ACTA ARITHMETICA
LIX.2 (1991

# Гипотеза Римана и поведение функции $Z(t)$ в коротких промежутках

Ян Мозер (Братислава)

В предлагаемой работе получены новые следствия из гипотезы Римана на коротких промежутках критической прямой, в следующих направлениях:

(А) в вопросе о распределении кратностей нулей функции $\zeta(1/2+it)$,

(Б) в вопросе об оценках снизу для сумм, зависящих от локальных максимумов функции $|Z(t)|$.

При этом полученные закономерности действуют и на очень коротких промежутках, например, длиною $(\ln T)^{\psi(T)}$ ($0 < \psi(T)$ — функция, сколь угодно медленно возрастающая к $\infty$ при $T \to \infty$), на которые, вероятно, не распространяется метод тригонометрических сумм.

**1. О распределении кратностей нулей функции** $\zeta(1/2+it)$. Пусть $n(\gamma)$ обозначает кратность нуля $t = \gamma$ функции $\zeta(1/2+it)$.

В 1918 г. Харди и Литтлвуд доказали теорему (см. [2], стр. 177–184), уточняющую фундаментальную теорему Харди от 1914 г. (см. [1]), которую можно выразить следующим образом: соотношение $2|n(\gamma)$ не может удовлетворяться для всех нулей $t = \gamma$, лежащих в промежутке $(T, T+T^{1/4+2\omega})$, при всех достаточно больших $T > 0$ ($0 < \omega$ — сколь угодно малое число).

В настоящей работе мы докажем, что теорему Харди и Литтлвуда можно продолжить следующим образом.

Теорема 1. *По гипотезе Римана, соотношение*

$$2k|n(\gamma) \tag{1}$$

*где*

$$k = 2, 3, \ldots, k_0, \quad k_0 = \left[\frac{1}{\psi(T)} \cdot \frac{\ln T}{\ln\ln T}\right], \tag{2}$$

*не может удовлетворяться для всех нулей $t = \gamma$ функции $\zeta(1/2+it)$, лежащих в промежутке*

$$(T, T+T^{1/(4k)+2\omega/k}) \tag{3}$$

*при всех достаточно больших $T > 0$.*

Следовательно, по этой теореме:
для всех нулей лежащих в промежутке

$$(T,\ T+T^{1/8+\omega})$$

не может удовлетворяться соотношение $4|n(\gamma)$,
для всех нулей лежащих в промежутке

$$(T,\ T+T^{1/12+2\omega/3})$$

не может удовлетворяться соотношение $6|n(\gamma)$ и т.д.

Явно отметим, что теорема 1 действует на коротких промежутках $(T,\ T+H_k)$, где (см. (2), (3))

(4) $$H_k = T^{1/(4k)+2\omega/k} \in \langle (\ln T)^{(1/4+2\omega+o(1))\psi(T)},\ T^{1/8+\omega}\rangle.$$

Далее напомним, что по гипотезе Римана справедлива следующая оценка Литтлвуда ([3], [4]):

(5) $$1 \leqslant n(\gamma) < A\frac{\ln\gamma}{\ln\ln\gamma}.$$

Условие Литтлвуда (5) является до сих пор единственной информацией о распределении кратностей $n(\gamma)$ в коротких промежутках $(T,\ T+H_k)$, см. (4). Однако, условие (5) допускает большое количество возможностей для распределения кратностей (т.е. и большое количество возможностей для поведения функции $Z(t)$) на упоминавшихся коротких промежутках.

Замечание 1. Теорема 1 исключает некоторые типы распределения кратностей и, тем самым, некоторые типы поведения функции $Z(t)$, допускаемые условием Литтлвуда (5).

**2. О суммах, зависящих от локальных максимумов функции $|Z(t)|$.** Пусть $\{\gamma\}$, $\gamma>0$ — возрастающая последовательность корней уравнения $Z(t)=0$.

Пусть $\{t_0\}$, $t_0>0$ — возрастающая последовательность корней нечетного порядка уравнения $Z'(t)=0$, удовлетворяющих условию $\gamma'<t_0<\gamma''$, где $\gamma'$, $\gamma''$ — соседние члены последовательности $\{\gamma\}$. Значит, $t_0$ — точка локального экстремума функции $Z(t)$, для которой $Z(t_0)\neq 0$.

