ACTA ARITHMETICA
LIX.2 (1991)

Sur les puissances de convolution de la fonction de Dickman

par

HIKMA SMIDA (Tunis)

1. Introduction. Soit $\psi(x, y)$ le nombre des entiers $\leqslant x$ dont tous les facteurs premiers sont $\leqslant y$. Les propriétés asymptotiques de cette fonction ont beaucoup d'applications en arithmétique, et de nombreuses études lui sont consacrées – cf. par exemple ([4], [5], [11], [12], [15]). C'est en 1930 que Dickman [8] remarque le rôle central que joue la fonction ϱ dans le comportement asymptotique de $\psi(x, y)$. Soit $\varrho(u)$ la solution continue en $u = 1$ de l'équation différentielle aux différences

$$u\varrho'(u)+\varrho(u-1) = 0 \qquad (u > 1), \tag{1.1}$$

avec pour conditions initiales

$$\varrho(u) = 0 \qquad (u < 0),$$
$$\varrho(u) = 1 \qquad (0 \leqslant u < 1).$$

Dickman a montré que

$$\psi(x, y) \sim x\varrho(u) \qquad (u := \operatorname{Log} x/\operatorname{Log} y), \tag{1.2}$$

lorsque x et y tendent vers l'infini de sorte que $x^{\varepsilon} \leqslant y \leqslant x$.

Notons τ_k la fonction définie par $\tau_k(n) = \sum_{a_1 \ldots a_k = n} 1$. Soit $P(n)$ le plus grand facteur premier de n. Nous posons

$$S_k(x, y) := \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P(n) \leqslant y}} \tau_k(n).$$

Le comportement asymptotique de la fonction $S_k(x, y)$ est lié à une fonction ϱ_k généralisant celle de Dickman ([6], [16], [18]). Nous définissons $\varrho_k(u)$ comme la solution continue pour $u > 0$ de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{aligned} u\varrho_k'(u) &= (k-1)\varrho_k(u) - k\varrho_k(u-1) && (u > 1), \\ \varrho_k(u) &= u^{k-1}/\Gamma(k) && (0 < u \leqslant 1), \\ \varrho_k(u) &= 0 && (u \leqslant 0). \end{aligned} \tag{1.3}$$

De Bruijn et Van Lint [6] ont montré que l'on a

$$S_k(x,y) \sim x\varrho_k(u)(\operatorname{Log} y)^{k-1} \tag{1.4}$$

lorsque x et y tendent vers l'infini avec $u \ll 1$. Dans [7], De Koninck et Hensley montrent essentiellement que (1.4) reste valable dans le domaine

$$\exp\{(\operatorname{Log} x)^{5/8+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x, \tag{1.5}$$

pour tout $\varepsilon > 0$. Dans un prochain travail, reposant en partie sur les résultats présentés ici, nous établissons une forme effective de la relation (1.4), valable dans la région plus vaste

$$\exp\{(\operatorname{Log}_2 x)^{5/3+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x. \tag{1.6}$$

Nous nous proposons maintenant de faire une étude analytique et asymptotique de la quantité $\varrho_k(u)$, considérée comme fonction de deux variables réelles positives.

L'auteur tient à exprimer ses remerciements à H. Daboussi pour ses conseils et à G. Tenenbaum pour l'aide qu'il lui a apportée dans l'élaboration de ce travail.

2. Notations. La lettre p désigne un nombre premier. On note $P(n)$ le plus grand facteur premier de l'entier $n > 1$, par convention $P(1) = 1$.

Les lettres k, s désignent respectivement un réel strictement positif et un nombre complexe. On définit alors, implicitement, les nombres réels σ et t par $s = \sigma + it$.

Pour $s \in \boldsymbol{C}\backslash\boldsymbol{R}^-$ on désigne par $\operatorname{Log} s$ la valeur principale du logarithme complexe au point s.

Pour $u \neq 1$, nous définissons $\xi(u)$ comme l'unique solution non nulle de l'équation

$$e^{\xi(u)} = 1 + u\xi(u). \tag{2.1}$$

On pose $\xi(1) = 0$ et, lorsqu'aucune confusion n'est à craindre,

$$\xi := \xi(u/k). \tag{2.2}$$

Pour tout nombre complexe s, on pose

$$I(s) := \int_0^s \frac{e^v - 1}{v}\, dv,$$

et l'on note, avec $\xi = \xi(u/k)$,

$$\sigma_j := kI^{(j)}(\xi) \quad (j = 0, 1, \ldots). \tag{2.3}$$

On définit la transformée de Laplace par

$$\hat{f}(s) := \int_{\boldsymbol{R}} e^{-sv} f(v)\, dv.$$

Dans tout l'article nous posons systématiquement

$$u := \operatorname{Log} x/\operatorname{Log} y.$$

On désigne par γ la constante d'Euler. Enfin c, λ, ε sont des constantes strictement positives.

3. Enoncé des résultats. Soit $\varrho_k(u)$ la solution de (1.3) continue pour $u > 0$. Il est clair que $\varrho_1(u)$ est la fonction de Dickman. Dans [3], de Bruijn a étudié le comportement asymptotique de $\varrho(u)$. Il a démontré que

$$\varrho(u) \sim \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{2\pi u}} \exp\{-u\xi(u) + I(\xi(u))\}. \tag{3.1}$$

Au vu de la relation asymptotique $\xi(u) \sim \operatorname{Log} u$ $(u \to \infty)$ — cf. [11], lemme 1 — cela fournit une première idée des variations de $\varrho(u)$.

De Bruijn établit (3.1) en appliquant la méthode du col à la fonction

$$F_1(u) = \frac{1}{2i\pi} \int_W \exp\{-us + I(s)\}\, ds,$$

où W est le chemin formé par les trois segments $(-i\pi, +\infty)$, $(-i\pi, i\pi)$ $(i\pi, i\pi+\infty)$. Ensuite, il utilise un résultat général sur les équations de Volterra [2] qui implique

$$F_1(u) = [C + O(u^{-1/2})]\varrho(u).$$

Alladi [1] améliore (3.1) en utilisant la même technique. Il obtient

$$\varrho(u) = \frac{e^{\gamma}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \exp\{\sigma_0 - u\xi(u)\}(1 + \varphi(u)), \tag{3.2}$$

avec

$$\varphi(u) \ll 1/u,$$

$$\varphi(u) - \varphi(u-t) \ll_n t/(u \operatorname{Log}^n(1+u)) \quad (n \in \boldsymbol{N},\ t \ll 1).$$

Dans [10], Hensley étudie le comportement asymptotique de $\varrho_k(u)$. Il établit que l'on a

$$e^{-\gamma k}\varrho_k(u) = \frac{e^{-k\gamma + \sigma_0 - u\xi(u/k)}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \{1 + O(R_k(u))\}, \tag{3.3}$$

avec

$$R_k(u) \ll_\varepsilon 1/u \quad (\varepsilon < k \leqslant 1,\ u \geqslant 1),$$

$$R_k(u) \ll (u+k)^{-1/3} \quad (k \geqslant 1,\ u \geqslant 1).$$

Hensley utilise la technique de Bruijn pour prouver (3.3). Il montre par ailleurs que

$$\hat{\varrho}_k(s) = \int_0^{\infty} \varrho_k(v) e^{-vs} dv = e^{k\gamma + kI(-s)}. \tag{3.4}$$

Il paraît donc naturel d'appliquer la méthode du point selle pour évaluer $\varrho_k(u)$ à partir de la formule classique d'inversion de Laplace.

