2^{(\alpha-\gamma_1+3)/2}-3\right)2^{\gamma_1-(\alpha+1)/2} \quad \text{falls } \alpha \geqslant \gamma_1 = \gamma_2,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \left\{\left(1+(-1)^{(b_1+b_3)/2}\right)2^{(\alpha-\gamma_1)/2+1} + (-1)^{(m-\Sigma b_k)/4} - (-1)^{(b_1+b_3)/2}\right\}2^{-(\alpha-\gamma)/2-1}$$
$$\text{falls } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$
$$= \left\{\left(1+(-1)^{(b_1+b_3)/2}\right)2^{(\alpha-\gamma_1)/2+1} - (-1)^{(b_1+b_3)/2}\cdot 3\right\}2^{-(\alpha-\gamma)/2-1}$$
$$\text{falls } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \not\equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4;$$
$$= \left\{\left(1+(-1)^{(b_1+b_3)/2}\right)2^{(\alpha-\gamma_1+1)/2} - (-1)^{(b_1+b_3)/2}\cdot 3\right\}2^{-(\alpha-\gamma+1)/2}$$
$$\text{falls } \alpha \geqslant \gamma_1 \geqslant \gamma_2,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$

2. *für* $2|\gamma_2$, $2\nmid\gamma_1$

$$X_2 = 2^{\gamma_2/2} \quad \text{falls } \alpha = \gamma_2 = \gamma_1-1 \text{ oder falls } \alpha = \gamma_2 < \gamma_1-1,$$
$$b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4, \text{ oder falls } \gamma_2 < \alpha = \gamma_1-1,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \left(1+(-1)^{(m-b_3)/2}\right)2^{\gamma_2/2} \quad \text{falls } \gamma_2 \leqslant \alpha < \gamma_1-1,\ 2|\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4;$$

$$X_2 = \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\alpha-\gamma_2)\,2^{\gamma_2/2-1}+\left(1-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2\right)2^{\gamma_2/2}$$

falls $\gamma_2 < \alpha \leqslant \gamma_1-1,\ 2\,|\,\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3-2m)/4}\right)2^{\gamma_2/2}$$

falls $\gamma_2 < \alpha < \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\alpha-\gamma_2-1)\,2^{\gamma_2/2-1}$$

falls $\gamma_2 < \alpha < \gamma_1-1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2+1)\,2^{\gamma_2/2-1}-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2}\cdot 3$$

falls $\alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\,|\,\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2+1)\,2^{\gamma_2/2-1}+$$
$$+\left((-1)^{(m-b_1)/4}-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)2^{-(\alpha-\gamma)/2-1}$$

falls $\alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv b_1 \pmod 4$;

$$= \left(1+(-1)^{(b_2+b_3)/4}\right)(\gamma_1-\gamma_2+1)\,2^{\gamma_2/2-1}-(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1}\cdot 3$$

falls $\alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \not\equiv b_1 \pmod 4$;

$$= \left\{\left(1+(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\right)2^{(\alpha-\gamma_1+1)/2}-(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\cdot 3\right\}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2}$$

falls $\alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\,|\,\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left\{\left(1+(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\right)2^{(\alpha-\gamma_1)/2+1}-(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\cdot 3\right\}2^{-(\alpha-\gamma)/2-1}$$

falls $\alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv b_1 \pmod 4$;

$$= \left\{\left(1+(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\right)2^{(\alpha-\gamma_1)/2+1}+\right.$$
$$\left.+\left((-1)^{(b_1+2b_3-m)/4}-(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\right)\right\}2^{-(\alpha-\gamma)/2-1}$$

falls $\alpha \geqslant \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \not\equiv b_1 \pmod 4$;

wenn $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-1$, *so hat* X_2 *dieselben Werte wie in* 1;

3. *für* $2\nmid\gamma_2,\ 2\,|\,\gamma_1$

$$X_2 = \left(1+(-1)^{(m-b_3)/4}\right)2^{\alpha/2+1} \quad \textit{falls } 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2\,|\,\alpha,\ m \equiv b_3 \pmod 4;$$

$= 0$ *falls* $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2\,|\,\alpha,\ m \not\equiv b_3 \pmod 4$

oder falls $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2-3,\ 2\nmid\alpha$ *oder falls* $\alpha = \gamma_2-2$;

$$= \left(1+(-1)^{(m-b_2)/4}\right)2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\gamma_2 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2\nmid\alpha,\ m \equiv b_2 \pmod 4$

oder falls $\alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv b_2 \pmod 4$;

$$X_2 = \left(1+(-1)^{(b_2+2b_3-m)/4}\right)2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\gamma_2 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2\nmid\alpha,\ m \not\equiv b_2 \pmod 4$

oder falls $\alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \not\equiv b_2 \pmod 4$;

$$= \left(1+(-1)^{(m-b_3)/4}\right)2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\gamma_2-1 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2\,|\,\alpha,\ m \equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left(1+(-1)^{(2b_2+b_3-m)/4}\right)2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\gamma_2-1 \leqslant \alpha < \gamma_1-2,\ 2\,|\,\alpha,\ m \not\equiv b_3 \pmod 4$;

$= 2^{(\gamma_2-1)/2}$ *falls* $\gamma_2-1 \leqslant \alpha = \gamma_1-2$ *oder falls* $\alpha = \gamma_1-1$,

$b_1 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv b_2 \pmod 4$ *oder falls* $\alpha = \gamma_1-1$,

$b_1 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \not\equiv b_2 \pmod 4$ *oder falls* $\alpha = \gamma_1$;

$$= \left\{1+(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}\left(1-2^{-(\alpha-\gamma_1)/2}\cdot 3\right)\right\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\alpha > \gamma_1,\ 2\,|\,\alpha,\ b_1 \equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left\{1+(-1)^{(b_1+b_3)/4}\left(1-2^{-(\alpha-\gamma_1)/2}\cdot 3\right)\right\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\alpha > \gamma_1,\ 2\,|\,\alpha,\ b_1 \not\equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left\{1+(-1)^{(b_1+b_3)/4}+\left((-1)^{(m-b_2)/4}-(-1)^{(b_1+b_3)/4}\right)2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\right\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv b_2 \pmod 4$;

$$= \left\{1+(-1)^{(b_1+b_3)/4}\left(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\cdot 3\right)\right\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \not\equiv b_3 \pmod 4,\ m \not\equiv b_2 \pmod 4$;

$$= \left\{1+(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}+\left((-1)^{(b_2+2b_3-m)/4}-(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}\right)2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\right\}$$

$\times\, 2^{(\gamma_2-1)/2}$ *falls* $\alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \not\equiv b_2 \pmod 4$;

$$= \left\{1+(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}\left(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\cdot 3\right)\right\}2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv b_3 \pmod 4,\ m \equiv b_2 \pmod 4$.

4. *für* $2\nmid\gamma_2,\ 2\nmid\gamma_1$

$$X_2 = \left(1+(-1)^{(m-b_3)/4}\right)2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \not\equiv b_2 \pmod 4,\ m \equiv b_3 \pmod 4$;

$$= \left(1+(-1)^{(2b_2+b_3-m)/4}\right)2^{(\gamma_2-1)/2}$$

falls $\alpha = \gamma_1-1,\ b_1 \equiv b_2 \pmod 4,\ m \not\equiv b_3 \pmod 4$;

$$X_2 = 2^{(\gamma_2-1)/2} \quad \textit{falls } \alpha = \gamma_1 - 1,\ b_1 \equiv b_2 \pmod 4,\ m \equiv b_3 \pmod 4 \textit{ oder}$$
$$\textit{falls } \alpha = \gamma_1 - 1,\ b_1 \not\equiv b_2 \pmod 4,\ m \not\equiv b_3 \pmod 4 \textit{ oder falls } \alpha = \gamma_1;$$
$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\cdot 3)\}\,2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\textit{falls } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv b_2 \pmod 4,\ m \equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}+\big((-1)^{(2b_2+b_3-m)/4}-(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}\big)\,2^{(\alpha-\gamma_1+1)/2}\}\times$$
$$\times\, 2^{(\gamma_2-1)/2} \textit{ falls } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \equiv b_2 \pmod 4,\ m \not\equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2)/4}+\big((-1)^{(m-b_3)/4}-(-1)^{(b_1+b_2)/4}\big)\,2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\}\,2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\textit{falls } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \not\equiv b_2 \pmod 4,\ m \equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1+1)/2}\cdot 3)\}\,2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\textit{falls } \alpha > \gamma_1,\ 2|\alpha,\ b_1 \not\equiv b_2 \pmod 4,\ m \not\equiv b_3 \pmod 4;$$
$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1)/2}\cdot 3)\}\,2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\textit{falls } \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \equiv b_2 \pmod 4;$$
$$= \{1+(-1)^{(b_1+b_2)/4}(1-2^{-(\alpha-\gamma_1)/2}\cdot 3)\}\,2^{(\gamma_2-1)/2}$$
$$\textit{falls } \alpha > \gamma_1,\ 2\nmid\alpha,\ b_1 \not\equiv b_2 \pmod 4;$$

wenn $0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_2 - 2$ *oder* $\gamma_2 - 1 \leqslant \alpha \leqslant \gamma_1 - 2$, *so hat* X_2 *dieselben Werte wie in* 3.