В работе [6] мы доказали, по гипотезе Римана, следующую оценку снизу:

(6) $$\sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+H}|Z(t_0)| > \frac{1}{\pi}(1-\varepsilon)H\ln T, \qquad T\to\infty,$$

для $H\in\langle T^{\mu},\ \sqrt[4]{T}\rangle$ ($0<\varepsilon,\ \mu$ — сколь угодно малые числа).

При доказательстве оценки (6), кроме гипотезы Римана, мы использовали дискретный метод, интегрирование по несвязным множествам и тригонометрические суммы. Этим способом получаются оценки снизу и для сумм

$$\sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+U} Z^2(t_0), \qquad \sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+U}|Z(t_0)|^3,$$

при соответствующих $U$.

В настоящей работе, пользуясь новым методом, получаем следующий результат для более сложных сумм.

Теорема 2. *По гипотезе Римана,*

(7) $$\sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+H_k}|Z(t_0)|^{1/k} > A(1-\varepsilon)H_k\ln\ln T, \qquad T\to\infty,$$

*где*

$$H_k = T^{1/(4k)+2\omega/k}, \qquad k=2,3,\ldots,k_0=\left[\frac{1}{\psi(T)}\cdot\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right]$$

($0<A$ — *абсолютная постоянная*).

Следовательно, по этой теореме, например,

$$\sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+T^{1/8+\omega}}\sqrt{|Z(t_0)|} > A(1-\varepsilon)\,T^{1/8+\omega}\ln\ln T, \qquad T\to\infty.$$

Далее напомним, что в работе [6] мы получили следующие оценки ($U=\sqrt{T}\psi$):

(8) $$\frac{1}{\pi}(1-\varepsilon)U\ln T < \sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+U}|Z(t_0)| < \frac{1}{4\sqrt{3}}(1+\varepsilon)U(\ln T)^{3/2}.$$

Так как, по гипотезе Римана, члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ отделяют друг друга (см. [5], стр. 34, Следствие 3), то

$$\sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+U}1 \sim \frac{1}{2\pi}U\ln T, \qquad T\to\infty.$$

Теперь, пользуясь неравенством Гёльдера, получаем

(9) $$\sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+U}|Z(t_0)|^{1/k} \leqslant \Big(\sum_{t_0}|Z(t_0)|\Big)^{1/k}\Big(\sum_{t_0}1\Big)^{1-1/k} < U^{1/k}(\ln T)^{3/(2k)}\cdot(U\ln T)^{1-1/k} = U(\ln T)^{1+1/(2k)}.$$

Значит, из (7), $H_k\to U$, в силу (9) получаем:

Следствие. *По гипотезе Римана*:

(10) $$A(1-2\varepsilon)U\ln\ln T < \sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+U}|Z(t_0)|^{1/k} < U(\ln T)^{1+1/(2k)}, \qquad T\to\infty,$$

*для* $k=2,\ldots,k_0$.

Отсюда получаются, например, оценки (ср. (8)):

$$A(1-2\varepsilon)U\ln\ln T < \sum_{T\leqslant t_0\leqslant T+U}\sqrt{|Z(t_0)|} < U(\ln T)^{5/4}, \qquad T\to\infty.$$

Поскольку из оценки Литтлвуда

$$|Z(t)| = |\zeta(1/2+it)| < t^{A/\ln\ln t}$$

(см. [4], ср. [8], стр. 350) следует, что

$$|Z(t_0)|^{1/k_0} < e^{A\psi(T)}, \quad t_0 \in \langle T, T+U \rangle,$$

то делаем

Замечание 2. Оценка сверху в (10) не является тривиальной даже в случае $k = k_0$ (см. (2)).

Наконец заметим, что основным моментом при доказательстве теоремы 1 и 2 является использование свойств однозначных аналитических ветвей многозначных функций

$$\sqrt[k]{\zeta(s)}, \quad \sqrt[k]{G(s)}; \quad s = \sigma + it,$$

где (см. [8], стр. 81, 94)

$$G(s) = \{\chi(s)\}^{-1/2}\zeta(s), \quad \chi(s) = \frac{2^{s-1}\pi^s}{\Gamma(s)\cos(\pi s/2)}, \tag{11}$$

в области, часть границы которой составляет отрезок критической прямой. При этом, нули функции $\zeta(s)$ являются точками ветвления этих многозначных функций.