Nous avons appris au cours de la rédaction de cet article que Hildebrand [13] a précisément employé la même méthode pour étudier des fonctions $\varrho_k(u)$ définies par (1.3) pour k complexe borné, $\operatorname{Re} k > -1$.

L'objet principal de ce travail est d'obtenir le résultat suivant, qui fournit un développement asymptotique arbitrairement long pour $\varrho_k(u)$, lorsque u/k ou k/u tendent vers $+\infty$. Il est utile de garder en mémoire — cf. [11], lemme 1, lemme 4.3 — que l'on a

$$\xi = \xi(u/k) \sim \operatorname{Log} u/k \quad (u/k \to +\infty), \qquad \xi \sim -k/u \quad (u/k \to 0).$$

THÉORÈME 1. *Soient K un entier $\geqslant 0$, et ε un réel > 0. On a uniformément pour $u \geqslant 1$, $k \geqslant \varepsilon$, $\xi = \xi(u/k)$,*

$$\varrho_k(u) = \frac{e^{k\gamma + \sigma_0 - u\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}} \left\{ 1 + \sum_{j=1}^{K} \frac{L_j(\xi)}{\sigma_2^j} + O_{K,\varepsilon}\left(\frac{1}{(u+k)^{K+1}} \right) \right\}, \tag{3.5}$$

où l'on a posé

$$L_j(\xi) := \sum_{m=j+1}^{3j} \frac{(-1)^m (2m)!}{m! 2^m} \sum_{1 \leqslant r \leqslant 2m/3} \sum_{m-j=\alpha_1+\ldots+\alpha_r}^{*} \prod_{i=1}^{r} \left\{ \frac{1}{\alpha_i!} \left(\frac{\sigma_{n_i}}{\sigma_2 n_i!} \right)^{\alpha_i} \right\}, \tag{3.6}$$

avec les conditions de sommation:

$$(*) \qquad \begin{cases} 3 \leqslant n_1 < \ldots < n_r, \\ \alpha_1 \geqslant 1, \ldots, \alpha_r \geqslant 1, \\ \alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_r n_r = 2m. \end{cases}$$

De plus, on a pour chaque j fixé

$$L_j(\xi) \sigma_2^{-j} \ll (u+k)^{-j} \qquad (u \geqslant 1,\ k \geqslant \varepsilon), \tag{3.7}$$

et il existe des constantes l_j, m_j $(j = 1, 2, \ldots)$ telles que l'on ait

$$L_j(\xi) \sigma_2^{-j} = \begin{cases} (u+k)^{-j} \{ l_j + O_j(\operatorname{Log}^{-1}(1+u/k)) \} & (u/k \to +\infty), \\ (u+k)^{-j} \{ m_j + O_j(u/k) \} & (u/k \to 0). \end{cases} \tag{3.8}$$

Remarque. Nous verrons, au lemme 4.5, que l'on a

$$\sigma_j \sim u \quad (u/k \to +\infty), \qquad \sigma_j \sim (j-1)!\, u^j / k^{j-1} \quad (u/k \to 0).$$

Cela permet de calculer explicitement l_j et m_j pour tout j. En fait, on obtient l_j en faisant $\sigma_{n_i} = \sigma_2 = 1$ dans (3.6), et m_j en remplaçant en outre, dans le produit en i, le nombre $n_i!$ par n_i.

Les premières valeurs numériques sont rassemblées dans le tableau suivant:

j	1	2	3	4
l_j	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{31}{144}$	$\frac{139}{51.840}$	$-\frac{44.039.729}{7.962.624}$
m_j	$-\frac{1}{12}$	$\frac{1027}{96}$	$-\frac{2.702.561}{51.840}$	$-\frac{11.656.504.901}{2.488.320}$

En faisant $K = 0$ dans (3.5), nous retrouvons, avec un meilleur terme d'erreur, le résultat de Hensley. Nous en déduisons immédiatement les évaluations suivantes qui permettent de comparer $\varrho_k(u)$ à $\varrho(u/k)$ ou à $\varrho(u)$, lorsque k est fixé et $u \to +\infty$:

$$\varrho_k(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi u}} \left(\varrho(u/k) \sqrt{2\pi u/k} \right)^k \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{\operatorname{Log}(1+u/k)} \right) \right\} \qquad (u \geqslant k+1), \tag{3.9}$$

$$\varrho_k(u) = k^{u(1+O(1/\operatorname{Log}(1+u)))} \varrho(u) \qquad (u \to \infty). \tag{3.10}$$

4. Lemmes. Nous donnons d'abord quelques propriétés élémentaires concernant les variations de $\varrho_k(u)$.

LEMME 4.1. *Pour $k > 0$, on a*

$$u \varrho_k(u) = k \int_{u-1}^{u} \varrho_k(v) dv \qquad (u \in \boldsymbol{R}), \tag{4.1}$$

$$\varrho_k(u) = u^{k-1} \left[\frac{\varrho_k(a)}{a^{k-1}} - k \int_a^u \frac{\varrho_k(v-1)}{v^k} dv \right] \qquad (u > 0,\ a > 0). \tag{4.2}$$

Démonstration. La formule (4.1) est trivialement vérifiée pour $u \leqslant 1$. Par ailleurs, il découle de (1.3) que

$$u \varrho_k'(u) + \varrho_k(u) = k[\varrho_k(u) - \varrho_k(u-1)] \qquad (u > 1).$$

Les deux membres de (4.1) ont donc des dérivées égales pour $u > 1$ et prennent la même valeur en 1. On en déduit (4.1).

La formule (4.2) découle facilement de l'égalité suivante, obtenue à partir de (1.3):

$$[u^{1-k} \varrho_k(u)]' = -k u^{-k} \varrho_k(u-1) \qquad (u > 0).$$

LEMME 4.2. *Les deux assertions suivantes sont satisfaites pour chaque $k > 0$ fixé.*

(i) *$\varrho_k(u)$ est strictement positive sur $\boldsymbol{R}_+^*$.*

(ii) *Pour $k \geqslant 1$ la fonction $\varrho_k(u)$ est unimodale. Elle atteint son maximum au point $u = a_k$ satisfaisant à*

$$\max(1, k-1) \leqslant a_k \leqslant k.$$

Pour $k > 1$, elle est strictement croissante pour $0 < u < a_k$, strictement décroissante pour $u > a_k$.

(iii) *Pour $0 < k < 1$ la fonction $\varrho_k(u)$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.*

Démonstration. La propriété (i) est une conséquence de (4.1) et de la valeur de $\varrho_k(u)$ sur $]0, 1]$ (cf. (1.3)).

Par ailleurs, d'après (1.3), nous avons

$$u\varrho_k'(u) = -(1-k)\varrho_k(u) - k\varrho_k(u-1) \quad (u > 0). \tag{4.3}$$

Il suit, d'après (i), que $\varrho_k'(u)$ est strictement négative sur $]0, +\infty[$ pour $0 < k < 1$, et que $\varrho_k'(u)$ est strictement négative sur $[1, +\infty[$ pour $k = 1$.