Beweis. In (4.12) setze man $z = 0$ und $m = M = 4an$. Dann ergibt sich, nach Hilfssatz 7 von [8]:

1. für $2|\gamma_2$, $2|\gamma_1$

$$\begin{aligned}
R_1 &= 0 && \text{falls} \quad \lambda > \alpha+2,\\
&= (-1)^{(m-b_3)/2}\cdot 2^{\alpha/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+2,\\
&= -2^{(\alpha-1)/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+1,\\
&= 2^{\lambda/2-1} && \text{falls} \quad \lambda < \alpha+1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_2 &= (-1)^{(m-b_3)/4}\cdot 2^{\alpha/2+1} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+3,\ m \equiv b_3 \pmod 4,\\
&= 0 && \text{in übrigen Fällen};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_3 &= (-1)^{(m-b_3)/2}\cdot 2^{\gamma_2/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+2,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\\
&= -2^{\gamma_2/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+1,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= 2^{\gamma_2/2} && \text{falls} \quad \lambda < \alpha+1,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= 0 && \text{in übrigen Fällen};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 &= (-1)^{(b_2+b_3-2m)/4}\cdot 2^{\gamma_2/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+2,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\\
&= -(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{\gamma_2/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+1,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{\gamma_2/2} && \text{falls} \quad \lambda < \alpha+1,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= 0 && \text{in übrigen Fällen};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_5 &= 0 && \text{falls} \quad \lambda > \alpha+2,\\
&= (-1)^{(m-b_3)/2}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+2,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(m-b_1)/2}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+2,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= -(-1)^{(b_1+b_3)/2}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+1,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\\
&= -2^{-(\alpha-\gamma+1)/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+1,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_1+b_3)/2}\cdot 2^{-\lambda/2+\gamma/2} && \text{falls} \quad \lambda < \alpha+1,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\\
&= 2^{-\lambda/2+\gamma/2} && \text{falls} \quad \lambda < \alpha+1,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_6 &= (-1)^{(m-\Sigma b_k)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+3,\ m \equiv \sum_{k=1}^{3} b_k \pmod 4,\\
&= 0 && \text{in übrigen Fällen}.
\end{aligned}$$

2. für $2|\gamma_2$, $2\nmid\gamma_1$

R_1, R_2, R_3 und R_4 dieselben Werte haben wie in 1;

$$\begin{aligned}
R_5 &= (-1)^{(m-b_1)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+3,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\\
& && \qquad m \equiv b_1 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_1+2b_3-m)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+3,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\\
& && \qquad m \not\equiv b_1 \pmod 4,\\
&= 0 && \text{in übrigen Fällen};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_6 &= 0 && \text{falls} \quad \lambda > \alpha+2,\\
&= (-1)^{(b_2+b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+2,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(2b_1+b_2+b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+2,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= -(-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+1,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\\
&= -(-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2} && \text{falls} \quad \lambda = \alpha+1,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(2b_1+b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-\lambda/2+\gamma/2} && \text{falls} \quad \lambda < \alpha+1,\ b_2 \equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-\lambda/2+\gamma/2} && \text{falls} \quad \lambda < \alpha+1,\ b_2 \not\equiv b_3 \pmod 4.
\end{aligned}$$

3. für $2\nmid\gamma_2$, $2\mid\gamma_1$

R_1 und R_2 dieselben Werte haben wie in 1;

$$\begin{aligned}
R_3 &= (-1)^{(m-b_2)/4}\cdot 2^{(\gamma_2-1)/2} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+3,\ m\equiv b_2 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_2+2b_3-m)/4}\cdot 2^{(\gamma_2-1)/2} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+3,\ m\not\equiv b_2 \pmod 4,\\
&= 0 && \text{in übrigen Fällen;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_4 &= (-1)^{(m-b_3)/4}\cdot 2^{(\gamma_2-1)/2} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+3,\ m\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(2b_2+b_3-m)/4}\cdot 2^{(\gamma_2-1)/2} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+3,\ m\not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= 0 && \text{in übrigen Fällen;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_5 &= (-1)^{(m-b_2)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls}\ \lambda = \alpha+3,\ b_1\not\equiv b_3,\ m\equiv b_2 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_2+2b_3-m)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls}\ \lambda = \alpha+3,\ b_1\equiv b_3,\ m\not\equiv b_2 \pmod 4,\\
&= 0 && \text{in übrigen Fällen;}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_6 &= 0 && \text{falls}\quad \lambda > \alpha+2,\\
&= (-1)^{(b_1+b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+2,\ b_1\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_1+2b_2+b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+2,\ b_1\not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= -(-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+1,\ b_1\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= -(-1)^{(b_1+b_3)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+1,\ b_1\not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_1+2b_2+b_3)/4}\cdot 2^{-\lambda/2+\gamma/2} && \text{falls}\quad \lambda < \alpha+1,\ b_1\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_1+b_3)/4}\cdot 2^{-\lambda/2+\gamma/2} && \text{falls}\quad \lambda < \alpha+1,\ b_1\not\equiv b_3 \pmod 4.
\end{aligned}$$

4. für $2\nmid\gamma_2$, $2\nmid\gamma_1$

R_1, R_2, R_3 und R_4 dieselben Werte haben wie in 3;

$$\begin{aligned}
R_5 &= 0 && \text{falls}\quad \lambda > \alpha+2,\\
&= (-1)^{(b_1+b_2-2m)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+2,\ b_1\equiv b_2 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_1+b_2+2b_3-2m)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+2,\ b_1\not\equiv b_2 \pmod 4,\\
&= -(-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+1,\ b_1\equiv b_2 \pmod 4,\\
&= -(-1)^{(b_1+b_2)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma+1)/2} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+1,\ b_1\not\equiv b_2 \pmod 4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_5 &= (-1)^{(b_1+b_2+2b_3)/4}\cdot 2^{-\lambda/2+\gamma/2} && \text{falls}\quad \lambda < \alpha+1,\ b_1\equiv b_2 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(b_1+b_2)/4}\cdot 2^{-\lambda/2+\gamma/2} && \text{falls}\quad \lambda < \alpha+1,\ b_1\not\equiv b_2 \pmod 4;\\
R_6 &= (-1)^{(m-b_3)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+3,\ b_1\not\equiv b_2 \pmod 4,\\
& && \qquad m\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= (-1)^{(2b_2+b_3-m)/4}\cdot 2^{-(\alpha-\gamma)/2-1} && \text{falls}\quad \lambda = \alpha+3,\ b_1\equiv b_2 \pmod 4,\\
& && \qquad m\not\equiv b_3 \pmod 4,\\
&= 0 && \text{in übrigen Fällen.}
\end{aligned}$$

Aus (5.3), (4.12) und den Werten von R_k folgt die Behauptung.

