ACTA ARITHMETICA
LIX.4 (1991)

Über eine arithmetische Aufspaltung der logarithmischen Ableitung Selbergscher Zetafunktionen

von

ULRICH CHRISTIAN (Göttingen)

0. Einleitung. In seinen bewunderungswürdigen Arbeiten und Vorlesungsausarbeitungen hat A. Selberg eine neuartige Theorie automorpher Formen entwickelt, wobei die sogenannte Spurformel eine zentrale Rolle spielt. Ein wesentlicher Bestandteil dieser Spurformel ist die Selbergsche Zetafunktion. Diese ist insofern dem Eulerschen Produkt der Riemannschen Zetafunktion nachgebildet, als man in dem Produkt die Primzahlen durch die Konjugiertenklassen primitiver hyperbolischer Matrizen der zugrundeliegenden diskontinuierlichen Gruppe zu ersetzen hat. Ist die Gruppe nun arithmetisch definiert, wie es etwa bei der elliptischen Modulgruppe oder deren Hauptkongruenzgruppen der Fall ist, so kann man die Konjugiertenklassen hyperbolischer Matrizen auch auf arithmetische Eigenschaften untersuchen. Für die volle elliptische Modulgruppe und einige Hauptkongruenzgruppen machte dieses Sarnak [6]. Es stellt sich heraus, daß ein enger Zusammenhang zwischen den primitiven hyperbolischen Matrizen der Gruppe und den indefiniten binären quadratischen Formen besteht. Sarnaks Resultate wurden von Christian [4] auf alle Hauptkongruenzgruppen der elliptischen Modulgruppe erweitert.

Im folgenden wollen wir nun zeigen, daß diese Zusammenhänge zwischen den primitiven hyperbolischen Modulmatrizen und der Zahlentheorie die folgende "arithmetische Aufspaltung" der logarithmischen Ableitung der Selbergschen Zetafunktion nach sich zieht.

Es seien $G(u)$ eine Funktion von u, weiter $\Gamma(q)$ die Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe zur elliptischen Modulgruppe $\mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ und $g = 0, 1$. Dann ist die logarithmische Ableitung der Selbergschen Zetafunktion durch

$$Z(q, g, G) = \sum_{\substack{\{P\}_{\Gamma(q)} \\ |\mathrm{Tr}\, P| > 2}} (\mathrm{sign}\, \mathrm{Tr}\, P)^g \frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2} - N(P)^{-1/2}} G(\log N(P))$$

gegeben. Dabei durchläuft $\{P\}_{\Gamma(q)}$ die hyperbolischen Konjugiertenklassen von $\Gamma(q)$. Weiter sei P_0 das zu P gehörige primitive hyperbolische Element, N ist die Norm und Tr die Spur einer hyperbolischen Matrix. Diese Darstellung wird in der vorliegenden Arbeit umgeformt in

$$Z(q, g, G) = 2 \sum_{K \in \mathfrak{K}^+(q)} \log|\varepsilon_0(K, q)| \sum_{l=1}^{\infty} T(K, q, l) G(2l \log|\varepsilon_0(K, q)|)$$

$$+ 2 \sum_{K \in \mathfrak{K}^-(q)} \log|\varepsilon_0(K, q)| \sum_{l=1}^{\infty} T(K, q, l)(-1)^{gl} G(2l|\varepsilon_0(K, q)|).$$

Hierbei ist $\varepsilon_0(K, q)$ die Grundeinheit des reell-quadratischen Zahlkörpers K mit der Nebenbedingung $\varepsilon = 1 \bmod q$; $\mathfrak{K}^+(q)$ ist die Menge der reell-quadratischen Zahlkörper mit $\varepsilon_0(K, q) > 1$ und $\mathfrak{K}^-(q)$ ist die Menge der reell-quadratischen Zahlkörper mit $\varepsilon_0(K, q) < -1$. Die $T(K, q, l)$ sind zahlentheoretische Funktionen, die mit den Klassenzahlen indefiniter binärer quadratischer Formen in Zusammenhang stehen. Durch diese arithmetische Aufspaltung der logarithmischen Ableitung der Selbergschen Zetafunktion kann man hoffen, einerseits Ergebnisse für diese Funktion aus der Zahlentheorie, andererseits zahlentheoretische Ergebnisse aus den Resultaten über die Selbergsche Zetafunktion abzuleiten. In der Theorie der Selbergschen Zetafunktion ist es allerdings üblich, statt der allgemeinen Funktion G spezielle Funktionen zu verwenden. Wir werden daher auch für G die gebräuchlichsten Funktionen einsetzen.