Supposons à présent $k > 1$. On a

$$\varrho_k(u) = u^{k-1}/\Gamma(k) \quad (0 < u \leqslant 1),$$

donc $\varrho_k(u)$ est croissante sur $[0, 1]$. Si $\varrho_k(u)$ était strictement croissante sur $\boldsymbol{R}_+^*$ tout entier, on aurait d'après (4.1)

$$u\varrho_k(u) < k\varrho_k(u) \quad (u > 1),$$

ce qui est absurde dès que $u \geqslant k$. Donc

$$S := \{u\colon \varrho_k'(u) = 0\}$$

est non vide. Soit $a_k := \inf S$. Alors $\varrho_k(u)$ est croissante pour $0 < u \leqslant a_k$ et $a_k \geqslant 1$. D'après (4.3), on a $(k-1)\varrho_k(a_k) = k\varrho_k(a_k - 1)$. Par (4.1), il suit

$$(k-1)\varrho_k(a_k) \leqslant k \int_{a_k-1}^{a_k} \varrho_k(u)du = a_k\varrho_k(a_k) \leqslant k\varrho_k(a_k),$$

d'où

$$k-1 \leqslant a_k \leqslant k,$$

puisque $\varrho_k(a_k) \neq 0$.

Par ailleurs, nous obtenons en dérivant (1.3)

$$u\varrho_k''(u) = (k-2)\varrho_k'(u) - k\varrho_k'(u-1) \quad (u > 0).$$

Il en résulte que

$$a_k\varrho_k''(a_k) = -k\varrho_k'(a_k - 1) < 0,$$

ce qui prouve que a_k est un maximum local pour $\varrho_k(u)$.

Supposons à présent que $\varrho_k'(u)$ s'annule pour d'autres valeurs que a_k. Soit

$$b_k := \inf\{u > a_k\colon \varrho_k'(u) = 0\}.$$

$\varrho_k(u)$ est alors strictement décroissante sur $]a_k, b_k[$ et on a

$$(k-1)\varrho_k(b_k) - k\varrho_k(b_k - 1) = (k-1)\varrho_k(a_k) - k\varrho_k(a_k - 1) = 0.$$

On déduit alors du théorème de Rolle qu'il existe $c_k \in]a_k, b_k[$ tel que

$$(k-1)\varrho_k'(c_k) = k\varrho_k'(c_k - 1).$$

Puisque $k-1$ est supérieur à 0, les réels $\varrho_k'(c_k - 1)$ et $\varrho_k'(c_k)$ sont nécessairement de même signe; cela implique

$$b_k - 1 > a_k.$$

D'autre part, on déduit de la décroissance de ϱ_k sur $]a_k, b_k[$ et de la formule (4.1) que

$$b_k\varrho_k(b_k) \leqslant k\varrho_k(b_k - 1) = (k-1)\varrho_k(b_k),$$

donc

$$b_k \leqslant k-1,$$

ce qui contredit l'inégalité établie plus haut, à savoir $a_k \geqslant k-1$. On conclut donc que a_k est l'unique zéro positif de $\varrho_k'(u)$ et que $\varrho_k(u)$ est strictement décroissante sur $[a_k, +\infty[$.

Le lemme suivant rassemble quelques propriétés simples de la fonction $u \to \xi(u)$ $(u > 0)$.

Lemme 4.3. *On a*

(i) $$\xi(u) = \operatorname{Log}(u \operatorname{Log} u) + O(\operatorname{Log}_2(2u)/\operatorname{Log}(2u)) \quad (u \geqslant 2),$$

(ii) $$\tfrac{5}{4}(u-1) \leqslant \xi(u) \leqslant 2(u-1) \quad (1 \leqslant u \leqslant 2),$$

(iii) $$-1/u \leqslant \xi(u) \leqslant -1/u + 1 \quad (0 < u \leqslant 1).$$

Démonstration. Le point (i) est prouvé au lemme 1 de [11].

Pour montrer (ii) et (iii), on utilise le fait que $I'(\xi) = \int_0^1 e^{t\xi}dt$ est une fonction croissante de ξ sur $\boldsymbol{R}$. Ainsi, posant $u = 1 + v$, $0 \leqslant v \leqslant 1$, (ii) équivaut à

$$I'(\tfrac{5}{4}v) \leqslant 1 + v = I'(u) \leqslant I'(2v) \quad (0 \leqslant v \leqslant 1).$$

L'inégalité de droite découle du développement en série de e^{2v}, celle de gauche provient, par convexité, des cas $v = 0$, $v = 1$.

De même, (iii) équivaut à

$$u(1 - e^{-1/u}) = I'(-1/u) \leqslant I'(\xi(u)) = u \leqslant I'(-1/u + 1).$$

L'inégalité de gauche est évidente, celle de droite s'écrit encore

$$e^{1-1/u} \leqslant u,$$

c'est-à-dire

$$1-1/u+\mathrm{Log}(1/u) \leqslant 0 \quad (0<u<1).$$

Cette inégalité est bien connue.

Remarque. Le point (iii) implique

$$\xi(u) = -\frac{1}{u}+O\left(\frac{1}{u}e^{-1/u}\right) \quad (u \to 0^+).$$

LEMME 4.4. *Posons* $\sigma_0 := kI(\xi(u/k))$. *Pour* $u>0$, $k>0$, *on a*

(i) $$u-k \leqslant \sigma_0 \leqslant (u-k)(1+3/\xi) \quad (u \geqslant k),$$

(ii) $$-k\left(\mathrm{Log}\frac{k}{u}+1\right) \leqslant \sigma_0 \leqslant -k\left(\mathrm{Log}\frac{k}{u}-1\right) \quad (0<u\leqslant k).$$

Remarque. Lorsque $u \to k$, on a $\xi = \xi(u/k) \to 0$; la majoration de (i) doit être interprétée en tenant compte du lemme 4.3 (ii), soit

$$u-k \leqslant \sigma_0 \leqslant u+\tfrac{7}{5}k \quad (u \geqslant k).$$

Bien entendu, $\sigma_0 = 0$ si $u=k$.

Démonstration. Montrons (i). Pour $u \geqslant 1$, on a

$$kI(\xi) = k\int_0^1 \frac{e^{t\xi}-1}{t}\,dt = k\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\frac{\xi^n}{n!} \quad \text{et} \quad kI'(\xi) = k\sum_{n\geqslant 0}\frac{\xi^n}{(n+1)!}.$$

On peut écrire

$$0 \leqslant k+kI(\xi)-kI'(\xi) = k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi^n}{n(n+1)!} \leqslant 3k\sum_{n=1}^{\infty}\xi^n/(n+2)!$$
$$\leqslant 3k(e^{\xi}-1-\xi)/\xi^2 = 3(u-k)/\xi.$$

On obtient bien (i).

Montrons (ii). Considérons le cas $k=1$ (le cas général s'en déduit immédiatement). Par le lemme 4.3 (iii), on peut écrire

$$I(\xi(u)) \geqslant \int_0^1 \frac{e^{-t/u}-1}{t}\,dt \geqslant \int_0^u\left(-\frac{1}{u}\right)dt - \int_u^1\frac{dt}{t} = -1-\mathrm{Log}\frac{1}{u},$$

et

$$I(\xi(u)) \leqslant \int_0^1 \frac{e^{-t(1/u-1)}-1}{t}\,dt \leqslant \int_u^1 \frac{e^{-t(1/u-1)}-1}{t}\,dt$$
$$\leqslant e\int_1^{\infty}\frac{e^{-v}}{v}\,dv - \mathrm{Log}\frac{1}{u} < 1-\mathrm{Log}\frac{1}{u}.$$

LEMME 4.5. *Pour* $u>0$, $k>0$, *posons* $\sigma_j := kI^{(j)}(\xi(u/k))$. *On a les estimations suivantes pour* $j \geqslant 1$:

(i) $$0 < \sigma_{j+1} < \sigma_j \quad (u>0),$$

(ii) $$u-\frac{(j-1)}{\xi}(u-k) \leqslant \sigma_j \leqslant u \quad et \quad u/j \leqslant \sigma_j \quad (u>k),$$

(iii) $$\sigma_j = u\left\{1+O\left(\frac{1}{1+\mathrm{Log}(u/k)}\right)\right\} \quad (u>k),$$

(iv) $$k\frac{(j-1)!}{|\xi|^j}(1-2^je^{-|\xi|/2}) \leqslant \sigma_j \leqslant k\frac{(j-1)!}{|\xi|^j} \quad (0<u<k),$$

(v) $$\sigma_j = (j-1)!\frac{u^j}{k^{j-1}}\{1+O(u/k)\} \quad (0<u\leqslant k),$$

(vi) $$\frac{u^2}{4k} \leqslant \sigma_2 \leqslant e\frac{u^2}{k}, \quad \sigma_3 \leqslant 2e\frac{u^3}{k^2} \quad (0<u\leqslant k).$$

Démonstration. Le point (i) découle immédiatement de la formule

$$\sigma_j = k\int_0^1 t^{j-1}e^{t\xi}\,dt. \tag{4.4}$$

Pour la preuve des autres points, nous pouvons comme précédemment supposer $k=1$. Il découle en particulier de (4.4) que l'on a pour $u \geqslant 1$

$$\sigma_j = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\xi^n}{n!(n+j)}.$$

Au vu des inégalités

$$\frac{1}{n+1}-\frac{j-1}{(n+1)(n+2)} \leqslant \frac{1}{n+j} \leqslant \frac{1}{n+1} \quad (j \geqslant 1)$$

et

$$\frac{1}{j(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+j},$$

on obtient

$$\sigma_1-\frac{(j-1)}{\xi^2}(e^{\xi}-1-\xi) \leqslant \sigma_j \leqslant \sigma_1, \quad \sigma_1/j \leqslant \sigma_j,$$

d'où (ii). Le point (iii) en découle immediatement grâce aux points (i) et (ii) du lemme 4.3.

Pour $u<1$, on a $\xi<0$, d'où

$$\sigma_j = \int_0^1 t^{j-1}e^{-t|\xi|}\,dt = \int_0^{\infty} t^{j-1}e^{-t|\xi|}\,dt - \int_1^{\infty} t^{j-1}e^{-t|\xi|}\,dt$$
$$\leqslant \int_0^{\infty} t^{j-1}e^{-t|\xi|}\,dt = (j-1)!/|\xi|^j.$$

On a de plus

$$\int_1^\infty t^{j-1}e^{-t|\xi|}dt = |\xi|^{-j}\int_{|\xi|}^\infty v^{j-1}e^{-v}dv \leqslant |\xi|^{-j}e^{-|\xi|/2}\int_0^\infty v^{j-1}e^{-v/2}dv$$
$$= (j-1)!\,2^j|\xi|^{-j}e^{-|\xi|/2}.$$

Cela implique bien (iv). Le point (iii) du lemme 4.3 implique alors (v).

Enfin, on a pour $0 < u \leqslant 1$

$$\sigma_2 = \int_0^1 te^{-t|\xi|}dt \geqslant \int_0^1 te^{-t/u}dt = u^2\int_0^{1/u} ve^{-v}dv \geqslant u^2\int_0^1 ve^{-v}dv \geqslant u^2/4,$$

$$\sigma_2 = \int_0^1 te^{t\xi}dt \leqslant \int_0^1 te^{-t/u+t}dt \leqslant e\int_0^\infty te^{-t/u}dt = eu^2,$$

et

$$\sigma_3 = \int_0^1 t^2e^{-t|\xi|}dt \leqslant \int_0^1 t^2e^{-t/u+t}dt \leqslant 2eu^3.$$

LEMME 4.6. *Pour $k > 0$ posons*

$$F_k(u, t) := \sum_{j\geqslant 3}(-it)^j\frac{\sigma_j}{j!}. \tag{4.5}$$

On a alors pour tout $t \in \mathbf{C}$

$$\exp\{F_k(u, t)\} = 1 + \sum_{h=3}^\infty A_h(u, k)\frac{(-it)^h}{h!}, \tag{4.6}$$

avec

$$\frac{1}{h!}A_h(u, k) = \sum_{1\leqslant r\leqslant h/3}\sum{}^*\prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{\sigma_{n_i}}{n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}, \tag{4.7}$$

avec les conditions de sommation:

$$(*)\qquad \begin{cases}3 \leqslant n_1 < \ldots < n_r,\\ \alpha_1 \geqslant 1, \ldots, \alpha_r \geqslant 1,\\ \alpha_1 n_1 + \ldots + \alpha_r n_r = h.\end{cases}$$

Démonstration. Il suffit de développer en série les exponentielles dans la formule

$$\exp\{F_k(u, t)\} = \prod_{j=3}^\infty \exp\{(-it)^j\sigma_j/j!\}.$$

LEMME 4.7. *Pour $u > 0$, $k > 0$, $h \geqslant 3$ on a*

$$\left|\frac{1}{h!}A_h(u, k)\right| \leqslant \frac{5}{4}\sigma_3^{h/3}. \tag{4.8}$$

Démonstration. D'après le lemme 4.5 (i) on a

$$\left|\frac{1}{h!}A_h(u, k)\right| \leqslant \sigma_3^{h/3}\sum_{1\leqslant r\leqslant h/3}\sum{}^*\prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}$$
$$\leqslant \sigma_3^{h/3}\sum_{1\leqslant r\leqslant h/3}\sum_{3\leqslant n_1<\ldots<n_r}\prod_{i=1}^r\left\{\exp\frac{1}{n_i!}-1\right\}$$
$$\leqslant \sigma_3^{h/3}\prod_{n=3}^\infty \exp\frac{1}{n!} \leqslant \sigma_3^{h/3}\exp(e-5/2) \leqslant \tfrac{5}{4}\sigma_3^{h/3},$$

où nous avons fait appel à l'identité

$$\prod_{n=3}^\infty(1+x_n) = 1 + \sum_{r=1}^\infty\sum_{3\leqslant n_1<\ldots<n_r} x_{n_1}\ldots x_{n_r},$$

avec $x_n = \exp\{1/n!\} - 1$.

LEMME 4.8. *Pour $u > 0$, $k > 0$, $K \geqslant 0$, $|t| \leqslant \sigma_3^{-1/3}/2$, on a*

$$\exp\{F_k(u, t)\} = 1 + \sum_{h=3}^{6K+7}(-it)^h\frac{A_h(u, k)}{h!} + O_K(t^{6K+8}\sigma_3^{2K+8/3}). \tag{4.9}$$

Démonstration. Elle est immédiate à partir de (4.6) et (4.8).