**3. Лемма о бесконечном ряде.** Для $\sigma > 1$ мы полагаем (ср. [7], стр. 11)

$$\{\zeta(s)\}^{1/k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(k)}{n^s}, \quad \alpha_1(k) = 1, \quad k = 2, 3, \ldots, k_0, \tag{12}$$

где фиксирована та ветвь многозначной функции, для которой

$$\{\zeta(\sigma)\}^{1/k} > 0.$$

Пользуясь произведением Эйлера, получаем

$$\{\zeta(s)\}^{1/k} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1/k} = \prod_p \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \binom{-1/k}{m} p^{-ms}$$

($p$ пробегает простые числа). Так как

$$0 < (-1)^m \binom{-1/k}{m} \leqslant 1,$$

то для

$$n = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \ldots p_j^{m_j}$$



получаем

$$\alpha_n(k) = (-1)^{m_1+\ldots+m_j} \binom{-1/k}{m_1} \ldots \binom{-1/k}{m_j}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

Следовательно,

$$0 < \alpha_n(k) \leqslant 1, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Справедлива

Лемма 1. *При любом достаточно большом* $T > 0$,

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n(k)}{n^{1+\omega}} \int_T^{T+H_k} e^{i\varphi(t;k,n)}\,dt = O(1), \tag{14}$$

*где*

$$H_k = T^{1/(4k)+2\omega/k}, \quad k = 2, \ldots, k_0, \quad k_0 = \left[\frac{1}{\psi(T)} \cdot \frac{\ln T}{\ln\ln T}\right],$$

$$\varphi(t;k,n) = \frac{\vartheta_1(t)}{k} - t\ln n, \quad \vartheta_1(t) = \tfrac{1}{2}t\ln\frac{t}{2\pi} - \tfrac{1}{2}t - \tfrac{1}{8}\pi.$$

Доказательство. (A) Так как

$$\varphi_t'(t;k,1) = \frac{1}{2k}\ln\frac{t}{2\pi} \geqslant \frac{1}{2k}\ln\frac{T}{2\pi} = \frac{1}{k}\ln P, \quad \varphi_{t^2}'' = \frac{1}{2kt} > 0,$$

для $t \in \langle T, T+H_k \rangle$, то (см. [8], стр. 73, Лемма 1)

$$\int_T^{T+H_k} e^{i\varphi(t;k,1)}\,dt = O\left(\frac{k}{\ln P}\right) = O\left(\frac{k_0}{\ln P}\right), \quad P = \sqrt{\frac{T}{2\pi}}$$

и, следовательно (см. (13)),

$$\alpha_1(k) \int_T^{T+H_k} e^{i\varphi(t;k,1)}\,dt = O\left(\frac{k_0}{\ln P}\right) = o(1). \tag{15}$$

(B) Если $2 \leqslant n < [P^{1/k}] = \tau$, то

$$\varphi_t'(t;k,n) \geqslant \frac{1}{k}\ln P - \ln n = \ln\frac{P^{1/k}}{n} \geqslant \ln\frac{\tau}{n} > 0, \quad \varphi_{t^2}'' = \frac{1}{2kt} > 0, \tag{16}$$

и, как в (A),

$$\int_T^{T+H_k} e^{i\varphi(t;k,n)}\,dt = O\left(\frac{1}{\ln(\tau/n)}\right).$$

Далее,

$$I_1=\sum_{2\leqslant n<\tau}\frac{\alpha_n(k)}{n^{1+\omega}\ln(\tau/n)}=\sum_{2\leqslant n<\tau/2}+\sum_{\tau/2\leqslant n<\tau}=I_2+I_3.$$

Очевидно (см. (13)),

$$I_2=O\left(\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\omega}}\right)=O(1).$$

В случае $I_3$ имеем

$$\ln\frac{\tau}{n}=\ln\frac{\tau}{\tau-l}=-\ln\left(1-\frac{l}{\tau}\right)>A\frac{l}{\tau},\qquad l=1,\ldots,L,\ L\leqslant\tau/2. \tag{17}$$