Hilfssatz 24. *Es sei* $p>2$, $p^{\beta}\| n$, $p^{l}\| \Delta$, $(a_1, a_2, a_3) = 1$. *Ferner seien* $\bar{a}, a', \underline{a}$ *und* $\bar{l}, l'$ *wie beim Hilfssatz* 16,I *definiert. Dann ist*

$$\begin{aligned}
X_p &= \left(1+\left(\frac{p^{-\beta}n\underline{a}}{p}\right)\right)p^{\beta/2} && \text{für}\quad l'\geqslant\beta+1,\ 2\mid\beta;\\
&= 0 && \text{für}\quad l'\geqslant\beta+1,\ 2\nmid\beta;\\
&= \left\{1-\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)p^{-1}+\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\beta-l'}{2}(1-p^{-1})\right\}p^{l'/2} &&\\
& && \text{für}\quad l'\leqslant\beta<\bar{l},\ 2\mid\beta,\ 2\mid l';\\
&= \left(1+\left(\frac{p^{-\beta}n\underline{a}}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2} && \text{für}\quad l'\leqslant\beta<\bar{l},\ 2\mid\beta,\ 2\nmid l';\\
&= \left(1+\left(\frac{p^{-(\beta+l')}na'}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2} && \text{für}\quad l'\leqslant\beta<\bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid l';\\
&= \left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\beta-l'+1}{2}(1-p^{-1})p^{l'/2} &&\\
& && \text{für}\quad l'\leqslant\beta<\bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\mid l';\\
&= \left\{1+p^{-1}+\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\bar{l}-l'}{2}(1-p^{-1})\right\}p^{l'/2}+ &&\\
&\quad +\left(\left(\frac{-p^{-(\beta+l)}n\Delta}{p}\right)-1\right)p^{(l-\beta)/2-1} && \text{für}\quad \beta\geqslant\bar{l},\ 2\mid\beta,\ 2\mid\bar{l},\ 2\mid l';\\
&= \left(1+\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\underline{a}}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}-\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\underline{a}}{p}\right)(1+p^{-1})p^{(l-\beta-1)/2} &&\\
& && \text{für}\quad \beta\geqslant\bar{l},\ 2\mid\beta,\ 2\mid\bar{l},\ 2\nmid l';
\end{aligned}$$

$$X_p = \left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\left(1+(1-p^{-1})\frac{\bar{l}-l'-1}{2}\right)p^{l'/2}$$

$$-\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)(1+p^{-1})p^{(l-\beta-1)/2} \qquad \textit{für} \quad \beta \geqslant \bar{l},\ 2\,|\,\beta,\ 2\,|\,l',\ 2\nmid\bar{l};$$

$$= \left(1+\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}\,a'}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}+\left(\left(\frac{p^{-\beta}na}{p}\right)-\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}\,a'}{p}\right)\right)p^{(l-\beta)/2-1}$$

$$\textit{für} \quad \beta \geqslant \bar{l},\ 2\,|\,\beta,\ 2\nmid\bar{l},\ 2\nmid l';$$

$$= \left(1+\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}-\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}a'}{p}\right)(1+p^{-1})p^{(l-\beta-1)/2}$$

$$\textit{für} \quad \beta \geqslant \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\bar{l},\ 2\nmid l';$$

$$= \left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\left(1+(1-p^{-1})\frac{\bar{l}-l'-1}{2}\right)p^{l'/2}+\left(\left(\frac{p^{-(\beta+\bar{l})}n\bar{a}}{p}\right)\right.$$

$$\left.-\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)p^{(l-\beta)/2-1} \qquad \textit{für} \quad \beta \geqslant \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid\bar{l},\ 2\,|\,l';$$

$$= \left(1+\left(\frac{-p^{-\bar{l}}\bar{a}\underline{a}}{p}\right)\right)p^{(l'-1)/2}+\left(\left(\frac{p^{-(\beta+l')}na'}{p}\right)-\left(\frac{-p^{-l}\bar{a}\underline{a}}{p}\right)\right)p^{(l-\beta)/2-1}$$

$$\textit{für} \quad \beta \geqslant \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid l',\ 2\,|\,\bar{l};$$

$$= \left\{(1+p^{-1})(1-p^{-(\beta-\bar{l}+1)/2})+\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)\frac{\bar{l}-l'}{2}(1-p^{-1})\right\}p^{l'/2}$$

$$\textit{für} \quad \beta \geqslant \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\,|\,l',\ 2\,|\,\bar{l}.$$

Beweis. Aus (5.4) und Hilfssatz 16,II folgt:

1. für $l' \geqslant \beta+1,\ 2\,|\,\beta$

$$X_p = 1+\sum_{\lambda=2,\,2|\lambda}^{\beta} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\left(\frac{p^{-\beta}na}{p}\right)p^{\beta/2},$$

2. für $l' \geqslant \beta+1,\ 2\nmid\beta$

$$X_p = 1+\sum_{\lambda=2,\,2|\lambda}^{\beta-1} p^{\lambda/2-1}(p-1)-p^{(\beta-1)/2},$$

3. für $l' \leqslant \beta < \bar{l},\ 2\,|\,\beta,\ 2\,|\,l'$

$$X_p = 1+\sum_{\substack{\lambda=2\\2|\lambda}}^{l'} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\sum_{\substack{\lambda=l'+2\\2|\lambda}}^{\beta} p^{l'/2}(1-p^{-1})-\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)p^{l'/2-1}$$

$$+\sum_{\substack{\lambda=l'+1\\2\nmid\lambda}}^{\beta-1}\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)p^{l'/2}(1-p^{-1}),$$

4. für $l' \leqslant \beta < \bar{l},\ 2\,|\,\beta,\ 2\nmid l'$

$$X_p = 1+\sum_{\lambda=2,\,2|\lambda}^{l'-1} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\left(\frac{p^{-\beta}n\underline{a}}{p}\right)p^{(l'-1)/2},$$

5. für $l' \leqslant \beta < \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\nmid l'$

$$X_p = 1+\sum_{\lambda=2,\,2|\lambda}^{l'-1} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\left(\frac{p^{-(\beta+l')}na'}{p}\right)p^{(l'-1)/2},$$

6. für $l' \leqslant \beta < \bar{l},\ 2\nmid\beta,\ 2\,|\,l'$

$$X_p = 1+\sum_{\substack{\lambda=2\\2|\lambda}}^{l'} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\sum_{\substack{\lambda=l'+2\\2|\lambda}}^{\beta-1} p^{l'/2}(1-p^{-1})$$

$$+\sum_{\substack{\lambda=l'+1\\2\nmid\lambda}}^{\beta}\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)p^{l'/2}(1-p^{-1})-p^{l'/2-1},$$

7. für $\beta \geqslant \bar{l},\ 2\,|\,\beta,\ 2\,|\,\bar{l},\ 2\,|\,l'$

$$X_p = 1+\sum_{\substack{\lambda=2\\2|\lambda}}^{l'} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\sum_{\substack{\lambda=l'+2\\2|\lambda}}^{\bar{l}} p^{l'/2}(1-p^{-1})+\sum_{\substack{\lambda=\bar{l}+2\\2|\lambda}}^{\beta} p^{(l-\lambda)/2}(1-p^{-1})$$

$$+\sum_{\substack{\lambda=l'+1\\2\nmid\lambda}}^{\bar{l}-1}\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)p^{l'/2}(1-p^{-1})+\left(\frac{-p^{-(\beta+l)}n\Delta}{p}\right)p^{(l-\beta)/2-1}$$

$$= p^{l'/2}(1-p^{-2})(1+p^{-1}+\ldots+p^{-(\beta-\bar{l})/2+1}) \tag{5.10}$$

$$+p^{l'/2}\frac{\bar{l}-l'}{2}\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right)(1-p^{-1})+p^{(l-\beta)/2}\left(1+\left(\frac{-p^{-(\beta+l)}n\Delta}{p}\right)p^{-1}\right),$$

8. für $\beta \geqslant \bar l$, $2|\beta$, $2|\bar l$, $2\nmid l'$

$$X_p = 1+\sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{l'-1} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\sum_{\substack{\lambda=\bar l+1\\ 2\nmid\lambda}}^{\beta-1}\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a a}{p}\right)p^{(l-\lambda)/2}(1-p^{-1})$$
$$-\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a a}{p}\right)p^{(l-\beta-3)/2},$$

9. für $\beta \geqslant \bar l$, $2|\beta$, $2|l'$, $2\nmid\bar l$

$$X_p=1+\sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{l'} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\sum_{\substack{\lambda=l'+2\\ 2|\lambda}}^{\bar l-1} p^{l'/2}(1-p^{-1})+\sum_{\substack{\lambda=l'+1\\ 2\nmid\lambda}}^{\bar l} p^{l'/2}(1-p^{-1})\left(\frac{-p^{-l'}a'a}{p}\right)$$
$$+\sum_{\substack{\lambda=\bar l+2\\ 2\nmid\lambda}}^{\beta-1} p^{(l-\lambda)/2}(1-p^{-1})\left(\frac{-p^{-l'}a'a}{p}\right)-\left(\frac{-p^{-l'}a'a}{p}\right)p^{(l-\beta-3)/2},$$

10. für $\beta \geqslant \bar l$, $2|\beta$, $2\nmid\bar l$, $2\nmid l'$

$$X_p = 1+\sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{l'-1} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\left(\frac{p^{-\beta}na}{p}\right)p^{(l-\beta)/2-1}$$
$$+\sum_{\substack{\lambda=\bar l+1\\ 2|\lambda}}^{\beta}\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a a'}{p}\right)p^{(l-\lambda)/2}(1-p^{-1}),$$