Dans toute la suite de cet article, nous posons

$$\delta := \delta_k(u) = \begin{cases}(1/2)\sigma_2^{-5/12} & (u \geqslant \max(1, k)),\\ (1/8)k^{1/6}\sigma_2^{-1/2} & (0 < u < k),\end{cases} \tag{4.10}$$

et

$$J_k^{(1)}(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\xi-i\delta}^{-\xi+i\delta}\hat{\varrho}_k(s)e^{us}ds, \quad \text{avec } \xi = \xi(u/k). \tag{4.11}$$

LEMME 4.9. *Soient K et ε des réels positifs fixés. On a uniformément lorsque $u \geqslant 1$, $k \geqslant \varepsilon$,*

$$J_k^{(1)}(u) = \frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\left\{1 + \sum_{m=2}^{3(K+1)}\frac{(-1)^m}{m!\,2^m}\frac{A_{2m}(u, k)}{\sigma_2^m} + O_K\left(\frac{1}{(u+k)^{K+1}}\right)\right\}. \tag{4.12}$$

Démonstration. Considérons d'abord le cas où $u \geqslant \max(1, k)$. On a

$$kI(\xi - it) = k\int_0^1\frac{e^{v(\xi-it)}-1}{v}dv = \sum_{j=0}^\infty \sigma_j\frac{(-it)^j}{j!}$$
$$= \sigma_0 - itu - (1/2)t^2\sigma_2 + F_k(u, t),$$

où $F_k(u, t)$ est définie par (4.5).

On a $\delta \leqslant \frac{1}{2}\sigma_3^{-1/3}$ puisque $\sigma_3 \leqslant \sigma_2$. D'après (4.9) on peut écrire:

$$J_k^{(1)}(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} \exp\{k\gamma - u\xi + \sigma_0 - (t^2/2)\sigma_2 + F_k(u,t)\}\,dt$$

$$= \frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi}}{2\pi}\int_{|t|\leqslant\delta} e^{-t^2\sigma_2/2}\left\{1+\sum_{h=3}^{6K+7}(-it)^h\frac{A_h(u,k)}{h!}+O_k(t^{6K+8}\sigma_3^{2K+8/3})\right\}dt.$$

Par le changement de variables $v = t\sqrt{\sigma_2}$, on obtient:

$$J_k^{(1)}(u) = \frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{|v|\leqslant\delta\sqrt{\sigma_2}} e^{-v^2/2}\left\{1+\sum_{h=3}^{6K+7}\frac{(-iv)^h}{\sigma_2^{h/2}}\,\frac{A_h(u,k)}{h!}\right.$$

$$\left. + O_K(v^{6K+8}\sigma_3^{2K+8/3}\sigma_2^{-3K-4})\right\}dv.$$

La contribution des monômes associés à une puissance h impaire est nulle par symétrie. De plus, on a pour tout $H>1$

$$\int_{|v|>\delta\sqrt{\sigma_2}} e^{-v^2/2}|v|^H dv \ll_H e^{-\delta^2\sigma_2/3} = e^{-\sigma_2^{1/6}/12} \ll_{H,K}(u+k)^{-K-1},$$

où la seconde estimation découle de l'inégalité $\sigma_2 \geqslant u/2$ ($u \geqslant k$), établie au lemme 4.5. Cela montre que l'erreur impliquée en étendant l'intégrale en v à la droite réelle toute entière est acceptable en regard du terme d'erreur de (4.12). En effet, par (4.8), $A_h(u,k)\sigma_2^{-h/2} \ll \sigma_2^{-h/6} \ll 1$.

En remarquant maintenant que l'on a pour tout $m \geqslant 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-v^2/2}v^{2m}dv = 2^{m+1/2}\Gamma(m+1/2) = \sqrt{2\pi}\,\frac{(2m)!}{m!2^m},$$

il vient en tenant compte de (4.8)

$$J_k^{(1)}(u) = \frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\left\{1+\sum_{m=2}^{3(K+1)}\frac{(-1)^m}{m!2^m}\,\frac{A_{2m}(u,k)}{\sigma_2^m}+O_K\left(\frac{1}{(u+k)^{K+1}}+\sigma_2^{-K-4/3}\right)\right\}.$$

Le second terme d'erreur peut-être englobé par le premier. Cela achève donc la démonstration de la formule (4.12).

Le cas $0 < u \leqslant k$ se démontre de manière identique si l'on remarque que, en regard des inégalités

$$\sigma_2 \geqslant u^2/4k \quad \text{et} \quad \sigma_3 \leqslant 2eu^3/k^2 \quad (0<u<k),$$

on a

$$\delta \leqslant \tfrac{1}{2}\sigma_3^{-1/3}, \quad \sigma_3^{H/3}\sigma_2^{-H/2} \ll_H k^{-H/6},$$

et

$$\int_{|v|>\delta\sqrt{\sigma_2}} |v|^H e^{-v^2/2} \ll_H e^{-\delta^2\sigma_2/3} = e^{-k^{1/3}/192} \ll_{H,K}(u+k)^{-K-1}.$$

Il suit, par (4.8), que

$$A_h(u,k)\sigma_2^{-h/2} \ll_h k^{-h/6},$$

et l'on peut étendre comme précédemment l'intégrale en v à la droite réelle tout entière. On obtient ainsi

$$J_k^{(1)}(u) = \frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\left\{1+\sum_{m=2}^{3(K+1)}\frac{(-1)^m}{m!2^m}\,\frac{A_{2m}(u,k)}{\sigma_2^m}+O_K\left(\frac{1}{(u+k)^{K+1}}+\sigma_3^{2K+8/3}\sigma_2^{-3K-4}\right)\right\}$$

$$= \frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\left\{1+\sum_{m=2}^{3(K+1)}\frac{(-1)^m}{m!2^m}\,\frac{A_{2m}(u,k)}{\sigma_2^m}+O_K\left(\frac{1}{(u+k)^{K+1}}\right)\right\}.$$

LEMME 4.10. *On a uniformément pour* $k>0$, $u \geqslant \max(1,k)$, $t \in \mathbf{R}$, $s = -\xi(u/k)+it$,

$$\hat{\varrho}_k(s) \ll \begin{cases}\exp\{k\gamma+\sigma_0-(2t^2/\pi^2)\sigma_2\} & (|t|\leqslant\pi),\\ \exp\{k\gamma+\sigma_0-u/(\xi^2+\pi^2)\} & (|t|>\pi).\end{cases} \tag{4.13}$$

Démonstration. On sait d'après [10] que

$$\hat{\varrho}_k(s) = e^{k\gamma+kI(-s)}. \tag{4.14}$$

Posons

$$H_k(t) := kI(\xi) - \mathrm{Re}(kI(-s)) = k\int_0^1 e^{h\xi}\left(\frac{1-\cos(ht)}{h}\right)dh,$$

de sorte que

$$\hat{\varrho}_k(s) \ll \exp\{k\gamma+\sigma_0-H_k(t)\}.$$

Lorsque $|t|\leqslant\pi$, on a $1-\cos(ht) \geqslant 2t^2h^2/\pi^2$, et il suit

$$H_k(t) \geqslant \frac{2t^2}{\pi^2}\,k\int_0^1 he^{h\xi}dh = \frac{2t^2}{\pi^2}\sigma_2.$$

Cela implique la première majoration annoncée.

Lorsque $|t|>\pi$, nous distinguons deux cas, selon que l'on a ou non

$$k > 3u/(2(\xi^2+\pi^2)). \tag{4.15}$$

Si (4.15) est réalisée, nous avons simplement

$$H_k(t) \geqslant k\int_0^1(1-\cos(ht))dh \geqslant k\left(1-\frac{\sin t}{t}\right) \geqslant \frac{2}{3}k \geqslant \frac{u}{\xi^2+\pi^2}.$$

Si (4.15) n'est pas satisfaite, nous pouvons écrire

$$H_k(t) \geqslant k\int_0^1 e^{h\xi}(1-\cos(ht))dh = k\left[\frac{e^\xi-1}{\xi} - \mathrm{Re}\left(\frac{e^{\xi+it}-1}{\xi+it}\right)\right]$$
$$= k\left[\frac{u}{k} - \mathrm{Re}\left(\frac{u}{k}\frac{e^{it}\xi}{\xi+it}+\frac{e^{it}-1}{\xi+it}\right)\right] \geqslant u\left(1-\frac{(\cos\mu)\xi}{\sqrt{\xi^2+\pi^2}}\right)-\frac{2k}{\pi},$$

avec $\mu := t-\arctan(t/\xi)$. Le terme en facteur de u dans la dernière expression est au moins égal à $\pi^2/2(\xi^2+\pi^2)$. Nous obtenons donc

$$H_k(t) \geqslant \frac{u\pi^2}{2(\xi^2+\pi^2)} - \frac{3u}{(\xi^2+\pi^2)\pi} \geqslant \frac{u}{\xi^2+\pi^2}.$$

Nous avons ainsi établi la seconde des majorations de l'énoncé.