Следовательно (см. (13)),

$$I_3=O\left(\tau\sum_{1\leqslant l\leqslant\tau/2}\frac{1}{\tau^{1+\omega}l}\right)=O\left(\frac{\ln T}{\tau^{\omega}}\right)=O(T^{-\omega/(2k)}\ln T)$$

и

$$I_1=O(1)+O(T^{-\omega/(2k)}\ln T)=O(1)+O(T^{-\omega/(2k_0)}\ln T)=O(1). \tag{18}$$

(C) Если $n>\tau+1$, то, поскольку

$$\ln\frac{n}{\tau+1}\geqslant\ln\frac{\tau+2}{\tau+1}=\ln\left(1+\frac{1}{\tau+1}\right)\sim\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-1/(2k)},$$

$$\frac{H_k}{kT}=O(T^{-7/8+\omega}),$$

имеем (ср. (16))

$$\begin{aligned}-\varphi_t'(t;k,n)&=\ln n-\frac{1}{2k}\ln\frac{t}{2\pi}\geqslant\ln n-\frac{1}{2k}\ln\frac{T+H_k}{2\pi}\\&=\ln n-\frac{1}{2k}\ln\frac{T}{2\pi}-\frac{1}{2k}\ln\left(1+\frac{H_k}{T}\right)=\ln\frac{n}{P^{1/k}}+O\left(\frac{H_k}{kT}\right)\\&>\ln\frac{n}{[P^{1/k}]+1}+O\left(\frac{H_k}{kT}\right)=\ln\frac{n}{\tau+1}+O\left(\frac{H_k}{kT}\right)>\frac{1}{2}\ln\frac{n}{\tau+1}>0,\end{aligned}$$

$$-\varphi_{t^2}''=-1/(2kt)<0.$$

Значит ($\tau'=\tau+1$),

$$\int_T^{T+H_k}e^{i\varphi(t;k,n)}\,dt=O\left(\frac{1}{\ln(n/\tau')}\right).$$



Далее,

$$I_4=\sum_{\tau'<n}\frac{\alpha_n(k)}{n^{1+\omega}\ln(n/\tau')}=\sum_{\tau'<n\leqslant3\tau'/2}+\sum_{3\tau'/2<n}=I_5+I_6.$$

В случае $I_5$ имеем (ср. (17))

$$\ln\frac{n}{\tau'}=\ln\frac{l+\tau'}{\tau'}=\ln\left(1+\frac{l}{\tau'}\right)>A\frac{l}{\tau'},\qquad l=1,\ldots,L_1,\ L_1\leqslant\tau'/2.$$

Следовательно (ср. $I_3$),

$$I_5=O(T^{-\omega/(2k)}\ln T)=O(T^{-\omega/(2k_0)}\ln T)=o(1).$$

Так как, очевидно, $I_6=O(1)$, то

$$I_4=O(1). \tag{19}$$

(D) Далее, имеем

$$\sum_{n=\tau}^{\tau+1}\frac{\alpha_n(k)}{n^{1+\omega}}\int_T^{T+H_k}e^{i\varphi(t;k,n)}\,dt=O\left(\frac{H_k}{\tau^{1+\omega}}\right)=O(H_kT^{-1/(2k)-\omega/(2k)}). \tag{20}$$

Наконец, в силу (15), (18)–(20), получаем оценку

$$I=O(1)+O(H_kT^{-1/(2k)-\omega/2k})=O(1),$$

т.е. (15).

**4. Лемма об однозначной ветви функции $\{\zeta(s)\}^{1/k}$.** Для $\chi(s)$, в любой фиксированной полосе $\sigma_1\leqslant\sigma\leqslant\sigma_2$, при $t\to\infty$ имеем (см. (11) и [8], стр. 81)

$$\chi(s)=\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\sigma+it-1/2}e^{i(t+\pi/4)}\{1+O(1/t)\}, \tag{21}$$

и, далее ([8], стр. 94, 383),

$$\begin{gathered}Z(t)=\{\chi(1/2+it)\}^{-1/2}\zeta(1/2+it),\qquad\{\chi(1/2+it)\}^{-1/2}=e^{i\vartheta},\\ \vartheta=\vartheta_1+O(1/t),\qquad\vartheta_1=\tfrac12 t\ln(t/2\pi)-\tfrac12 t-\tfrac18\pi,\end{gathered} \tag{22}$$

где $Z(t)$ – действительна для действительных $t$.