11. für $\beta \geqslant \bar l$, $2\nmid\beta$, $2\nmid\bar l$, $2\nmid l'$

$$X_p = 1+\sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{l'-1} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\sum_{\substack{\lambda=\bar l+1\\ 2|\lambda}}^{\beta-1}\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a a'}{p}\right)p^{(l-\lambda)/2}(1-p^{-1})$$
$$-\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a a'}{p}\right)p^{(l-\beta-3)/2},$$

12. für $\beta \geqslant \bar l$, $2\nmid\beta$, $2\nmid\bar l$, $2|l'$

$$X_p = 1+\sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{l'} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\sum_{\substack{\lambda=l'+1\\ 2\nmid\lambda}}^{\bar l}\left(\frac{-p^{-l'}a'\bar a}{p}\right)p^{l'/2}(1-p^{-1})+$$

$$+\sum_{\substack{\lambda=l'+2\\ 2|\lambda}}^{\bar l-1} p^{l'/2}(1-p^{-1})+\sum_{\substack{\lambda=\bar l+2\\ 2\nmid\lambda}}^{\beta}\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)p^{(l-\lambda)/2}(1-p^{-1})$$
$$+\left(\frac{p^{-(\beta+\bar l)}n\bar a}{p}\right)p^{(l-\beta)/2-1},$$

13. für $\beta \geqslant \bar l$, $2\nmid\beta$, $2\nmid l'$, $2|\bar l$

$$X_p = 1+\sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{l'-1} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\sum_{\substack{\lambda=\bar l+1\\ 2\nmid\lambda}}^{\beta}\left(\frac{-p^{-\bar l}\bar a\underline{a}}{p}\right)p^{(l-\lambda)/2}(1-p^{-1})$$
$$+\left(\frac{p^{-(\beta+l')}na'}{p}\right)p^{(l-\beta)/2-1},$$

14. für $\beta \geqslant \bar l$, $2\nmid\beta$, $2|l'$, $2|\bar l$

$$X_p = 1+\sum_{\substack{\lambda=2\\ 2|\lambda}}^{l'} p^{\lambda/2-1}(p-1)+\sum_{\substack{\lambda=l'+2\\ 2|\lambda}}^{\bar l} p^{l'/2}(1-p^{-1})$$
$$+\sum_{\substack{\lambda=l'+1\\ 2\nmid\lambda}}^{\bar l-1}\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)p^{l'/2}(1-p^{-1})+\sum_{\substack{\lambda=\bar l+2\\ 2|\lambda}}^{\beta-1} p^{(l-\lambda)/2}(1-p^{-1})-p^{(l-\beta-3)/2}$$

$$(5.11)\qquad = p^{l'/2}(1-p^{-2})(1+p^{-1}+\ldots+p^{-(\beta-\bar l-1)/2})$$
$$+p^{l'/2}(1-p^{-1})\frac{\bar l-l'}{2}\left(1+\left(\frac{-p^{-l'}a'\underline{a}}{p}\right)\right).$$

Summiert man die in 1.-14. auftretenden Reihen, so ergeben sich die Behauptungen des Hilfssatzes.

Hilfssatz 25. *Es sei* $M=4an$, $2^{\alpha}\|n$, $2^{\gamma_k}\|a_k$ $(k=1,2,3)$,

$$\gamma=\sum_{k=1}^{3}\gamma_k,\qquad \Delta n=2^{\alpha+\gamma}uv=r^2\omega,\qquad p^{\beta}\|n,\qquad p^{l}\|\Delta\qquad (p>2),$$

$$u=\prod_{\substack{p|n\\ p\nmid 2\Delta}} p^{\beta}=r_1^2\omega_1,\qquad v=\prod_{\substack{p|\Delta n\\ p|\Delta,\,p>2}} p^{\beta+l}=r_2^2\omega_2.$$

Dann ist

$$\varrho(M;\,a_1,\,a_2,\,a_3)=\frac{16}{\Delta\pi}\,2^{(\alpha+\gamma)/2}\,\omega_1^{1/2}v^{1/2}\,X_2\prod_{p|\Delta,\,p>2}X_p\prod_{p|\Delta,\,p>2}(1-p^{-2})^{-1}\times$$

$$\times\prod_{p|r_2}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right)L(1,\,-\omega)\sum_{d|r_1}d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right),$$

wobei die Werte von $L(1,\,-\omega)$, X_2 und X_p in den Hilfssätzen 13, 23 *und* 24 *angegeben werden.*

Beweis. Ist $p>2$, $p^\beta\| n$, $p\nmid\Delta$, d. h. $l=0$, so folgt aus (5.10) und (5.11)

$$(5.12)\qquad X_p=(1-p^{-2})\sum_{d|p^{\beta/2-1}}d^{-1}+p^{-\beta/2}\left(1+\left(\frac{-p^{-\beta}\Delta n}{p}\right)p^{-1}\right)$$

$$=(1-p^{-2})\left\{\sum_{d|p^{\beta/2-1}}d^{-1}+p^{-\beta/2}\left(1-\left(\frac{-p^{-\beta}\Delta n}{p}\right)p^{-1}\right)^{-1}\right\}\quad\text{für } 2|\beta,$$

$$X_p=(1-p^{-2})\sum_{d|p^{(\beta-1)/2}}d^{-1}=(1-p^{-2})\sum_{d^2|p^\beta}d^{-1}\qquad\text{für}\quad 2\nmid\beta;$$

also ist in beiden Fällen

$$(5.13)\qquad X_p=(1-p^{-2})w(p^\beta);$$

$$(5.14)\qquad w(u)=\sum_{d^2|u}d^{-1}\prod_{p|u}\left(1-\left(\frac{-d^{-2}\Delta n}{p}\right)p^{-1}\right)^{-1}.$$

In der Tat ist $p\,|\,d^{-2}n$ für $2\nmid\beta$, und für $2\,|\,\beta$

$$\left(\frac{-d^{-2}\Delta n}{p}\right)=\begin{cases}\left(\dfrac{-p^{-\beta}\Delta n}{p}\right) & \text{falls}\quad d^2=p^\beta,\\ 0 & \text{falls}\quad d^2<p^\beta.\end{cases}$$

Für $p\nmid\Delta n$, d. h. für $\beta=0$, folgt aus (5.12)

$$(5.15)\qquad X_p=1+\left(\frac{-\Delta n}{p}\right)p^{-1}.$$

Aus (5.3), Hilfssatz 22, (5.13) und (5.15) ergibt sich

$$(5.16)\qquad F(M,\,0)G(M,\,0)=$$

$$X_2\prod_{p|\Delta,\,p>2}X_p\prod_{p>2}(1-p^{-2})\prod_{p|\Delta,\,p>2}(1-p^{-2})^{-1}\prod_{p\nmid 2\Delta n}\left(1-\left(\frac{-\Delta n}{p}\right)p^{-1}\right)^{-1}w(u),$$

da nach Hilfssatz 3 die Funktion $w(u)$ multiplikativ ist.

In (5.14) setze man $d=r_1/d_1$. Dann ergibt sich wegen $u=r_1^2\omega_1$

$$w(u)=r_1^{-1}\sum_{d_1|r_1}d_1\prod_{p|r_1\omega_1}\left(1-\left(\frac{-\omega d_1^2r_2^2}{p}\right)p^{-1}\right)^{-1}$$

$$(5.17)\qquad =r_1^{-1}\sum_{d_1|r_1}d_1\prod_{p|d_1}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right)\prod_{p|r_1}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right)^{-1}.$$

Aus $p\,|\,r_1\omega_1$ folgt nämlich $p\nmid r_2$, und für $p\,|\,\omega_1$ ist $\left(\frac{-\omega d_1^2}{p}\right)=0$; aus $p\,|\,d_1$ folgt aber $p\,|\,r_1$.

Ferner ist

$$(5.18)\qquad \prod_{p\nmid 2\Delta n}\left(1-\left(\frac{-\Delta n}{p}\right)p^{-1}\right)=\prod_{p\nmid 2r}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right)$$

$$=\prod_{p>2}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right)\prod_{p|r,\,p>2}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right)^{-1}.$$

Aus (5.16)-(5.18) folgt

$$(5.19)\qquad F(M,\,0)G(M,\,0)=\frac{8}{\pi^2r_1}X_2\prod_{p|\Delta,\,p>2}X_p\prod_{p|\Delta,\,p>2}(1-p^{-2})^{-1}$$

$$\times\prod_{p>2}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right)^{-1}\prod_{p|r_2}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right)\sum_{d_1|r_1}d_1\prod_{p|d_1}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right).$$

Aus (5.2), (5.19) und Hilfssatz 11 ergibt sich die Behauptung.