1. Eine arithmetische Aufspaltung der logarithmischen Ableitung Selbergscher Zetafunktionen. In [4] wurden alle hyperbolischen elliptischen Modulmatrizen zu einer "arithmetischen Familie" zusammengefaßt, wenn ihre Eigenwerte in einem vorgegebenen total-reellen algebraischen Zahlkörper K liegen. In der vorliegenden Arbeit wollen wir auseinandersetzen, daß diese Aufteilung in arithmetische Familien auch zu einer Zerlegung der logarithmischen Ableitung der Selbergschen Zetafunktion in Teilsummen führt.

Es seien $\Gamma(1) = \mathrm{SL}(2, \mathbf{Z})$ die elliptische Modulgruppe und

$$\Gamma(q) = \left\{ N \in \Gamma(1);\ N \equiv E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod q \right\}$$

die Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe, $q \in \mathbf{N}$. Wir setzen weiterhin

(1) $$q \geqslant 3$$

voraus.

Definition 1. Für einen reell-quadratischen Zahlkörper K sei $\mathfrak{F}(K, q)$ die Gesamtheit der hyperbolischen Matrizen $P \in \Gamma(q)$, deren Eigenwerte in K liegen. $\mathfrak{F}(K, q)$ heißt *arithmetische Familie* hyperbolischer Matrizen aus $\Gamma(q)$.

Definition 2. Es sei $\mathfrak{o}_K$ der Ring der ganzen Zahlen eines total-reellen algebraischen Zahlkörpers K. Es sei $\mathfrak{E}(K, q)$ die Gruppe aller Einheiten $\varepsilon \in K$ mit

(2) $$\mathrm{Nm}\, \varepsilon = 1,$$

(3) $$\varepsilon \equiv 1 \bmod q \quad \text{in } \mathfrak{o}_K.$$

Es sei $\varepsilon_0(K, q)$ ein Element von $\mathfrak{E}(K, q)$ mit

(4) $$|\varepsilon_0(K, q)| > 1,$$

(5) $$|\varepsilon| \geqslant |\varepsilon_0(K, q)| \quad (\varepsilon \in \mathfrak{E}(K, q), |\varepsilon| > 1).$$

Hilfssatz 1. *Die Gruppe $\mathfrak{E}(K, q)$ ist zyklisch. Sie wird von $\varepsilon_0(K, q)$ erzeugt. Die Eigenwerte sämtlicher Matrizen aus $\mathfrak{F}(K, q)$ liegen in $\mathfrak{E}(K, q)$ und zu jedem $\varepsilon \in \mathfrak{E}(K, q)$, $\varepsilon \neq 1$, gibt es ein $P \in \mathfrak{F}(K, q)$ mit den Eigenwerten $\varepsilon, \varepsilon^{-1}$. Für $k \in N$ sei $\mathfrak{F}(K, q, k)$ die Gesamtheit der Matrizen aus $\mathfrak{F}(K, q)$, welche die Eigenwerte $\varepsilon_0^k(K, q)$, $\varepsilon_0^{-k}(K, q)$ besitzen. Dann gilt*

(6) $$\mathfrak{F}(K, q, k) \cap \mathfrak{F}(K, q, l) = \emptyset \quad (l \neq k),$$

(7) $$\mathfrak{F}(K, q) = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathfrak{F}(K, q, k).$$

Beweis. [4].

Definition 3. Eine hyperbolische Matrix P_0 heißt *primitiv*, wenn es keine hyperbolische Matrix P und kein $g \in N$, $g > 1$, gibt mit $P_0 = P^g$.

Definition 4. Es sei $l|q$. Zwei Matrizen $P_1, P_2 \in \Gamma(q)$ heißen *konjugiert bezüglich $\Gamma(l)$*, wenn es ein Element $N \in \Gamma(l)$ mit

(8) $$P_2 = N^{-1} P_1 N$$

gibt. Die Klasse aller zu P bezüglich $\Gamma(l)$ konjugierter Matrizen werden mit $\{P\}_{\Gamma(l)}$ bezeichnet.