Lemme 4.11. *On a uniformément pour $k>0$, $u \geqslant 1$, $t \in \boldsymbol{R}$, $s = -\xi(u/k)+it$,*

$$\hat{\varrho}_k(s) = \left(\frac{1}{it}\right)^k \exp\left\{O\left(\frac{(u+k)|\xi|}{|t|}\right)\right\} \quad (|t|>0). \tag{4.16}$$

Démonstration. On a, d'après (4.14) et le lemme 6.1 de [9],

$$\hat{\varrho}_k(s) = s^{-k}\exp\{kJ(s)\} \quad (s \in \boldsymbol{C}\backslash \boldsymbol{R}^-), \tag{4.17}$$

avec

$$J(s) := \int_0^\infty \frac{e^{-s-v}}{s+v}dv.$$

Pour $t \neq 0$, on a

$$s^{-k} = \left(\frac{1}{it}\right)^k \exp\left\{O\left(\frac{k|\xi|}{|t|}\right)\right\} \quad \text{et } J(s) \ll \frac{e^\xi}{|t|} = \frac{(u/k)\xi+1}{|t|}.$$

Cela implique bien la formule asymptotique souhaitée pour $\hat{\varrho}_k(s)$.

Lemme 4.12. *Pour $k>0$, $0<u\leqslant k$, $t \geqslant (1/8)k^{1/6}\sigma_2^{-1/2}$, on a*

$$\hat{\varrho}_k(s) \ll \exp\{k\gamma+\sigma_0-k^{1/3}/3000\}. \tag{4.18}$$

Démonstration. Nous pouvons supposer $k \geqslant 1$, puisque la majoration annoncée est trivialement satisfaite dans le cas contraire. Reprenons alors les notations introduites au cours de la démonstration du lemme 4.10. Compte tenu de l'inégalité $\xi \geqslant -k/u$ $(0<u\leqslant k)$ établie au lemme 4.3, nous pouvons

écrire

$$k^{-1}H_k(t) = \int_0^1 e^{h\xi}\frac{(1-\cos(ht))}{h}dh \geqslant \int_0^1 e^{-hk/u}\frac{(1-\cos(ht))}{h}dh$$
$$\geqslant \frac{1}{e}\int_0^{u/k}\left(\frac{1-\cos(ht)}{h}\right)dh \geqslant \frac{k}{eu}\int_0^{u/k}(1-\cos(ht))dh$$
$$= \frac{1}{e}\left(1-\frac{\sin(ut/k)}{ut/k}\right).$$

Puisque la fonction $1-(\sin z)/z$ est croissante pour $0 \leqslant z \leqslant \pi/2$, on obtient

$$H_k(t) \geqslant k\left(1-\frac{\sin w}{w}\right) \geqslant \frac{2k}{3\pi^2}w^2,$$

avec $w = \left(\frac{1}{8\sqrt{e}}\right)^{k^{-1/3}}$. Cela implique la majoration souhaitée.

5. Preuve du théorème 1. La démonstration du théorème 1 est essentiellement basée sur les deux résultats suivants.

Dans tout ce qui suit, nous définissons pour $u \geqslant 1$

$$T := T(u,k) = \begin{cases} \exp\{u^{1/6}\} & (u \geqslant k), \\ \exp\{k^{1/3}/6000\} & (u<k). \end{cases}$$

Lemme 5.1. *Soit $\varepsilon>0$. Il existe une constante absolue positive c telle que l'on ait uniformément pour $u \geqslant 1$, $k \geqslant \varepsilon$,*

$$\varrho_k(u) = J_k^{(1)}(u) + O_\varepsilon\left(\frac{\exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi\}}{\sqrt{\sigma_2}}T^{-c}\right). \tag{5.1}$$

Démonstration. Nous savons par le lemme 2.2 que la fonction $\varrho_k(u)$ est décroissante sur $[a_k, +\infty[$. D'après (4.1), il suit

$$\varrho_k(u) \leqslant (k/u)\varrho_k(u-1) \quad (u \geqslant a_k+1).$$

En itérant l'inégalité et quitte à changer la constante dependant de k, on obtient

$$\varrho_k(u) \ll_k k^u/\Gamma(1+[u]) \ll_{k,A} e^{-Au} \quad (u \geqslant 1),$$

pour tout réel positif A.

Nous déduisons de cette estimation, de l'unimodalité de $\varrho_k(u)$ pour $k>1$ et de sa monotonie pour $k<1$ que $\hat{\varrho}_k(s)$ converge absolument sur toute droite $s = \sigma+it$ $(t \in \boldsymbol{R})$.

D'après le théorème d'inversion, il suit

$$\varrho_k(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{us}\hat{\varrho}_k(s)ds \quad (\sigma \in \boldsymbol{R}).$$

En particulier, si $\sigma = -\xi(u/k)$ on a

$$\varrho_k(u) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\xi-i\infty}^{-\xi+i\infty} e^{us}\hat{\varrho}_k(s)\,ds = J_k^{(1)}(u)+J_k^{(2)}(u)+J_k^{(3)}(u),$$

correspondant aux domaines d'intégration respectifs $|t| \leqslant \delta$, $\delta < |t| \leqslant T$, $T \leqslant |t|$.

Nous nous proposons de démontrer que les quantités $J_k^{(2)}(u)$ et $J_k^{(3)}(u)$ sont de l'ordre de grandeur du terme d'erreur de (5.1).

Considérons dans un premier temps le cas $u \geqslant k$. Dans cette étape nous utiliserons les estimations suivantes:

(5.2) $\quad \xi(u/k) \ll_\varepsilon \log u, \qquad \delta^2\sigma_2 = (1/2)\sigma_2^{1/6} \gg u^{1/6}, \qquad \sigma_0 \sim u \qquad (u/k \to +\infty),$

déduites respectivement des lemmes 4.3 (i), 4.4 (i) et 4.5 (ii).

On a

$$J_k^{(2)}(u) = \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant T} e^{us}\hat{\varrho}_k(s)\,ds = \int_{\delta\leqslant|t|<\pi} e^{us}\hat{\varrho}_k(s)\,ds + \int_{\pi\leqslant|t|\leqslant T} e^{us}\hat{\varrho}_k(s)\,ds.$$

On déduit grâce au lemme 4.11 que

$$J_k^{(2)}(u) \ll \exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi\}\left[\frac{e^{-2\delta^2\sigma_2/\pi^2}}{\sqrt{\sigma_2}} + Te^{-u/(\xi^2+\pi^2)}\right].$$

Il suit, au vu de (5.2), que

$$J_k^{(2)}(u) \ll_\varepsilon \frac{\exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi\}}{\sqrt{\sigma_2}}\exp\{-u^{1/6}/700\} \qquad (u/k \to +\infty).$$

Ceci est bien de l'ordre requis pour un choix convenable de c.