Weiterhin mögen folgende Abkürzungen gelten:

$$L_1=\sum_{d|r_1}d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{p}{\omega}\right)p^{-1}\right)\sum_{1\leqslant h\leqslant\omega/4}\left(\frac{h}{\omega}\right),$$

$$L_2=\sum_{d|r_1}d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{p}{\omega}\right)p^{-1}\right)\sum_{1\leqslant h\leqslant\omega/2}\left(\frac{h}{\omega}\right),$$

$$L_3 = \sum_{d|r_1} d \prod_{p|d} \left(1-\left(\frac{-2}{p}\right)\left(\frac{p}{\omega/2}\right)p^{-1}\right)\left\{\sum_{1\leqslant h\leqslant \omega/16}\left(\frac{h}{\omega/2}\right)-\sum_{3\omega/16<h\leqslant\omega/4}\left(\frac{h}{\omega/2}\right)\right\},$$

$$L_4 = \sum_{d|r_1} d \prod_{p|d} \left(1-\left(\frac{2}{p}\right)\left(\frac{p}{\omega/2}\right)p^{-1}\right)\sum_{\omega/16<h\leqslant 3\omega/16}\left(\frac{h}{\omega/2}\right).$$

§ 6. In diesem Paragraphen wird die Darstellung der Zahlen durch die Form

$$x_1^2+x_2^2+10x_3^2$$

untersucht.

SATZ 1. 1. *Es ist*

$$(6.1)\qquad \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,20) = \Theta(\tau;1,1,10) + \frac{4}{3}\vartheta_{40}(\tau;0,4)\vartheta_{21}(\tau;0,10)\vartheta_{61}(\tau;0,10).$$

2. *Sei* $n = 2^\alpha 5^\beta u$, $(u,10)=1$, $10n = r^2\omega$, $u = r_1^2\omega_1$, $M = 40n$. *Ferner sei*

$$\varepsilon = 1 \ \textit{für}\ \alpha = 0, \qquad \varepsilon = 3\ \textit{für}\ \alpha > 0;$$

$$(6.2)\qquad \delta = \begin{cases} 5^{\beta/2+1}-3 & \textit{für}\quad 2\,|\,\beta,\\ \left(5-\left(\frac{\omega}{5}\right)\right)5^{(\beta+1)/2} & \textit{für}\quad 2\nmid\beta,\ 2\nmid\omega,\ u\equiv 1,4\ (\mathrm{mod}\,5)\\ & \textit{oder für}\quad 2\nmid\beta,\ 2\,|\,\omega,\ u\equiv 2,3\ (\mathrm{mod}\,5),\\ \left(5-\left(\frac{\omega}{5}\right)\right)(5^{(\beta+1)/2}-1) & \textit{für}\quad 2\nmid\beta,\ 2\nmid\omega,\ u\equiv 2,3\ (\mathrm{mod}\,5)\\ & \textit{oder für}\quad 2\nmid\beta,\ 2\,|\,\omega,\ u\equiv 1,4\ (\mathrm{mod}\,5).\end{cases}$$

Dann ist

$$(6.3)\qquad r(n;1,1,10) = \begin{cases}\varrho(M;1,1,10)+\frac{4}{3}\nu(M;1,1,10) & \textit{für}\quad \alpha=0,\\ \varrho(M;1,1,10) & \textit{für}\quad \alpha>0.\end{cases}$$

Hierbei nimmt $\varrho(M;1,1,10)$ *die folgenden Werte an:*

$$(6.4)\qquad \varrho(M;1,1,10) = 2\cdot 5^{(\beta+1)/2}\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-1}\right) \quad \textit{für}\quad \omega = 1,$$

$$= 2\delta L_1 \quad \textit{für}\ \omega\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4),\ \omega>1,$$

$$= \tfrac{2}{3}\delta L_2 \quad \textit{für}\ \omega\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,8),$$

$$= 0 \quad \textit{für}\ \omega\equiv 7\ (\mathrm{mod}\,8),$$

$$= 2\varepsilon(5^{(\beta+1)/2}-1)\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2}{p}\right)p^{-1}\right)\quad \textit{für}\ \omega = 2,$$

$$= \tfrac{2}{3}\varepsilon\delta L_3 \quad \textit{für}\ \omega\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,8),\ \omega>2,$$

$$= \tfrac{2}{3}\varepsilon\delta L_4 \quad \textit{für}\ \omega\equiv 6\ (\mathrm{mod}\,8).$$

Schließlich bezeichnet $\nu(M;1,1,10)$ *den Koeffizienten von* Q^M *in der Entwicklung der Funktion*

$$\vartheta_{40}(\tau;0,4)\vartheta_{21}(\tau;0,10)\vartheta_{61}(\tau;0,10)$$

nach Potenzen von Q.

Beweis. Sei

$$(6.5)\qquad \psi(\tau;1,1,10) = \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,20)-\Theta(\tau;1,1,10) - A\vartheta_{40}(\tau;0,4)\vartheta_{21}(\tau;0,10)\vartheta_{61}(\tau;0,10).$$

Nach Hilfssatz 21 und Hilfssatz 1 von [8] ist die Funktion $\psi^4(\tau;1,1,10)$ identisch Null, wenn sie in ihrem Fundamentalbereich mehr als

$$\tfrac{6}{24}40^3\prod_{p|40}(1-p^{-2}) = 11520$$

Nullstellen besitzt. Folglich ist die Funktion $\psi(\tau;1,1,10)$ identisch Null, wenn sie mehr als 2880 Nullstellen hat. Dazu reicht es hin, daß $\tau = i\infty$ ein mehr als 2880-facher Nullpunkt ist. Braucht daher nur gezeigt zu werden, daß bei geeigneter Wahl von A in der Entwicklung von $\psi(\tau;1,1,10)$ nach Potenzen von Q die Glieder mit Q^M, $M\leqslant 2880$, verschwinden.

Setzt man in den Hilfssätzen 23, 24 und 25

$$a_1 = 10,\ a_2 = a_3 = 1,\ b_1 = 5,\ b_2 = b_3 = 1,\ \gamma_1 = 1,\ \gamma_2 = \gamma_3 = 0,\ \gamma = 1,$$

d. h.

$$\Delta = a = 10,\ M = 40n,\ n = 2^\alpha m,\ \Delta n = 2^{\alpha+1}\cdot 5m = 2^{\alpha+1}uv = r^2\omega,$$

$$u = \prod_{p|n,\,p\nmid 10} p^\beta = r_1^2\omega_1,\quad v = 5^{\beta+1} = r_2^2\omega_2,\quad l = \bar{l} = 1,\quad l' = 0,$$

so ergibt sich

$$(6.6)\qquad \varrho(M;1,1,10) = 2^{(\alpha+1)/2}\cdot 5^{(\beta+1)/2+1}\frac{\omega_1^{1/2}}{3\pi}X_2X_5\left(1-\left(\frac{\omega}{5}\right)\frac{1}{5}\right) \times L(1,-\omega)\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right).$$

Hierbei ist

$$(6.7)\qquad X_2=\begin{cases}1 & \text{für}\quad \alpha=0,\\ 2^{-\alpha/2}\cdot 3 & \text{für}\quad 2\mid\alpha,\ \alpha>0,\\ 2^{-(\alpha+1)/2}\cdot 3 & \text{für}\quad 2\nmid\alpha,\ m\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,4),\\ \left(1-(-1)^{(m-3)/4}\right)2^{-(\alpha+1)/2} & \text{für}\quad 2\nmid\alpha,\ m\equiv 3\ (\mathrm{mod}\,4);\end{cases}$$

$$(6.8)\qquad X_5=\begin{cases}2\,(5^{\beta/2+1}-3)\,5^{-\beta/2-1} & \text{für}\quad 2\mid\beta,\\ \left(2\cdot 5^{(\beta+1)/2}-1-(-1)^{\alpha}\left(\dfrac{u}{5}\right)\right)5^{-(\beta+1)/2} & \text{für}\quad 2\nmid\beta.\end{cases}$$

Aus (6.6)-(6.8) und Hilfssatz 13 folgt (6.4).