Hilfssatz 2. *Es sei $P \in \mathfrak{F}(K, q, k)$. Dann ist*

(9) $$\{P\}_{\Gamma(1)} \subset \mathfrak{F}(K, q, k).$$

Die Elemente einer Konjugiertenklasse sind entweder alle primitiv oder keins ist primitiv. $\mathfrak{F}(K, q, k)$ zerfällt in eine endliche Anzahl $V(K, q, k)$ von Konjugiertenklassen bezüglich $\Gamma(q)$. Darin enthalten sind $U(K, q, k)$ primitive Konjugiertenklassen bezüglich $\Gamma(q)$. Es gilt

(10) $$V(K, q, k) = O(|\varepsilon_0(K, q)|^{2k}) \quad (k \to \infty),$$

also auch

(11) $$U(K, q, k) = O(|\varepsilon_0(K, q)|^{2k}) \quad (k \to \infty).$$

Beweis. [4]. Insbesondere folgt (10) aus [4, (21), (22), Satz 8].

Definition 5. Es sei $\mathfrak{K}^+(q)$ die Menge der reell-quadratischen Zahlkörper K mit $\varepsilon_0(K, q) > 1$ und $\mathfrak{K}^-(q)$ die Menge der reell-quadratischen Zahlkörper mit $\varepsilon_0(K, q) < -1$.

Für $l \in \boldsymbol{N}$ definiere man noch

$$(12)\qquad T(K,q,l)=\frac{1}{|\varepsilon_0(K,q)|^l-|\varepsilon_0(K,q)|^{-l}}\sum_{k|l} kU(K,q,k).$$

Aus (11), (12) folgt dann

$$(13)\qquad T(K,q,l)=O\big(l\,|\varepsilon_0(K,q)|^l\big)\qquad (l\to\infty).$$

Es seien $G(u)$ eine Funktion für $u\in\boldsymbol{R}$, $u>0$ und $g=0$, 1. Entsprechend [1, Definition 7] und [2] definiere man die logarithmische Ableitung der Selbergschen Zetafunktion durch

$$(14)\qquad Z(q,g,G)=\sum_{\substack{\{P\}_{\Gamma(q)}\\ |\operatorname{Tr}P|>2}}(\operatorname{sign}\operatorname{Tr}P)^g\frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2}-N(P)^{-1/2}}G\big(\log N(P)\big).$$

Dabei durchläuft $\{P\}_{\Gamma(q)}$ die hyperbolischen Konjugiertenklassen von $\Gamma(q)$. Weiter sei P_0 das zu P gehörige primitive hyperbolische Element. Offenbar gilt

$$(15)\qquad Z(q,g,G)=\sum_{\substack{\{P_0\}_{\Gamma(q)}\\ |\operatorname{Tr}P_0|>2}}\sum_{n=1}^{\infty}(\operatorname{sign}\operatorname{Tr}P_0)^{gn}\frac{\log N(P_0)}{N(P_0)^{n/2}-N(P_0)^{-n/2}}G\big(n\log N(P_0)\big).$$

Dabei ist jetzt über alle primitiven hyperbolischen Klassen $\{P_0\}_{\Gamma(q)}$ zu summieren.

Hat P_0 die Eigenwerte $\varepsilon_0^k(K,q)$, $\varepsilon_0^{-k}(K,q)$, so gilt

$$(16)\qquad \operatorname{sign}\operatorname{Tr}P_0=(\operatorname{sign}\varepsilon_0(K,q))^k,$$

$$(17)\qquad N(P_0)=|\varepsilon_0(K,q)|^{2k}.$$

Trägt man dieses in (15) ein, so bekommt man

$$(18)\qquad \begin{aligned} Z(q,g,G) &=2\sum_{K\in\Re^+(q)}\log|\varepsilon_0(K,q)|\sum_{n,k=1}^{\infty}kU(K,q,k)\frac{G\big(2nk\log|\varepsilon_0(K,q)|\big)}{|\varepsilon_0(K,q)|^{nk}-|\varepsilon_0(K,q)|^{-nk}}\\ &\quad+2\sum_{K\in\Re^-(q)}\log|\varepsilon_0(K,q)|\sum_{n,k=1}^{\infty}kU(K,q,k)(-1)^{gnk}\\ &\quad\times\frac{G\big(2nk\log|\varepsilon_0(K,q)|\big)}{|\varepsilon_0(K,q)|^{nk}-|\varepsilon_0(K,q)|^{-nk}}.\end{aligned}$$

Hierin setze man $l=nk$ und beachte (12).