Estimons $J_k^{(3)}(u)$. D'après le lemme 4.12, on a

$$\hat{\varrho}_k(s) = \frac{1}{(it)^k}\exp\{O(u\xi/|t|)\} \qquad (u \geqslant k).$$

Sachant que $(u+k)\xi/|t| \ll 1$ $(|t| > T)$, nous pouvons écrire

$$\hat{\varrho}_k(s) = \frac{1}{(it)^k}\{1+O((u+k)\xi/|t|)\}.$$

Il suit

$$J_k^{(3)}(u) = \int_{T\leqslant|t|} e^{us}\varrho_k(s)\,ds = e^{-u\xi}\left[\int_{T\leqslant|t|}\frac{e^{iut}}{(it)^k}\,dt + O\Big(u\xi\int_{T\leqslant t} t^{-k-1}\,dt\Big)\right].$$

Grâce à la seconde formule de la moyenne, on obtient

$$J_k^{(3)}(u) \ll \frac{u\xi}{T^k}e^{-u\xi}.$$

Il suit, au vu de (5.2),

$$J_k^{(3)}(u) \ll_\varepsilon \frac{\exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi\}}{\sqrt{\sigma_2}}\big(\sqrt{\sigma_2}\,u\xi\,T^{-k}e^{-\sigma_0}\big)$$
$$\ll_\varepsilon \frac{\exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi\}}{\sqrt{\sigma_2}}\exp\{-u^{1/6}/2\} \qquad (u/k \to +\infty),$$

et ceci également est de l'ordre de grandeur souhaité.

Supposons à présent $1 \leqslant u < k$. Notons, dans ce cas, les inégalités suivantes:

(5.3) $\quad \xi(u/k) \geqslant -k/u, \qquad \sigma_0 \geqslant -k(\operatorname{Log} k/u+1), \qquad \sigma_2 \leqslant u^2/ek,$

établies respectivement dans les lemmes 4.3 (iii), 4.4 (ii) et 4.5 (vi).

Grâce au lemme 4.13 et a (5.3), on obtient

$$J_k^{(2)}(u) \ll T\exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi-k^{1/3}/3000\}$$
$$\ll \frac{\exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi\}}{\sqrt{\sigma_2}}\exp\{-k^{1/3}/6001\} \qquad (u/k \to 0).$$

Cette estimation est de l'ordre voulu.

Enfin, pour estimer $J_k^{(3)}(u)$, nous utilisons le lemme 4.12 sous la forme

$$\hat{\varrho}_k(s) = \frac{1}{(it)^k}\{1+O(k|\xi|/|t|)\} \qquad (u \leqslant k).$$

On a alors, comme pour le cas $u \geqslant k$ et grâce à (5.3),

$$J_k^{(3)}(u) \ll \frac{k|\xi|}{T^k}e^{-u\xi} = \frac{\exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi\}}{\sqrt{\sigma_2}}\big(\sqrt{\sigma_2}\,k|\xi|\,e^{-\sigma_0-k\gamma}\,T^{-k}\big)$$
$$\ll \frac{\exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi\}}{\sqrt{\sigma_2}}\big(k^{3/2}\,T^{-k}\,e^{\lambda k\operatorname{Log} k}\big)$$
$$\ll \frac{\exp\{k\gamma+\sigma_0-u\xi\}}{\sqrt{\sigma_2}}\exp\{-k^{1/3}/12000\} \qquad (u/k \to 0).$$

Nous avons ainsi terminé la démonstration du lemme 5.1.

Lemme 5.2. *Soient K un entier $\geqslant 0$ et ε un réel > 0. Pour $u \geqslant 1$, $k \geqslant \varepsilon$, $L_j(\xi)$ définie par (3.6), on a*

(5.4) $$J_k^{(1)}(u) = \frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\left\{1+\sum_{j=1}^{K}\frac{L_j(\xi)}{\sigma_2^j}+O_K\left(\frac{1}{(u+k)^{K+1}}\right)\right\}.$$

Démonstration. D'après le lemme 4.9, on a

$$J_k^{(1)}(u) = \frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\left\{1+\sum_{m=2}^{3(K+1)}\frac{(-1)^m}{m!\,2^m}\frac{A_{2m}(u,k)}{\sigma_2^m}+O_K\left(\frac{1}{(u+k)^{K+1}}\right)\right\}.$$

D'après (4.7), il vient

$$\frac{A_{2m}(u,k)}{\sigma_2^m} = \sum_{1\leqslant r\leqslant 2m/3} (2m)! \sum{}^* \prod_{i=1}^r \left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{\sigma_{n_i}}{n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}\sigma_2^{-m}.$$

On peut alors écrire

$$\frac{A_{2m}(u,k)}{\sigma_2^m} = \sum_{1\leqslant r\leqslant 2m/3}(2m)! \sum_{m-j=\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{*}\ \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{\sigma_{n_i}}{\sigma_2 n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}\sigma_2^{-j}$$

$$= \sum_{m/3\leqslant j\leqslant m-1}(2m)!\sum_{1\leqslant r\leqslant 2m/3}\ \sum_{m-j=\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{*}\ \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{\sigma_{n_i}}{\sigma_2 n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}\sigma_2^{-j}.$$

Il en résulte que

$$(5.5)\qquad \sum_{m=2}^{3(K+1)}\frac{(-1)^m}{m!2^m}\frac{A_{2m}(u,k)}{\sigma_2^m}$$

$$= \sum_{j=1}^{3K+2}\ \sum_{m=j+1}^{\infty} \frac{(-1)^m(2m)!}{m!2^m}\sum_{r=1}^{\infty}\ \sum_{m-j=\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{*}\ \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{\sigma_{n_i}}{\sigma_2 n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}\sigma_2^{-j}$$

$$= \sum_{j=1}^{3K+2}\frac{L_j(\xi)}{\sigma_2^j}.$$

La démonstration du lemme sera terminée lorsque nous aurons établi (3.7) et (3.8). En effet, l'expression (3.7) en particulier nous permet d'affirmer que

$$\sum_{j=K+1}^{3K+2}\frac{L_j(\xi)}{\sigma_2^j}\ll_K\frac{1}{(u+k)^{K+1}}.$$

Supposons d'abord $u\geqslant k$. Au vu de l'identité

$$\prod_{n=p}^{H}(1+x_n) = 1+\sum_{r=1}^{H}\ \sum_{p\leqslant n_1<\dots<n_r} x_{n_1}\dots x_{n_r},$$

on a pour tout j fixé

$$(5.6)\qquad \sum_{m=j+1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{m!2^m}\sum_{r=1}^{\infty}\ \sum_{m-j=\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{*}\ \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}$$

$$= \sum_{m=j+1}^{3j}\frac{(-1)^m(2m)!}{m!2^m}\sum_{1\leqslant r\leqslant 2m/3}\ \sum_{m-j=\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{*}\ \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}$$

$$\ll \sum_{m=j+1}^{3j}\ \sum_{1\leqslant r\leqslant 2m/3}\ \sum_{3\leqslant n_1<\dots<n_r}\ \prod_{i=1}^r \exp\left\{\frac{1}{n_i!}-1\right\} \ll \sum_{m=j+1}^{3j}\ \prod_{n=3}^{\infty}\exp\left\{\frac{1}{n!}\right\}\ll 1.$$