Setzt man $Q=e\left(\dfrac{\tau}{40}\right)$, so ergibt sich aus (1.5)

$$(6.9)\qquad \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\,\vartheta_{00}(\tau;0,20)=\Big(\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{40h^2}\Big)^2\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{400h^2}$$

$$=1+4Q^{40}+4Q^{80}+4Q^{160}+8Q^{200}+4Q^{320}+4Q^{360}+10Q^{400}+8Q^{440}$$
$$+8Q^{480}+8Q^{520}+8Q^{560}+16Q^{600}+4Q^{640}+8Q^{680}+12Q^{720}+8Q^{760}$$
$$+24Q^{800}+16Q^{920}+12Q^{1000}+16Q^{1040}+16Q^{1080}+8Q^{1120}+8Q^{1160}$$
$$+16Q^{1200}+4Q^{1280}+8Q^{1360}+24Q^{1400}+20Q^{1440}+8Q^{1480}+16Q^{1560}$$
$$+10Q^{1600}+16Q^{1640}+16Q^{1680}+24Q^{1760}+24Q^{1800}+8Q^{1840}+16Q^{1880}$$
$$+8Q^{1920}+12Q^{1960}+44Q^{2000}+16Q^{2040}+8Q^{2080}+24Q^{2120}+16Q^{2200}$$
$$+8Q^{2240}+16Q^{2280}+16Q^{2320}+8Q^{2360}+40Q^{2400}+8Q^{2440}+16Q^{2480}$$
$$+16Q^{2520}+4Q^{2560}+40Q^{2600}+16Q^{2640}+24Q^{2720}+16Q^{2760}$$
$$+16Q^{2840}+12Q^{2880}+\ldots,$$

$$(6.10)\qquad \vartheta_{40}(\tau;0,4)\,\vartheta_{21}(\tau;0,10)\,\vartheta_{61}(\tau;0,10)$$

$$=\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{5(4h+2)^2}\cdot\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^hQ^{2(10h+1)^2}\cdot\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^hQ^{2(10h+3)^2}$$

$$=2Q^{40}-2Q^{120}-2Q^{280}-2Q^{360}+4Q^{520}+2Q^{600}+4Q^{760}-4Q^{840}$$
$$+2Q^{920}-2Q^{1000}+4Q^{1080}-4Q^{1160}-4Q^{1240}-4Q^{1320}-2Q^{1400}$$
$$+4Q^{1560}+4Q^{1640}-6Q^{1720}+2Q^{1880}+2Q^{1960}+4Q^{2040}+4Q^{2120}$$
$$+4Q^{2280}-4Q^{2360}+2Q^{2520}-6Q^{2680}+4Q^{2760}-4Q^{2840}+2Q^{3000}+\ldots$$

Berechnet man die Werte von $\varrho(M;1,1,10)$, $M\leqslant 2880$, mit Hilfe von (6.4), so ergibt sich

$$(6.11)\qquad \Theta(\tau;1,1,10)=1+\tfrac{4}{3}Q^{40}+4Q^{80}+\tfrac{8}{3}Q^{120}+4Q^{160}+8Q^{200}$$
$$+\tfrac{8}{3}Q^{280}+4Q^{320}+\tfrac{20}{3}Q^{360}+10Q^{400}+8Q^{440}+8Q^{480}+\tfrac{8}{3}Q^{520}$$
$$+8Q^{560}+\tfrac{40}{3}Q^{600}+4Q^{640}+8Q^{680}+12Q^{720}+\tfrac{8}{3}Q^{760}+24Q^{800}$$
$$+\tfrac{16}{3}Q^{840}+\tfrac{40}{3}Q^{920}+\tfrac{44}{3}Q^{1000}+16Q^{1040}+\tfrac{32}{3}Q^{1080}+8Q^{1120}$$
$$+\tfrac{40}{3}Q^{1160}+16Q^{1200}+\tfrac{16}{3}Q^{1240}+4Q^{1280}+\tfrac{16}{3}Q^{1320}+8Q^{1360}$$
$$+\tfrac{80}{3}Q^{1400}+20Q^{1440}+8Q^{1480}+\tfrac{32}{3}Q^{1560}+10Q^{1600}+\tfrac{32}{3}Q^{1640}$$
$$+16Q^{1680}+8Q^{1720}+24Q^{1760}+24Q^{1800}+8Q^{1840}+\tfrac{40}{3}Q^{1880}+8Q^{1920}$$
$$+\tfrac{28}{3}Q^{1960}+44Q^{2000}+\tfrac{32}{3}Q^{2040}+8Q^{2080}+\tfrac{56}{3}Q^{2120}+16Q^{2200}$$
$$+8Q^{2240}+\tfrac{32}{3}Q^{2280}+16Q^{2320}+\tfrac{40}{3}Q^{2360}+40Q^{2400}+8Q^{2440}$$
$$+16Q^{2480}+\tfrac{40}{3}Q^{2520}+4Q^{2560}+40Q^{2600}+16Q^{2640}+8Q^{2680}$$
$$+24Q^{2720}+\tfrac{32}{3}Q^{2760}+\tfrac{64}{3}Q^{2840}+12Q^{2880}+\ldots$$

Man wähle jetzt die Konstante A so, daß der Koeffizient von Q^{40} in der Entwicklung der Funktion $\psi(\tau;1,1,10)$ verschwindet. Nach (6.5), (6.9)-(6.11) kommt dies darauf hinaus, daß

$$4-2\mathrm{A}-\tfrac{4}{3}=0.$$

Nimmt man folglich $\mathrm{A}=\frac{4}{3}$, so läßt sich ohne Schwierigkeit nachprüfen, daß nach (6.5) und (6.9)-(6.11) alle Koeffizienten von Q^M, $M\leqslant 2880$, gleich Null sind. Damit ist die Identität (6.1) bewiesen.

Aus (6.10) folgt

$$\vartheta_{40}(\tau;0,4)\,\vartheta_{21}(\tau;0,10)\,\vartheta_{61}(\tau;0,10)$$
$$=Q^{40}\sum_{h=-\infty}^{\infty}Q^{80h(h+1)}\cdot\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^hQ^{40h(5h+1)}\cdot\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^hQ^{40h(5h+3)}.$$

Die linke Seite ist also eine ungerade Funktion von Q^{40}, d. h. es ist

$$(6.12)\qquad \nu(M;1,1,10)=0\quad\text{für gerade}\quad n.$$

Aus (6.1), (4.63), (4.64), (5.1) und (6.12) ergibt sich (6.3).

FOLGERUNG. *Unter den geraden Zahlen sind die Zahlen der Gestalt*

$$4^{\varkappa}(16q+6),$$

und nur sie, durch die Form $x_1^2+x_2^2+10x_3^2$ *nicht darstellbar.*

Aus (7.5)-(7.7) und Hilfssatz 13 folgt (7.3).

Setzt man $Q = e\left(\frac{\tau}{40}\right)$, so ergibt sich aus (1.5)

$$(7.8)\qquad \vartheta_{00}^2(\tau;0,4)\vartheta_{00}(\tau;0,10) = \left(\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{80h^2}\right)^2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{200h^2}$$

$$= 1+4Q^{80}+4Q^{160}+2Q^{200}+8Q^{280}+4Q^{320}+8Q^{360}+8Q^{400}+8Q^{520}$$
$$+16Q^{600}+4Q^{640}+4Q^{720}+10Q^{800}+8Q^{840}+8Q^{880}+8Q^{920}+8Q^{960}$$
$$+16Q^{1000}+8Q^{1040}+8Q^{1120}+16Q^{1200}+16Q^{1240}+4Q^{1280}+8Q^{1360}$$
$$+12Q^{1440}+8Q^{1480}+8Q^{1520}+16Q^{1560}+24Q^{1600}+8Q^{1640}+18Q^{1800}$$
$$+16Q^{1840}+8Q^{1880}+8Q^{1960}+12Q^{2000}+16Q^{2080}+8Q^{2120}+16Q^{2160}$$
$$+40Q^{2200}+8Q^{2240}+16Q^{2280}+8Q^{2320}+16Q^{2400}+8Q^{2440}+24Q^{2520}$$
$$+4Q^{2560}+16Q^{2600}+8Q^{2720}+8Q^{2760}+24Q^{2800}+16Q^{2840}+20Q^{2880}+\ldots,$$

$$(7.9)\qquad \vartheta_{01}(\tau;0,2)\vartheta_{41}(\tau;0,20)\vartheta_{12,1}(\tau;0,20) =$$

$$= \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{40h^2}\cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{(20h+2)^2}\cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{(20h+6)^2}$$

$$= Q^{40}-2Q^{80}+Q^{200}+2Q^{240}-3Q^{360}-2Q^{520}+2Q^{560}+2Q^{680}+2Q^{720}$$
$$-2Q^{840}-Q^{1000}-4Q^{1040}+4Q^{1160}-2Q^{1200}+4Q^{1320}+2Q^{1480}-4Q^{1520}$$
$$-2Q^{1640}+4Q^{1680}-Q^{1800}-2Q^{1840}+Q^{1960}+2Q^{2000}-2Q^{2120}-4Q^{2160}$$
$$-4Q^{2280}+4Q^{2320}+2Q^{2440}+4Q^{2480}+4Q^{2640}-2Q^{2760}+2Q^{2800}$$
$$-2Q^{2920}+\ldots$$