Справедлива

Лемма 2. *По гипотезе Римана, при любом достаточно большом $T>0$,*

$$\int_T^{T+H_k}|Z(t)|^{1/k}\,dt>H_k+o(H_k),\qquad H_k=T^{1/(4k)+2\omega/k}, \tag{23}$$

$$k=2,3,\ldots,k_0,\qquad k_0=\left[\frac{1}{\psi(T)}\cdot\frac{\ln T}{\ln\ln T}\right].$$

Доказательство. Пусть $\zeta(1/2+iT)\neq 0$ и

$$\varrho_r = 1/2+i\gamma_r, \quad r=1,2,\ldots,q$$

— нули функции $\zeta(s)$, для которых

$$T<\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_q<T+H_k, \quad q=q(k).$$

Пусть далее $C_k(\varepsilon)$ обозначает непрерывную кривую, получающуюся видоизменением отрезка соединяющего точки $1/2+iT$, $1/2+i(T+H_k)$, следующим образом:

(а) нуль $\varrho_r$ обходим по дуге малой полуокружности с центром в точке $\varrho_r$ и радиусом $\varepsilon$, лежащей в полуплоскости $\sigma\geqslant 1/2$,

(б) так как точка $1/2+i(T+H_k)$ может быть нулем функции $\zeta(s)$, то мы ее обходим по дуге окружности (центр — в этой точке) соединяющей точки $1/2+i(T+H_k-\varepsilon)$, $1/2+\varepsilon+i(T+H_k)$.

Пусть, наконец, $L_k(\varepsilon)$ обозначает контур, образованный кривой $C_k(\varepsilon)$ и прямолинейными отрезками, соединяющими точки

$$1/2+\varepsilon+i(T+H_k), \quad 1+\omega+i(T+H_k), \quad 1+\omega+iT, \quad 1/2+iT.$$

Поскольку, по гипотезе Римана,

$$\zeta(s)\neq 0, \quad s\in D_k(\varepsilon),$$

где $D_k(\varepsilon)$ — область, ограниченная контуром $L_k(\varepsilon)$, то в этой области многозначная функция $\{\zeta(s)\}^{1/k}$ распадается на $k$ однозначных аналитических ветвей (нули функции $\zeta(s)$ являются точками ветвления многозначной функции $\{\zeta(s)\}^{1/k}$). Фиксируем произвольную из этих ветвей; обозначим ее через $\{\zeta(s)\}_0^{1/k}$. Теперь, по теореме Коши,

$$\int_{L_k(\varepsilon)} \{\zeta(s)\}_0^{1/k}\,ds = 0. \tag{24}$$

Так как из гипотезы Римана следует гипотеза Линделёфа, то (см. [8], стр. 323)

$$\zeta(\sigma+it) = O(t^{\omega/2}), \quad 1/2\leqslant\sigma. \tag{25}$$

Следовательно, для интегралов по горизонтальным отрезкам, получаем оценки

$$\int_{1/2+\varepsilon+i(T+H_k)}^{1+\omega+i(T+H_k)} \{\zeta(s)\}_0^{1/k}\,ds, \quad \int_{1+\omega+iT}^{1/2+iT} \{\zeta(s)\}_0^{1/k}\,ds = O(T^{\omega/(2k)}). \tag{26}$$

Далее, в силу (12), (13) (значение $\beta_1$ связано с выбором соответствующей ветви),



$$\begin{aligned}\int_{1+\omega+i(T+H_k)}^{1+\omega+iT} \{\zeta(s)\}_0^{1/k}\,ds &= -i\int_T^{T+H_k} \{\zeta(1+\omega+it)\}_0^{1/k}\,dt \\ &= -ie^{i\beta_1}\int_T^{T+H_k}\left(1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha_n(k)}{n^{1+\omega}}n^{-it}\right)dt \\ &= -ie^{i\beta_1}H_k + e^{i\beta_1}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha_n(k)}{n^{1+\omega}\ln n}\{n^{-i(T+H_k)}-n^{-iT}\} \\ &= -ie^{i\beta_1}H_k+O(1).\end{aligned} \tag{27}$$

Теперь, из (24), в силу (26), (27), получаем соотношение

$$\int_{C_k(\varepsilon)} \{\zeta(s)\}_0^{1/k}\,ds = ie^{i\beta_1}H_k+O(T^{\omega/(2k)}).$$

Переходя в этом соотношении сначала к пределу при $\varepsilon\to 0$ и, после этого, к модулям (см. также (22)), получаем (23).

