ACTA ARITHMETICA
LIX.3 (1991)

Généralisation des suites de Pisot et de Boyd II

par

M.-J. Bertin (Paris)

Introduction. Dans un article précédent [2], nous généralisions les E-suites de Pisot en définissant les $E(2)$-suites $E(a_0, a_1, a_2, a_3)$ d'entiers rationnels à partir des entiers positifs a_0, a_1, a_2, a_3 par les inégalités

$$-1/2 < D^3(a_n)/D^2(a_n) \leqslant 1/2, \quad n \geqslant 0,$$

où $D^k(a_n)$ désigne le déterminant de Hankel d'ordre k de la suite (a_n), ayant pour première ligne $(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1})$.

A certaines de ces suites, dites "convergentes" "réelles", nous faisions correspondre un ensemble $E(2)$ de couples (α, β) de nombres réels de module supérieur à 1 et montrions que l'ensemble $E(2)$ contient l'ensemble des couples d'entiers algébriques réels de module supérieur à 1 dont les autres conjugués ont un module inférieur ou égal à 1.

En 1960, Flor [4] prouvait que le point limite α, supérieur à 1, associé à une E-suite de Pisot "récurrente" [6], est un entier algébrique supérieur à 1 dont tous les autres conjugués ont un module inférieur ou égal à 1 (i.e. α est un nombre de Pisot ou de Salem) et que le polynôme minimal de la récurrence a toutes ses racines simples.

Nous nous proposons ici de généraliser ce résultat de Flor en montrant que le couple limite (α, β), $|\alpha| > 1$, $|\beta| > 1$, $\alpha \neq \beta$, associé à une $E(2)$-suite "convergente" et récurrente, est un couple d'entiers algébriques dont tous les autres conjugués ont un module inférieur ou égal à 1. Nous prouverons également que le polynôme minimal de la récurrence ne possède que des racines simples.

Définition 1. On appelle *$E(2)$-suite* une suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ d'entiers, notée $E(a_0, a_1, a_2, a_3)$, définie à partir des entiers positifs a_0, a_1, a_2, a_3 par les inégalités

$$-1/2 < D^3(a_n)/D^2(a_n) \leqslant 1/2, \quad n \geqslant 0, \tag{1}$$

où $D^k(a_n)$ désigne le déterminant de Hankel d'ordre k de la suite (a_n).

DÉFINITION 2. Une $E(2)$-suite est dite "*convergente*" si elle vérifie en outre

$$\sigma_2 = \lim_{n\to+\infty} D^2(a_{n+1})/D^2(a_n) \tag{2}$$

et

$$\sigma_1 = \lim_{n\to+\infty} (a_n a_{n+3} - a_{n+1}a_{n+2})/D^2(a_n) \tag{3}$$

et si l'équation $x^2-\sigma_1 x+\sigma_2$ possède deux racines α et β de module strictement supérieur à 1.

LEMME. *Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels telle qu'il existe un entier $k\geqslant 1$ pour lequel la suite $(D^k(a_n)/D^{k-1}(a_n))_n$ soit bornée. Alors la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ possède au plus $k-1$ pôles dans $|z|<1$.*

Démonstration. Notons $l_p = \overline{\lim}_{m\to+\infty} |D^{p+1}(a_m)|^{1/m}$, $p\geqslant 0$, $l_{-1}=1$. D'après Hadamard [5], la suite l_{p-1}/l_p, $p\geqslant 0$, est croissante; en outre, si pour $p=p_1$, on a l'inégalite stricte $\varrho_{p_1} = l_{p_1-1}/l_{p_1} > l_{p_1-2}/l_{p_1-1}$, alors $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ est méromorphe dans un cercle de rayon ϱ_{p_1} et admet, à l'intérieur de ce cercle, p_1 pôles comptés avec leur multiplicité, de modules l_{p-1}/l_p, $p\leqslant p_1-1$.

D'après l'hypothèse, $l_{k-1}/l_{k-2}\leqslant 1$, soit $1\leqslant l_{k-2}/l_{k-1}=\varrho_{k-1}$. Si $\varrho_0=\varrho_1=\ldots=\varrho_{k-1}$, alors f est sans pôle dans le disque unité. Sinon, soit h_0 le plus grand entier vérifiant $2\leqslant h_0\leqslant k$ et

$$\varrho_{k-h_0} < \varrho_{k-h_0+1} = \varrho_{k-h_0+2} = \ldots = \varrho_{k-1};$$

alors f admet $k-h_0+1$ $(\leqslant k-1)$ pôles dans le disque de rayon ϱ_{k-1}, donc au plus $k-1$ pôles dans le disque unité.