Es folgt

$$(19)\qquad \begin{aligned} Z(q,g,G)&=2\sum_{K\in\Re^+(q)}\log|\varepsilon_0(K,q)|Z_1^+(q,K,G)\\ &\quad+2\sum_{K\in\Re^-(q)}\log|\varepsilon_0(K,q)|Z_1^-(q,g,K,G).\end{aligned}$$

Hierbei gilt

$$(20)\qquad Z_1^+(q,K,G)=\sum_{l=1}^{\infty}T(K,q,l)G\big(2l\log|\varepsilon_0(K,q)|\big)\qquad (K\in\Re^+(q)),$$

$$(21)\qquad Z_1^-(q,g,K,G)=\sum_{l=1}^{\infty}T(K,q,l)(-1)^{gl}G\big(2l\log|\varepsilon_0(K,q)|\big)\qquad (K\in\Re^-(q)).$$

In der Formel (19) hat man eine Darstellung der Selbergschen Zetafunktion gefunden, die erheblich anders aussieht, als die übliche. Es dürfte interessant sein, die Reihen (20), (21) näher zu untersuchen. Aus [4, §2] entnimmt man

$$(22)\qquad V(K,q,l)=\sum_{k|l}U(K,q,k).$$

Mittels der Möbiusschen Umkehrformeln also

$$(23)\qquad U(K,q,l)=\sum_{k|l}\mu(l/k)V(K,q,k),$$

wobei μ die Möbiussche Umkehrfunktion ist. Laut [4, Hilfssatz 7] kann man die Anzahlen $V(K,q,k)$ zur Anzahl inäquivalenter Klassen indefiniter binärer quadratischer Formen in Verbindung setzen. Wegen (12) besteht also auch eine Verbindung von $T(K,q,l)$ zu dieser Anzahl.

In [1, (201)] wurde

$$(24)\qquad G(u)=(2\cosh(u/2))^{-2s}$$

gesetzt mit einer komplexen Variablen s. Die Reihe

$$(25)\qquad \zeta(q,g,s)=Z\big(q,g,(2\cosh(u/2))^{-2s}\big)$$

war für $\operatorname{Re}s>1/2$ absolut konvergent. Dieses gilt dann auch für die Teilreihen

$$(26)\qquad \zeta_1^+(q,K,s)=Z_1^+\big(q,K,(2\cosh(u/2))^{-2s}\big),$$

$$(27)\qquad \zeta_1^-(q,g,K,s)=Z_1^-\big(q,g,K,(2\cosh(u/2))^{-2s}\big).$$

Diese Konvergenzaussage kann man für die Reihen (26), (27) auch aus (13) ableiten.

In [3] wurde

$$(28)\qquad G(u)=e^{-su}$$

mit einer komplexen Variablen u genommen. Die Reihen

$$(29)\qquad \begin{aligned}\frac{\Xi'_{\mathrm{hyp}}}{\Xi_{\mathrm{hyp}}}(q,g,s)&=Z(q,g,e^{-su})\\ &=\sum_{\substack{\{P\}_{\Gamma(q)}\\ |\operatorname{Tr}P|>2}}(\operatorname{sign}\operatorname{Tr}P)\frac{\log N(P_0)}{N(P)^{1/2}-N(P)^{-1/2}}N(P)^{-s}\end{aligned}$$

sind für $\mathrm{Re}\, s > 1/2$ absolut konvergent. Man setze

$$\zeta_2^+(q, K, s) = Z_1^+(q, K, e^{-su}), \tag{30}$$

$$\zeta_2^-(q, g, K, s) = Z_1^-(q, g, K, e^{-su}). \tag{31}$$

Dann folgt aus (19)

$$\frac{\Xi'_{\mathrm{hyp}}}{\Xi_{\mathrm{hyp}}}(q, g, s) = 2 \sum_{K \in \mathfrak{K}^+(q)} \log|\varepsilon_0(K, q)| \zeta_2^+(q, K, s) + 2 \sum_{K \in \mathfrak{K}^-(q)} \log|\varepsilon_0(K, q)| \zeta_2^-(q, g, K, s). \tag{32}$$

Dabei ist

$$\zeta_2^+(q, K, s) = \sum_{l=1}^{\infty} T(K, q, l) |\varepsilon_0(K, q)|^{-2ls} \quad (K \in \mathfrak{K}^+(q)), \tag{33}$$

$$\zeta_2^-(q, g, K, s) = \sum_{l=1}^{\infty} T(K, q, l)(-1)^{gl} |\varepsilon_0(K, q)|^{-2ls} \quad (K \in \mathfrak{K}^-(q)). \tag{34}$$

Die Reihen (33), (34) konvergieren auch für $\mathrm{Re}\, s > 1/2$ absolut. Das folgt einmal, weil sie Teilreihen von (29) sind, zum anderen aber auch aus (13).