**5. Лемма об однозначной ветви функции $\{G(s)\}^{1/k}$.** Имеет место

Лемма 3. *Если справедлива гипотеза Римана и функция $Z(t)$ сохраняет знак в промежутке $\langle T, T+H_k\rangle$* (см. (23)), *то, при любом достаточно большом $T>0$,*

$$\begin{aligned}\int_T^{\gamma_1}|Z(t)|^{1/k}\,dt + \sum_{l=2}^{q}\exp\left\{i\frac{\pi}{k}\sum_{r=1}^{l-1}n(\gamma_r)\right\}\int_{\gamma_{l-1}}^{\gamma_l}|Z(t)|^{1/k}\,dt \\ +\exp\left\{i\frac{\pi}{k}\sum_{r=1}^{q}n(\gamma_r)\right\}\int_{\gamma_q}^{T+H_k}|Z(t)|^{1/k}\,dt = o(H_k),\end{aligned} \tag{28}$$

*где $n(\gamma_r)$ — кратность нуля $1/2+i\gamma_r$ функции $\zeta(s)$.*

Доказательство. (А) Пусть

$$G(s) = \{\chi(s)\}^{-1/2}\zeta(s) \tag{29}$$

и рассмотрим функцию $\{G(s)\}^{1/k}$. Так как, по гипотезе Римана, $\zeta(s)\neq 0$ для $s\in D_k(\varepsilon)$ и, в силу (21), $\{\chi(s)\}^{-1/2}\neq 0$ для $s\in D_k(\varepsilon)$, то $G(s)\neq 0$ для $s\in D_k(\varepsilon)$. Следовательно, $\{G(s)\}^{1/k}$ распадается в области $D_k(\varepsilon)$ на $k$ однозначных аналитических ветвей.

Сначала предположим, что

$$Z(t)\geqslant 0, \quad t\in\langle T, T+H_k\rangle.$$

Не ограничивая общности изложения, можно предположить (см. конец доказательства леммы 2), что $Z(T)>0$. Теперь мы фиксируем нужную нам однозначную аналитическую ветвь функции $\{G(s)\}^{1/k}$ условием ($G(1/2+it) = Z(t)$, см. (22), (29))

$$\{G(1/2+iT)\}_0^{1/k} = \{Z(T)\}^{1/k} > 0$$

и будем следить за непрерывным изменением аргумента функции $\{G(s)\}_0^{1/k}$ вдоль $L_k(\varepsilon)$.

Так как

$$\arg\{G(1/2+iT)\}_0^{1/k} = 0, \quad |\{G(1/2+it)\}_0^{1/k}| = \{Z(t)\}^{1/k}, \quad t\in\langle T, \gamma_1-\varepsilon\rangle,$$

то

(30) $$\{G(1/2+iT)\}_0^{1/k} = \{Z(t)\}^{1/k}, \quad t\in\langle T, \gamma_1-\varepsilon\rangle.$$

Далее, в окрестности нуля $\varrho_1 = 1/2+i\gamma_1$, кратности $n(\gamma_1)$, имеем

$$G(s) = (s-\varrho_1)^{n(\gamma_1)}F(s), \quad F(\varrho_1)\neq 0,$$

где $F(s)$ — аналитическая функция, и, следовательно,

(31) $$\arg G(s) = n(\gamma_1)\arg(s-\varrho_1)+\arg F(s).$$

Так как на полуокружности, соединяющей точки $1/2+i(\gamma_1-\varepsilon)$, $1/2+i(\gamma_1+\varepsilon)$, для приращений аргументов стоящих на правой стороне (31) имеем

$$\Delta\arg(s-\varrho_1) = \pi, \quad \Delta\arg F(s) = o(1), \quad \varepsilon\to 0,$$