Berechnet man die Werte von $\varrho(M;2,2,5)$, $M \leqslant 2880$, mit Hilfe von (7.3), so ergibt sich

$$(7.10)\qquad \Theta(\tau;2,2,5) = 1+\tfrac{4}{3}Q^{40}+\tfrac{4}{3}Q^{80}+4Q^{160}+\tfrac{10}{3}Q^{200}+\tfrac{8}{3}Q^{240}+8Q^{280}$$
$$+4Q^{320}+4Q^{360}+8Q^{400}+\tfrac{16}{3}Q^{520}+\tfrac{8}{3}Q^{560}+16Q^{600}+4Q^{640}+\tfrac{8}{3}Q^{680}$$
$$+\tfrac{20}{3}Q^{720}+10Q^{800}+8Q^{840}+8Q^{880}+8Q^{920}+8Q^{960}+\tfrac{44}{3}Q^{1000}+\tfrac{8}{3}Q^{1040}$$
$$+8Q^{1120}+\tfrac{16}{3}Q^{1160}+\tfrac{40}{3}Q^{1200}+16Q^{1240}+4Q^{1280}+\tfrac{16}{3}Q^{1320}+8Q^{1360}$$
$$+12Q^{1440}+\tfrac{16}{3}Q^{1480}+\tfrac{8}{3}Q^{1520}+16Q^{1560}+24Q^{1600}+\tfrac{16}{3}Q^{1640}+\tfrac{16}{3}Q^{1680}+$$

$$+\tfrac{50}{3}Q^{1800}+\tfrac{40}{3}Q^{1840}+8Q^{1880}+\tfrac{28}{3}Q^{1960}+\tfrac{44}{3}Q^{2000}+16Q^{2080}$$
$$+\tfrac{16}{3}Q^{2120}+\tfrac{32}{3}Q^{2160}+40Q^{2200}+8Q^{2240}+\tfrac{32}{3}Q^{2280}+\tfrac{40}{3}Q^{2320}$$
$$+16Q^{2400}+\tfrac{32}{3}Q^{2440}+\tfrac{16}{3}Q^{2480}+24Q^{2520}+4Q^{2560}+16Q^{2600}$$
$$+\tfrac{16}{3}Q^{2640}+8Q^{2720}+\tfrac{16}{3}Q^{2760}+\tfrac{80}{3}Q^{2800}+16Q^{2840}+20Q^{2880}+\ldots$$

Man wähle jetzt die Konstante A so, daß der Koeffizient von Q^{40} in der Entwicklung der Funktion $\psi(\tau;2,2,5)$ verschwindet. Nach (7.4), (7.8)-(7.10) kommt dies darauf hinaus, daß

$$-\mathrm{A}-\tfrac{4}{3} = 0.$$

Nimmt man folglich $\mathrm{A} = -\frac{4}{3}$, so läßt sich ohne Schwierigkeit nachprüfen, daß nach (7.4) und (7.8)-(7.10) alle Koeffizienten von Q^M, $M \leqslant 2880$, gleich Null sind. Damit ist die Identität (7.1) bewiesen.

Aus (7.9) folgt

$$\vartheta_{01}(\tau;0,2)\vartheta_{41}(\tau;0,20)\vartheta_{12,1}(\tau;0,20)$$
$$= Q^{40}\sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{40h^2}\cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{40\cdot 2h(5h+1)}\cdot \sum_{h=-\infty}^{\infty}(-1)^h Q^{40\cdot 2h(5h+3)}.$$

Die Exponenten in der linke Seite haben daher die Gestalt

$$M = 40n = 40(4j+1) \qquad \text{oder} \qquad M = 40n = 40(4j+2),$$

d. h. es ist

$$(7.11)\qquad \nu(M;2,2,5) = 0 \quad \text{für} \quad n \equiv 0 \pmod 4 \quad \text{oder für} \quad n \equiv 3 \pmod 4.$$

Aus (7.1), (4.63), (4.64), (5.1) und (7.11) ergibt sich (7.2).

Folgerung. *Unter den Zahlen $n \equiv 0, 3 \pmod 4$ sind die Zahlen der Gestalt*

$$4^{\varkappa}(8q+3),$$

und nur sie, durch die Form $2x_1^2+2x_2^2+5x_3^2$ nicht darstellbar.

Beweis. Aus (7.2) und (7.3) folgt für $n \equiv 0, 3 \pmod 4$, daß $r(n;\ 2,2,5) = 0$ dann und nur dann, wenn $\omega \equiv 7 \pmod 8$. Hieraus ergibt sich die Behauptung, da $n = 2^{2\varkappa}m$; $m \equiv 3 \pmod 8$.

§ 8. In diesem Paragraphen wird die Darstellung der Zahlen durch die Form

$$x_1^2+x_2^2+7x_3^2$$

untersucht.

Nach Hilfssatz 14 von [8] ist jeder der beiden Zweige

(8.1) $X(\tau) = \{\vartheta_{20}(\tau;0,2)\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{01}(\tau;0,2)\vartheta_{14,0}(\tau;0,14)\vartheta_{01}(\tau;0,14)\}^{1/2}$

eine eindeutige Funktion von τ.

Jetzt führe man die folgende Funktion ein:

(8.2) $\psi(\tau;1,1,7) = \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,14) - \Theta(\tau;1,1,7) - AX(\tau)$.

Hilfssatz 26. *Die Funktion $\psi^4(\tau;1,1,7)$ ist bei konstantem A eine ganze Modulform der Stufe 28 und der Dimension -6.*

Der Beweis verläuft ähnlich wie bei Hilfssatz 21.

Satz 3. 1. *Wird der Zweig* (8.1) *durch*

$$\lim_{\mathrm{Im}\,\tau\to\infty} e(-\tau)X(\tau) = 2$$

festgelegt, so ist

(8.3) $$\vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,14) = \Theta(\tau;1,1,7) + \tfrac{2}{3}X(\tau).$$

2. *Sei* $n = 2^\alpha 7^\beta u$, $(u,14) = 1$, $7n = r^2\omega$, $u = r_1^2\omega_1$, $M = 28n$. *Ferner sei*

$$\varepsilon = \begin{cases} 2^{\alpha/2+1}-1 & \textit{für} \quad \omega \equiv 3 \pmod 8, \\ 2^{\alpha/2+1} & \textit{für} \quad \omega \equiv 7 \pmod 8; \end{cases}$$

$$\delta = \begin{cases} 4 & \textit{für}\ 2\,|\,\beta, \\ 7+\left(\frac{\omega}{7}\right) & \textit{für}\ 2\nmid\beta, \quad u \equiv 1,2,4 \pmod 7, \\ 0 & \textit{für}\ 2\nmid\beta, \quad u \equiv 3,5,6 \pmod 7. \end{cases}$$

Dann ist

(8.4) $$r(n;1,1,7) = \varrho(M;1,1,7) + \tfrac{2}{3}\nu(M;1,1,7).$$

Hierbei nimmt $\varrho(M;1,1,7)$ *die folgenden Werte an:*

(8.5) $$\varrho(M;1,1,7) = \frac{2}{3}(2^{\alpha/2+2}-3)\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-1}\right) \quad \textit{für} \quad \omega = 1,$$

$$= \frac{\delta}{3}(2^{\alpha/2+2}-3)L_1 \quad \textit{für} \quad \omega \equiv 1 \pmod 4,\ \omega > 1,$$

$$= \frac{\varepsilon\delta}{3}L_2 \quad \textit{für} \quad \omega \equiv 3 \pmod 4,$$

$$= \frac{4}{3}(2^{(\alpha+3)/2}-3)\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-2}{p}\right)p^{-1}\right) \quad \textit{für} \quad \omega = 2,$$

$$= \frac{\delta}{3}(2^{(\alpha+3)/2}-3)L_3 \quad \textit{für} \quad \omega \equiv 2 \pmod 8,\ \omega > 2,$$

$$= \frac{\delta}{3}(2^{(\alpha+3)/2}-3)L_4 \quad \textit{für} \quad \omega \equiv 6 \pmod 8.$$

Schließlich bezeichnet $\nu(M;1,1,7)$ *den Koeffizienten von* Q^M *in der Entwicklung der Funktion* $X(\tau)$ *nach Potenzen von* Q.

Beweis. Nach Hilfssatz 26 und Hilfssatz 1 von [8] ist die Funktion $\psi^4(\tau;1,1,7)$ identisch Null, wenn sie in ihrem Fundamentalbereich mehr als

$$\tfrac{6}{24}28^3\prod_{p|28}(1-p^{-2}) = 4032$$

Nullstellen besitzt. Folglich ist die Funktion $\psi(\tau;1,1,7)$ identisch Null, wenn sie mehr als 1008 Nullstellen hat. Braucht daher nur gezeigt zu werden, daß bei geeigneter Wahl von A in der Entwicklung von $\psi(\tau;1,1,7)$ nach Potenzen von Q die Glieder mit Q^M, $M \leqslant 1008$, verschwinden.