Aus [3, (128)] entnimmt man noch, daß (29) die logarithmische Ableitung von

$$\Xi_{\mathrm{hyp}}(q, g, s) = \Big(\prod_{K \in \mathfrak{K}^+(q)} Y^+(q, K, s) \Big) \Big(\prod_{K \in \mathfrak{K}^-(q)} Y^-(q, g, K, s) \Big) \tag{35}$$

ist. Dabei wurde

$$Y^+(q, K, s) = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} \big(1 - |\varepsilon_0(K, q)|^{-k-2km-2ks}\big)^{U(K,q,k)} \quad (K \in \mathfrak{K}^+(q)), \tag{36}$$

$$Y^-(q, g, K, s) = \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{m=0}^{\infty} \big(1 - (-1)^{gk} |\varepsilon_0(K, q)|^{-k-2km-2ks}\big)^{U(K,q,k)} \quad (K \in \mathfrak{K}^-(q)) \tag{37}$$

gesetzt. Wie in Fischer [5, Seite 56], erkennt man

$$\frac{Y^{+\prime}}{Y^+}(q, K, s) = 2 \log|\varepsilon_0(K, q)| \zeta_2^+(q, K, s) \quad (K \in \mathfrak{K}^+(q)), \tag{38}$$

$$\frac{Y^{-\prime}}{Y^-}(q, g, K, s) = 2 \log|\varepsilon_0(K, q)| \zeta_2^-(q, g, K, s) \quad (K \in \mathfrak{K}^-(q)). \tag{39}$$

Wegen (13) konvergiert die Potenzreihe

$$P(q, K, z) = \sum_{l=1}^{\infty} T(K, q, l) z^l \tag{40}$$

für

$$|z| < |\varepsilon_0(K, q)|^{-1}. \tag{41}$$

Aus (33), (34), (40) folgt

$$\zeta_2^+(q, K, s) = P\big(q, K, |\varepsilon_0(K, q)|^{-2s}\big) \quad (K \in \mathfrak{K}^+(q)), \tag{42}$$

$$\zeta_2^-(q, g, K, s) = P\big(q, K, (-1)^g |\varepsilon_0(K, q)|^{-2s}\big) \quad (K \in \mathfrak{K}^-(q)). \tag{43}$$

Über die Reihen (20), (21), (26), (27), (33), (34), (40) scheint bisher nicht viel bekannt zu sein. Natürlich stellt sich die Frage nach meromorpher Fortsetzbarkeit und Funktionalgleichung. Für die Reihen (29) kann man aus [3, (136) und (145)] eine Funktionalgleichung ableiten. Daher wird man auch am ehesten damit rechnen können, daß die Funktionen (33), (34) bzw. (36), (37) eine Funktionalgleichung besitzen.

Literatur

[1] U. Christian, *Untersuchung Selbergscher Zetafunktionen*, J. Math. Soc. Japan 41 (1989), 503–537.

[2] –, *Zur Theorie Selbergscher Zetafunktionen*, Arch. Math. (Basel) 52 (1989).

[3] –, *Über "Primzahlsätze" für hyperbolische Klasssen und die Konvergenzabszisse der logarithmischen Ableitung einer Selbergschen Zetafunktion für elliptische Modulgruppen*, Tôhoku Math. J.

[4] –, *Arithmetische Eigenschaften hyperbolischer Klassen elliptischer Modulgruppen*, Math. Z.

[5] J. Fischer, *An approach to the Selberg trace formula via the Selberg zetafunction*, Lecture Notes in Math. 1253, Springer, 1987.

[6] P. Sarnak, *Class numbers of indefinite binary quadratic forms*. J. Number Theory 15 (1982), 229–247.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN
Bunsenstrasse 3-5
D-3400 Göttingen
Bundesrepublik Deutschland

Eingegangen am 15.3.1990
und in revidierter Form 21.1.1991 (2018)