то

$$\Delta\arg G(s) = \pi n(\gamma_1)+o(1)$$

и, отсюда,

$$\Delta\arg\{G(s)\}_0^{1/k} = \frac{\pi}{k}n(\gamma_1)+o(1).$$

Следовательно (см. также (30)),

(32) $$\{G(1/2+it)\}_0^{1/k} = \{Z(t)\}^{1/k}\exp\left\{i\frac{\pi}{k}n(\gamma_1)+o(1)\right\}, \quad t\in\langle\gamma_1+\varepsilon, \gamma_2-\varepsilon\rangle.$$

Аналогичным образом получаем

(33) $$\{G(1/2+it)\}_0^{1/k} = \{Z(t)\}^{1/k}\exp\left\{i\frac{\pi}{k}\sum_{r=1}^{l-1} n(\gamma_r)+o(1)\right\}, \quad t\in\langle\gamma_{l-1}+\varepsilon, \gamma_l-\varepsilon\rangle, \quad l = 3, 4, \dots, q,$$

$$\{G(1/2+it)\}_0^{1/k} = \{Z(t)\}^{1/k}\exp\left\{i\frac{\pi}{k}\sum_{r=1}^{q} n(\gamma_r)+o(1)\right\}, \quad t\in\langle\gamma_n+\varepsilon, T+H_k-\varepsilon\rangle.$$



Теперь заметим, что соотношения (30), (32), (33) определяют значения функции $\{G(1/2+it)\}^{1/k}$ для $t\in M(\varepsilon)$, где

$$M(\varepsilon) = \langle T, \gamma_1-\varepsilon\rangle\cup\langle\gamma_1+\varepsilon, \gamma_2-\varepsilon\rangle\cup\ldots\cup\langle\gamma_q+\varepsilon, T+H_k-\varepsilon\rangle.$$

(B) По теореме Коши имеем

(34) $$\int_{L_k(\varepsilon)} \{G(s)\}_0^{1/k}\,ds = 0.$$

Так как (см. (21), (22))

(35) $$\{\chi(s)\}^{-1/2} = \left(\frac{t}{2\pi}\right)^{(\sigma-1/2)/2} e^{i\vartheta_1(t)}\left\{1+O\left(\frac{1}{t}\right)\right\},$$

то (см. (25), (29))

$$\{G(s)\}_0^{1/k} = O(T^{(\sigma-1/2+\omega)/(2k)}) = O(T^{1/(4k)+\omega/k}), \quad s\in D_k(\varepsilon).$$

Следовательно, для интегралов по горизонтальным отрезкам имеем

(36) $$\int_{1/2+\varepsilon+i(T+H_k)}^{1+\omega+i(T+H_k)} \{G(s)\}_0^{1/k}\,ds, \quad \int_{1+\omega+iT}^{1/2+iT} \{G(s)\}_0^{1/k}\,ds = O(T^{1/(4k)+\omega/k}).$$

Далее, так как

$$\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{1/4+\omega/2} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/4+\omega/2} + O\left(\frac{T^{1/4+\omega/2}H_k}{T}\right), \quad t\in\langle T, T+H_k\rangle,$$

то (см. (35))

(37) $$\{\chi(1+\omega+it)\}^{-1/(2k)} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/(4k)+\omega/(2k)} e^{i\vartheta_1(t)/k}\left\{1+O\left(\frac{H_k}{T}\right)\right\}$$

и (см. (12), (29), (37))

(38) $$\{G(1+\omega+it)\}_0^{1/k} = e^{i\beta_2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/(4k)+\omega/(2k)} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha_n(k)}{n^{1+\omega}}e^{i\{\vartheta_1(t)/k-t\ln n\}} + O(T^{-1+1/(4k)+\omega/k}H_k)$$

(значение $\beta_2$ связано с выбором ветви). Следовательно (см. (14), (38))

(39) $$\int_{1+\omega+i(T+H_k)}^{1+\omega+iT} \{G(s)\}_0^{1/k}\,ds = -i\int_T^{T+H_k} \{G(1+\omega+it)\}_0^{1/k}\,dt$$
$$= -ie^{i\beta_2}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^{1/(4k)+\omega/(2k)} O(1)+O(T^{-1+1/(4k)+\omega/k}H_k^2) = o(H_k).$$

Теперь, из (34), в силу (30), (32), (33), (36), (39), при $\varepsilon\to 0$ получается (28).