THÉORÈME. *Si la $E(2)$-suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ "convergente" est récurrente de polynôme minimal P et a pour couple limite associé (α,β), $|\alpha|>1$, $|\beta|>1$, $\alpha\neq\beta$, alors on a $P(X)=(X-\alpha)(X-\beta)Q(X)$, Q ne possédant que des racines simples de module inférieur ou égal à 1.*

Par suite, (α,β) est un couple d'entiers algébriques dont les autres conjugués ont un module inférieur ou égal à 1.

Démonstration. Par hypothèse, la fonction génératrice de la suite (a_n), $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$, est rationnelle. Par suite, $f(1/z)$ possède un ensemble fini de pôles $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ ordonnés par modules décroissants $|\alpha_1|\geqslant|\alpha_2|\geqslant\ldots\geqslant|\alpha_k|$. Comme la suite (a_n) vérifie (2), on a

$$\lim_{n\to+\infty} |D^2(a_n)|^{1/n} = |\sigma_2| = |\alpha\beta| > 1.$$

Mais d'après les résultats de Hadamard [5], $l_1=\lim_{n\to+\infty}|D^2(a_n)|$ vérifie $(l-1)/l_1 = 1/l_1 = 1/|\alpha_1\alpha_2|$; or $l_1=|\sigma_2|$; d'où $|\alpha_1\alpha_2|>1$ et $|\alpha_1|>1$.

D'après le lemme et l'inégalité (1), $f(z)$ possède au plus 2 pôles dans $|z|<1$. Par suite $|\alpha_3|\leqslant 1$. Nous allons montrer que (2) et (3) impliquent $|\alpha_2|>|\alpha_3|$.

Si $|\alpha_2|>1$, l'assertion est évidemment vérifiée. Supposons donc $|\alpha_2|\leqslant 1$ et $|\alpha_2|=|\alpha_3|$. Ecrivons:

$$a_n = \lambda\alpha_1^n + \psi(n)\delta^n + O(\varrho^n),$$

$$\delta = |\alpha_2| = |\alpha_3| = \ldots = |\alpha_s|, \quad 0<\delta\leqslant 1, \quad 0<\varrho<1,$$

$$\psi(n) = \sum_{j=0}^{k} \psi_j(n) n^j, \quad \psi_j \text{ combinaison linéaire de sinus et de cosinus.}$$

La fonction ψ a donc une croissance polynomiale en n. On obtient alors, grâce à (2),

$$\alpha\beta = \lim_{n\to+\infty} \frac{D^2(a_{n+1})}{D^2(a_n)} = \alpha_1\delta \lim_{n\to+\infty}\left[\frac{\delta^2\psi(n+2)-2\alpha_1\delta\psi(n+1)+\alpha_1^2\psi(n)}{\delta^2\psi(n+1)-2\alpha_1\delta\psi(n)+\alpha_1^2\psi(n-1)}\right]$$

avec $|\alpha\beta|=|\alpha_1\delta|$, sinon on obtiendrait pour ψ une croissance ou une décroissance exponentielle et non une croissance polynomiale.

Comme $\alpha\beta$ et $\alpha_1\delta$ sont réels, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\delta^2\psi(n+2)-2\alpha_1\delta\psi(n+1)+\alpha_1^2\psi(n)}{\delta^2\psi(n+1)-2\alpha_1\delta\psi(n)+\alpha_1^2\psi(n-1)} = \varepsilon, \quad \varepsilon=\pm 1;$$

d'où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\delta^2\psi_k(n+2)-2\alpha_1\delta\psi_k(n+1)+\alpha_1^2\psi_k(n)}{\delta^2\psi_k(n+1)-2\alpha_1\delta\psi_k(n)+\alpha_1^2\psi_k(n-1)} = \varepsilon.$$

Posant $g(n)=\psi_k(n)-\varepsilon\psi_k(n-1)$, on obtient:

$$\lim_{n\to+\infty} (\delta^2 g(n+2)-2\alpha_1\delta g(n+1)+\alpha_1^2 g(n)) = 0$$

et d'après le lemme 2 de Flor [4],

$$\delta^2 g(n+2)-2\alpha_1\delta g(n+1)+\alpha_1^2 g(n) = 0, \quad \forall n\in N.$$

Comme g, bornée, ne peut avoir une décroissance exponentielle, cela entraîne $g\equiv 0$, soit $\psi_k(n)-\varepsilon\psi_k(n-1)=0$, $\forall n\in N$, ou encore $\psi_k(n)=\mu\varepsilon^n$.