Notons alors

$$l_j := \sum_{m=j+1}^{3j}\frac{(-1)^m(2m)!}{m!2^m}\sum_{1\leqslant r\leqslant 2m/3}\ \sum_{m-j=\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{*}\ \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}.$$

En outre, d'après le lemme 4.5 (iii), on a

$$\sigma_l = u\left\{1+O_l\left(\frac{1}{\mathrm{Log}(u/k+1)}\right)\right\}\qquad (u/k\to+\infty).$$

Il en résulte que

$$\prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{\sigma_{n_i}}{\sigma_2 n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\} = \prod_{i=1}^r \frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i!}\right)^{\alpha_i}\left(1+O_{\alpha_i}\left(\frac{1}{\mathrm{Log}(u/k+1)}\right)\right)\qquad (u/k\to+\infty).$$

On en déduit, compte tenu de (5.6), que

$$L_j(\xi)\sigma_2^{-j} = \left\{l_j+O_j\left(\frac{1}{\mathrm{Log}(u/k+1)}\right)\right\}\sigma_2^{-j} = \left\{l_j+O_j\left(\frac{1}{\mathrm{Log}(u/k+1)}\right)\right\}u^{-j}$$

$$= (u+k)^{-j}\left\{l_j+O_j\left(\frac{1}{\mathrm{Log}(u/k+1)}\right)\right\}\qquad (u/k\to+\infty).$$

Nous avons établi la première estimation de (3.8).

L'expression (3.7) s'en déduit aisément, au vu de (5.6).

Etudions le cas $1\leqslant u<k$. De même que précédemment, on a pour j fixé

$$(5.7)\qquad \sum_{m=j+1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m)!}{m!2^m}\sum_{r=1}^{\infty}\ \sum_{m-j=\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{*}\ \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i}\right)^{\alpha_i}\right\}$$

$$= \sum_{m=j+1}^{3j}\frac{(-1)^m(2m)!}{m!2^m}\sum_{1\leqslant r\leqslant 2m/3}\ \sum_{m-j=\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{*}\ \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i}\right)^{\alpha_i}\right\}$$

$$\ll \sum_{m=j+1}^{3j}\ \sum_{1\leqslant r\leqslant 2m/3}\ \sum_{3\leqslant n_1<\dots<n_r}\ \prod_{i=1}^r \exp\{1/n_i-1\} \ll \sum_{m=j+1}^{3j}\ \prod_{n=3}^{2m/3}\exp\{1/n\}\ll 1.$$

Posons

$$m_j := \sum_{m=j+1}^{3j}\frac{(-1)^m(2m)!}{m!2^m}\sum_{1\leqslant r\leqslant 2m/3}\ \sum_{m-j=\alpha_1+\dots+\alpha_r}^{*}\ \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i}\right)^{\alpha_i}\right\}.$$

D'après le lemme 4.5 (v), on a

$$\sigma_l = (l-1)!\,\frac{u^l}{k^{l-1}}(1+O_l(u/k))\qquad (u/k\to 0).$$

Il suit

$$\prod_{i=1}^r \frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{\sigma_{n_i}}{\sigma_2 n_i!}\right)^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^r\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i}\right)^{\alpha_i}\right\}(u/k)^{\alpha_i n_i-2\alpha_i}\{1+O_j(u/k)\}\qquad (u/k\to 0).$$

Les conditions $m-j=\alpha_1+\ldots+\alpha_r$ et $\alpha_1 n_1+\ldots+\alpha_r n_r=2m$ impliquent

$$\prod_{i=1}^{r}\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{\sigma_{n_i}}{\sigma_2 n_i!}\right)^{\alpha_i}\right\}=(u/k)^{2j}\prod_{i=1}^{r}\left\{\frac{1}{\alpha_i!}\left(\frac{1}{n_i}\right)^{\alpha_i}\right\}\{1+O_j(u/k)\}\qquad(u/k\to 0).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned}L_j(\xi)\sigma_2^{-j}&=\{m_j+O_j(u/k)\}(u/k)^{2j}\sigma_2^{-j}=\{m_j+O_j(u/k)\}k^{-j}\\&=(u+k)^{-j}\{m_j+O_j(u/k)\}\qquad(u/k\to 0).\end{aligned}$$

Ceci nous donne bien la seconde estimation de (3.8). L'expression (3.7) en découle facilement.

Fin de la démonstration du théorème. D'après (5.1) et (5.4) on a

$$\varrho_k(u)=\frac{e^{k\gamma+\sigma_0-u\xi}}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}\left\{1+\sum_{j=1}^{K}\frac{L_j(\xi)}{\sigma_2^j}+O_K\left(\frac{1}{(u+k)^{K+1}}\right)+O_\varepsilon(T^{-c})\right\}.$$

Pour $c>0$ la quantité T^{-c} est englobée par $O_{K,\varepsilon}((u+k)^{-K-1})$. Cela achève la démonstration du théorème.

Bibliographie

[1] K. Alladi, *The Turán–Kubilius inequality for integers without large prime factors*, J. Reine Angew. Math. 335 (1982), 180–196.

[2] N. G. de Bruijn, *On some Volterra integral equations of which all solutions are convergent*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. 52 (1950), 813–821.

[3] —, *The asymptotic behaviour of a function occurring in the theory of primes*, J. Indian Math. Soc. (N. S.) 15 (1951), 25–32.

[4] —, *On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$. I*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 54 (1951), 40–50.

[5] —, *On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$. II*, ibid. A69 (1966), 239–247.

[6] N. G. de Bruijn and J. H. Van Lint, *Incomplete sums of multiplicative functions. I, II*, ibid. A67 (1964), 339–347; 348–359.

[7] J. M. De Koninck and D. Hensley, *Sums taken over $n \leqslant x$ with prime factors $\leqslant y$ of $z^{\Omega(n)}$, and their derivatives with respect to z*, J. Indian Math. Soc. (N. S.) 42 (1978–79), 353–365.

[8] K. Dickman, *On the frequency of numbers containing prime factors of a certain relative magnitude*, Ark. Math. Astr. Fys. 22 (1930), 1–14.

[9] F. Fouvry et G. Tenenbaum, *Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques*, prépublication.

[10] D. Hensley, *The convolution powers of the Dickman function*, J. London Math. Soc. (2), 33 (1986), 395–406.

[11] A. Hildebrand, *On the numbers of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$*. J. Number Theory 22 (1986), 289–307.

[12] A. Hildebrand and G. Tenenbaum, *On integers free of large prime factors*, Trans. Amer. Math. Soc. 296 (1986), 265–289.

[13] A. Hildebrand, *The asymptotic behaviour of the solutions of a class of differential-difference equations*, à paraître.

[14] B. V. Levin and A. S. Fainleib, *Applications of some integral equations to problems in number theory*, Russian Math. Surveys 22 (3) 1967), 119–204.

[15] E. Saias, *Sur le nombre des entiers sans grand facteur premier*, J. Number Theory 32 (1989), 78–99.

[16] A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc. (N. S.) 18 (1954), 83–87.

[17] E. Wirsing, *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen II*, Acta Math. Sci. Hungar. 18 (1967), 411–467.

[18] T. Xuan, *The average order of $d_k(n)$ over integers free of large prime factors*, prepublication.

DÉPARTEMENT DE MATHEMATIQUES
FACULTÉ DES SCIENCES DE TUNIS
UNIVERSITÉ DE TUNIS II
1060 Tunis, Tunisie

Reçu le 3.4.1990
et révisé le 17.9.1990 (2026)