Setzt man in den Hilfssätzen 23, 24 und 25

$$a_1 = a_2 = 1,\quad a_3 = 7,\quad b_1 = b_2 = 1,\quad b_3 = 7,\quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,\quad \gamma = 0,$$

d. h.

$$\Delta = a = 7,\quad M = 28n,\quad n = 2^\alpha m,\quad \Delta n = 2^\alpha\cdot 7m = 2^\alpha uv = r^2\omega,$$

$$u = \prod_{\substack{p|n\\ p\nmid 14}} p^\beta = r_1^2\omega_1,\quad v = 7^{\beta+1} = r_2^2\omega_2,\quad l = \bar{l} = 1,\quad l' = 0,$$

so ergibt sich

(8.6) $$\varrho(M;1,1,7) = 2^{\alpha/2}\cdot 7^{(\beta+1)/2+1}\frac{\omega_1^{1/2}}{3\pi}X_2X_7\left(1+\left(\frac{\omega}{7}\right)\frac{1}{7}\right)$$

$$\times L(1,-\omega)\sum_{d|r_1} d\prod_{p|d}\left(1-\left(\frac{-\omega}{p}\right)p^{-1}\right).$$

Hierbei ist

(8.7) $$X_2 = \begin{cases} 2 & \text{für} \quad 2\,|\,\alpha,\ m \equiv 1 \pmod 8, \\ (2^{\alpha/2+1}-1)2^{-\alpha/2} & \text{für} \quad 2\,|\,\alpha,\ m \equiv 5 \pmod 8, \\ (2^{\alpha/2+2}-3)2^{-\alpha/2-1} & \text{für} \quad 2\,|\,\alpha,\ m \equiv 3 \pmod 4, \\ (2^{(\alpha+3)/2}-3)2^{-(\alpha+1)/2} & \text{für} \quad 2\nmid\alpha; \end{cases}$$

$$(8.8)\qquad X_7 = \begin{cases} 8\cdot 7^{-\beta/2-1} & \text{für}\quad 2\mid\beta, \\ \left(1+\left(\frac{u}{7}\right)\right)7^{-(\beta+1)/2} & \text{für}\quad 2\nmid\beta. \end{cases}$$

Aus (8.6)-(8.8) und Hilfssatz 13 folgt (8.5).

Setzt man $Q = e\left(\frac{\tau}{28}\right)$, so ergibt sich aus (1.5)

$$(8.9)\qquad \vartheta_{00}^2(\tau;0,2)\vartheta_{00}(\tau;0,14) = \Big(\sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{28h^2}\Big)^2 \sum_{h=-\infty}^{\infty} Q^{196h^2}$$

$$= 1+4Q^{28}+4Q^{56}+4Q^{112}+8Q^{140}+2Q^{196}+12Q^{224}+12Q^{252}+8Q^{280}$$

$$+8Q^{308}+16Q^{336}+8Q^{364}+8Q^{420}+12Q^{448}+24Q^{476}+4Q^{504}+24Q^{560}$$

$$+8Q^{644}+16Q^{672}+20Q^{700}+8Q^{728}+16Q^{756}+2Q^{784}+16Q^{812}$$

$$+8Q^{840}+36Q^{896}+32Q^{924}+8Q^{952}+28Q^{1008}+\ldots;$$

$$(8.10)\qquad X(\tau) = 2Q^{28}+2Q^{56}-4Q^{84}-2Q^{112}-4Q^{168}+2Q^{196}-2Q^{224}$$

$$-2Q^{252}+8Q^{280}+4Q^{308}+4Q^{336}-2Q^{392}+4Q^{420}+2Q^{448}-4Q^{476}$$

$$-6Q^{504}-4Q^{532}-8Q^{616}-4Q^{644}+4Q^{672}+2Q^{700}+8Q^{756}-2Q^{784}$$

$$+4Q^{840}-8Q^{868}+2Q^{896}+4Q^{952}+2Q^{1008}+\ldots$$

Berechnet man die Werte von $\varrho(M;1,1,7)$, $M\leqslant 1008$, mit Hilfe von (8.5), so ergibt sich

$$(8.11)\qquad \Theta(\tau;1,1,7) = 1+\tfrac{8}{3}Q^{28}+\tfrac{8}{3}Q^{56}+\tfrac{8}{3}Q^{84}+\tfrac{16}{3}Q^{112}+8Q^{140}+\tfrac{8}{3}Q^{168}$$

$$+\tfrac{2}{3}Q^{196}+\tfrac{40}{3}Q^{224}+\tfrac{40}{3}Q^{252}+\tfrac{8}{3}Q^{280}+\tfrac{16}{3}Q^{308}+\tfrac{40}{3}Q^{336}+8Q^{364}$$

$$+\tfrac{4}{3}Q^{392}+\tfrac{16}{3}Q^{420}+\tfrac{32}{3}Q^{448}+\tfrac{80}{3}Q^{476}+8Q^{504}+\tfrac{8}{3}Q^{532}+24Q^{560}$$

$$+\tfrac{16}{3}Q^{616}+\tfrac{32}{3}Q^{644}+\tfrac{40}{3}Q^{672}+\tfrac{56}{3}Q^{700}+8Q^{728}+\tfrac{32}{3}Q^{756}+\tfrac{10}{3}Q^{784}$$

$$+16Q^{812}+\tfrac{16}{3}Q^{840}+\tfrac{16}{3}Q^{868}+\tfrac{104}{3}Q^{896}+32Q^{924}+\tfrac{16}{3}Q^{952}+\tfrac{80}{3}Q^{1008}+\ldots$$

Man wähle jetzt die Konstante A so, daß der Koeffizient von Q^{28} in der Entwicklung der Funktion $\psi(\tau;1,1,7)$ verschwindet. Nach (8.2), (8.9)-(8.11) kommt dies darauf hinaus, daß

$$4-2\mathrm{A}-\tfrac{8}{3}=0.$$

Nimmt man folglich $\mathrm{A}=\frac{2}{3}$, so läßt sich ohne Schwierigkeit nachprüfen, daß nach (8.2) und (8.9)-(8.11) alle Koeffizienten von Q^M, $M\leqslant 1008$, gleich Null sind. Damit ist die Identität (8.3) bewiesen.

Aus (8.3), (4.63), (4.64) und (5.1) folgt (8.4).

Literaturverzeichnis

[1] T. J. Bromwich, *An introduction to the theory of infinite series*, London 1926.

[2] P. Bronkhorst, *Over het aantal oplossingen van het stelsel diophantische vergelijkingen:*

$$\left.\begin{aligned} x_1^2+x_2^2+\ldots+x_s^2 &= n \\ x_1+x_2+\ldots+x_s &= m \end{aligned}\right\}$$ *voor* $s=6$ *en* $s=8$, Amsterdam 1943.

[3] G. Dirichlet, *Recherches sur diverses applications de l'analyse infinitésimale à la théorie des nombres*, Werke. I, Berlin 1889.

[4] H. D. Kloosterman, *On the representation of numbers in the form* $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$, Proc. London Math. Soc., ser. 2, 25 (1925), S. 143-173.

[5] — *Simultane Darstellung zweier ganzen Zahlen als einer Summe von ganzen Zahlen und deren Quadratsumme*, Math. Ann. 118 (1942), S. 319-364.

[6] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie.* I, Leipzig 1927.

[7] — *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. I*, Leipzig 1909.

[8] G. Lomadse, *Über die Darstellung der Zahlen durch einige quaternäre quadratische Formen*, Acta Arithmetica 5 (1959), S. 125-170.

[9] — *О представлении чисел некоторыми квадратичными формами с четырьмя переменными*, Труды Тбилисского Государственного Университета им. Сталина (Trudy Tbiliss. Gos. Univ. Stalin.) 76 (1959), S. 107-159.

[10] H. Maass, *Konstruktion ganzer Modulformen halbzahliger Dimension mit ϑ-Multiplikatoren in einer und zwei Variabeln*, Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg 12 (1937), S. 133-162.

[11] H. Streefkerk, *Over het aantal oplossingen der diophantische vergelijking* $U=\sum_{i=1}^{s}(Ax_i^2+Bx_i+C)$, Amsterdam 1943.

[12] A. Walfisz, *Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, Warszawa 1957.

Reçu par la Rédaction le 10. 3. 1960