L'égalité (3) donne alors

$$\sigma_1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+3}a_n - a_{n+2}a_{n+1}}{D^2(a_n)} = \alpha_1+\delta\varepsilon.$$

Par suite α_1 et $\delta\varepsilon$ sont racines du polynôme $X^2-\sigma_1 X+\sigma_2$; d'où la contradiction avec la définition de $E(2)$-suite "convergente" si $0<\delta\leqslant 1$.

On a donc $|\alpha_1|\geqslant|\alpha_2|>|\alpha_3|$. Si α_1 et α_2 sont réelles distinctes, on écrit

$$a_n = \lambda\alpha_1^n + \mu\alpha_2^n + O(\varrho^n), \quad 0<\varrho\leqslant 1;$$

si $\alpha_1 = \alpha_2$ est racine double réelle, on écrit

$$a_n = (\lambda + \mu n)\alpha_1^n + O(\varrho^n), \qquad 0 < \varrho \leqslant 1;$$

enfin, si $\alpha_2 = \bar{\alpha}_1$, on écrit

$$a_n = \lambda\alpha_1^n + \bar{\lambda}\bar{\alpha}_1^n + O(\varrho^n), \qquad 0 < \varrho \leqslant 1.$$

Dans tous les cas, les relations (2) et (3) entraînent

$$\alpha\beta = \sigma_2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{D^2(a_{n+1})}{D^2(a_n)} = \alpha_1\alpha_2$$

et

$$\alpha + \beta = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+3}a_n - a_{n+1}a_{n+2}}{D^2(a_n)} = \alpha_1 + \alpha_2.$$

Par suite, α_1 et α_2 sont les deux racines du polynôme $x^2 - \sigma_1 x + \sigma_2$, c'est-à-dire α et β.

Il suffit, pour achever la démonstration du théorème, de montrer que les racines de module inférieur ou égal à 1 de P sont simples. Ecrivons $a_n = \lambda\alpha^n + \mu\beta^n + \varphi(n) + o(1)$, avec $\varphi(n) = \sum_{j=0}^{k} \varphi_j(n) n^j$, φ_j combinaison linéaire de sinus et cosinus et montrons que $k = 0$.

Notons L l'opérateur différence de polynôme minimal $(x-\alpha)(x-\beta)$. On a

$$D^3(a_n) = L^2(a_n)D^2(a_n) + O(a_n) \qquad \text{avec} \qquad a_n = o(D^2(a_n)).$$

Par suite, puisque $(a_n)_{n \geqslant 0}$ est une $E(2)$-suite, $D^3(a_n)/D^2(a_n)$ est borné et il en est de même de $L^2(a_n)$; donc $L^2(\varphi_k(n))$ est borné et si $k > 0$, après division par n^k, on obtient $\lim_{n \to +\infty} L^2(\varphi_k(n)) = 0$ et comme φ_k est combinaison linéaire de sinus et de cosinus, $L^2(\varphi_k(n)) = 0$, pour tout n, soit enfin $\varphi_k \equiv 0$; d'où la contradiction si $k > 0$. Finalement $k = 0$ et les racines de module 1 de P sont simples.

Les racines de module inférieur à 1 de P sont également simples car conjuguées de α ou β sinon leur norme serait inférieure à 1, ce qui est impossible pour un entier algébrique non nul.

Remarque. Le théorème précédent reste valable pour $\alpha = \beta$ sauf en ce qui concerne le polynôme Q pour lequel on peut seulement conclure que ses racines de module strictement inférieur à 1 sont doubles.

Bibliographie

[1] M.-J. Bertin, *Généralisation de suites de Pisot et de suites de Boyd*, Comptes-rendus de la conférence internationale de théorie des nombres (Québec, juillet 1987), W. de Gruyter, ed., 51–56.

[2] —, *Généralisation des suites de Pisot et de Boyd*, Acta Arith. 57 (1991), 211–223.

[3] D. W. Boyd, *Some integer sequences related to Pisot sequences*, ibid. 34 (1979), 295–305.

[4] P. Flor, *Über eine Klasse von Folgen natürlicher Zahlen*, Math. Ann. 140 (1960), 299–307.

[5] J. Hadamard, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, Oeuvres complètes, Tome I, p. 26.

[6] Ch. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 7 (1938), 205–248.

[7] —, *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*, Sém. Math. Sup., Montréal 1963.

[8] R. Salem, *Algebraic Numbers and Fourier Analysis*, Heath Math. Monographs, Boston 1963.

UNIVERSITÉ P. ET M. CURIE
MATHÉMATIQUES
UFR 920-4, Place Jussieu
75005 Paris, France

Reçu le 13.10.1989
et révisé le 22.5.1990 (1979)