(C) Если $Z(t) \leqslant 0$, $t \in \langle T, T+H_k \rangle$ то, вместо $\{G(s)\}^{1/k}$ рассматриваем $\{-G(s)\}^{1/k}$. Так как теперь

$$-G(1/2+it) = -Z(t) \geqslant 0, \quad t \in \langle T, T+H_k \rangle,$$

то вышеизложенный способ приводит нас вновь к оценке (28).

**6. Завершение доказательства теоремы 1.** Итак предположим, что в промежутке

$$\langle T, T+H_k \rangle, \quad H_k = T^{1/(4k)+2\omega/k},$$

где $0 < T$ — достаточно большое число, удовлетворяются соотношения (см. (1))

$$2k | n(\gamma) \tag{40}$$

и, следовательно, функция $Z(t)$ сохраняет знак в этом промежутке. Теперь, по лемме 3, в силу (40), получается оценка

$$\int_T^{T+H_k} |Z(t)|^{1/k} dt = o(H_k).$$

Однако, по лемме 2,

$$\int_T^{T+H_k} |Z(t)|^{1/k} dt > H_k - |o(H_k)|,$$

что противоречиво.

**7. Завершение доказательства теоремы 2.** Прежде всего, из леммы 2 (см. (23)) получаем

$$(1-\varepsilon) H_k < \int_T^{T+H_k} |Z(t)|^{1/k} dt. \tag{41}$$

Как мы уже упоминали, члены последовательностей $\{\gamma\}$, $\{t_0\}$ отделяют друг друга (см. [5]). Значит, конфигурации $\gamma' < t_0 < \gamma''$ соответствует неравенство

$$\int_{\gamma'}^{\gamma''} |Z(t)|^{1/k} dt < (\gamma''-\gamma') |Z(t_0)|^{1/k} < \frac{A}{\ln\ln\gamma'} |Z(t_0)|^{1/k}, \tag{42}$$

где использована оценка Литтлвуда (см. [3])

$$\gamma'' - \gamma' < A/\ln\ln\gamma'.$$

Теперь (см. (41), (42))

$$(1-\varepsilon) H_k < \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+H_k} \int_{\gamma'}^{\gamma''} |Z(t)|^{1/k} dt < \frac{A}{\ln\ln T} \sum_{T \leqslant t_0 \leqslant T+H_k} |Z(t_0)|^{1/k}$$

и отсюда уже следует (7).



**8. Замечание рецензента.** Прежде всего напомним, что рецензент, анализируя классические работы А. Сельберга и соответствующую работу А. Фудзий (A. Fujii), получил оценку (см. [6], (*))

$$\sum_{T \leqslant \gamma' \leqslant T+H} (\gamma''-\gamma')^2 < A \frac{H}{\ln T}, \quad H \geqslant T^{\delta}, \tag{43}$$

где $0 < \delta$ — сколь угодно малое число.

Используя в надлежащем месте доказательства оценку (43), теорему 2 можно усилить в следующем смысле: $\ln\ln T$ заменяется на $\ln T$ для любого фиксированного $k$.

Наконец выражаю благодарность рецензенту за его замечания по поводу этой работы.

**Литература**


[1] G. H. Hardy, *Sur les zéros de la fonction ζ(s) de Riemann*, C. R. Acad. Sci. Paris 158 (1914), 1012–1014.

[2] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918), 119–196.

[3] J. E. Littlewood, *Two notes on the Riemann zeta-function*, Proc. Cambridge Philos. Soc. 22 (1924), 234–242.

[4] —, *On the zeros of the Riemann zeta-function*, ibid., 295–318.

[5] Ян Мозер, *Некоторые свойства дзета-функции Римана на критической прямой*, Acta Arith. 26 (1974), 33–39.

[6] —, *Гипотеза Римана и экстремальные значения функции Z(t)*, ibid. 56 (1990), 225–236.

[7] A. Selberg, *On the zeros of Riemann's zeta-function*, Skr. Norske Vid. Akad. Oslo (1942), No 10.

[8] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, Москва 1953.


KAT. MAT. ANAL. MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava
Czechoslovakia

*Поступило 4.5.1990*
*и в усправленной форме 30.8.1990* (2043)