ACTA ARITHMETICA
LVIII.2 (1991)

Гипотеза Эрдеша–Кубилюса о распределении значений аддитивных функций на последовательности сдвинутых простых чисел

Н. М. Тимофеев (Владимир)

1. Введение. Вывод основных результатов. Пусть $g(n)$ — аддитивная арифметическая функция принимающая вещественные значения. П. Эрдешем и А. Винтнером [4] было доказано, что если ряды

$$\sum_p \frac{1}{p}\min(1, |g(p)|^2), \qquad \sum_{|g(p)|<1} \frac{g(p)}{p} \tag{1.1}$$

сходятся, то $g(n)$ имеет предельное распределение, то есть последовательность функций распределения

$$\frac{1}{[x]}|\{n\colon\ n \leqslant x,\ g(n) \leqslant u\}|$$

слабо сходится при $x \to \infty$ к функции распределения $F(u)$, и наоборот: из существования предельного распределения $g(n)$ вытекает сходимость рядов (1.1). Здесь $|A|$ — число элементов в множестве A. Слабая сходимость означает сходимость во всех точках непрерывности $F(u)$. В последующем, в работах П. Эллиота и К. Риявека [3], Б. В. Левина и Н. М. Тимофеева [11] было показано, что для существования предельного распределения $g(n)$ с центрировкой $\mathscr{A}(x)$, то есть для того, чтобы последовательность функций распределения

$$\frac{1}{[x]}|\{n\colon\ n \leqslant x,\ g(n) - \mathscr{A}(x) \leqslant u\}|$$

слабо сходилась к $F(u)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, с которым сходится ряд

$$\sum_p \frac{1}{p}\min(1, |g(p) - \lambda\log p|^2). \tag{1.2}$$

Причем в случае сходимости ряда (1.2)

$$\mathscr{A}(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p}(g(p) - \lambda\log p)^* + \lambda\log x + d, \tag{1.3}$$

где $u^* = u$, если $|u| < 1$, и 1, если $|u| \geqslant 1$, можно найти характеристическую функцию предельного закона и показать, что, если ряд

$$\sum_{g(p)\neq 0} 1/p \tag{1.4}$$

сходится, то предельный закон дискретный. Заметим, что наиболее сложной частью этого утверждения является доказательство того, что из существования предельного распределения $g(n)$ или $g(n)-\mathscr{A}(x)$ вытекает, соответственно, сходимость рядов (1.1) или ряда (1.2). Самый простой вывод этих и ряда других утверждений был приведен И. Ружей [12]. Он показал, что они могут быть получены из следующей теоремы.

Пусть

$$R(a, b, x) = \frac{1}{[x]}|\{n\colon n \leqslant x,\ a \leqslant g(n) < b\}|, \tag{1.5}$$

$$Q_h(x) = \sup_a R(a, a+h, x). \tag{1.6}$$

Теорема (Ружа). *Для любой аддитивной функции имеем*

$$Q_1(x) \ll (W(x))^{-1/2}, \tag{1.7}$$

где

$$W(x) = \min_\lambda\left(\lambda^2 + \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\min\bigl(1, (g(p)-\lambda\log p)^2\bigr)\right). \tag{1.8}$$

Постоянная подразумеваемая символом $\ll$ абсолютная.

Из этой теоремы, кроме описанных результатов, вытекает, например, следующая теорема (см. [12]).

Теорема (Холас). *Пусть $g(n)$ — аддитивная функция. Тогда*

$$|\{n\colon n \leqslant x,\ g(n) = a\}| \ll x\Bigl(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\neq 0}} 1/p\Bigr)^{-1/2},$$

где подразумеваемая постоянная абсолютная.

Здесь будут доказаны аналогичные утверждения в случае последовательности $\{q+a\}$, где q принадлежит множеству простых чисел и $a \neq 0$ — целое число.

Будем говорить, что аддитивная функция $g(n)$ *имеет предельное распределение на множестве* $\{q+a\}$, если последовательность функций распределения

$$\frac{1}{\pi(x)}|\{q\colon q \leqslant x,\ g(q+a) \leqslant u\}|$$

слабо сходится при $x\to\infty$ к функции распределения $F(u)$. В 1968 году И. Катаи [8] доказал, что если ряды (1.1) сходятся, то $g(n)$ имеет предельное распределение на $\{q+a\}$. Гипотеза Эрдеша–Кубилюса состоит в том, что (см. [9] (гипотеза П) и в [2] (проблема 3)) справедливо и обратное утверждение, то есть из существования предельного распределения $g(n)$ на $\{q+a\}$ следует сходимость рядов (1.1). Этот результат был доказан И. Катаи для аддитивных функций ограниченных на множестве простых чисел, П. Эллиоттом для функций принимающих в простых числах неотрицательные значения и в работе [13] для аддитивных функций удовлетворяющих условию: при любом $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{x\to\infty}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)<0}}\frac{1}{p}\min\left(1, \frac{|g(p)|^2}{\log^\varepsilon x}\right) = 0.$$

Заметим, что если ряд (1.2) сходится, то (см. [13] или [2]) существует предельное распределение $g(n)-\mathscr{A}(x)$ на $\{q+a\}$ с центрировкой $\mathscr{A}(x)$ определенной (1.3). В работе [13] доказано, что и наоборот, из существования предельного распределения $g(n)-\mathscr{A}(x)$ на $\{q+a\}$, для аддитивных функций удовлетворяющих условию типа предыдущего, следует сходимость ряда (1.2).

В настоящей работе будет доказано, что сходимость рядов (1.1) является условием необходимым и достаточным для существования предельного распределения $g(n)$ на $\{q+a\}$, а сходимость ряда (1.2) эквивалентна существованию предельного распределения $g(n)-\mathscr{A}(x)$ на $\{q+a\}$. Таким образом, в частности, будет доказана гипотеза Эрдеша–Кубилюса. Вывод этих результатов осуществляется по схеме работы И. Ружи [12]. То есть сначала будет получен результат типа теоремы Ружи.

Основную роль будет играть следующая теорема, доказательство которой основано на применении большого решета (см. лемму 3) и дисперсионного метода Ю. В. Линника (см. лемму 4).

Теорема 1. *Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция, $|f(n)| \leqslant 1$, $a \neq 0$ — целое число. Тогда при $y < \exp(\sqrt{\log x})$ имеем*

$$\frac{1}{\pi(x)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\gamma(y,z)}} f(n+a) = \frac{1}{\pi(x)}\prod_{y<p\leqslant z}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{n\leqslant x} f(n) + R,$$

где

$$R = O\left(\frac{\log x}{\log z}\left(\frac{\log y}{\sqrt[21]{y}} + \frac{(\log\log x)^3}{\sqrt[3]{\log x}} + \log y\cdot\exp\left(-\frac{\log x}{\log z}\right)\right)\right),$$

$\gamma(y, z)$ — множество натуральных чисел, у которых все простые делители либо $< y$ либо $\geqslant z$, постоянная подразумеваемая символом $O(\cdot)$ абсолютная.

Покажем, как из этой теоремы можно доказать теорему типа оценки (1.7).

Теорема 2. *Пусть $g(n)$ — аддитивная функция принимающая вещественные значения,*

$$R_p(d, b, x) = \frac{1}{\pi(x)}|\{q\colon\ q \leqslant x,\ d \leqslant g(q+a) < b\}|,$$

$$Q_{p,h}(x) = \sup_d R_p(d, d+h, x).$$

Тогда существует абсолютная постоянная, с которой

$$Q_{p,1}(x) \leqslant c W^{-1/2}(x) \log^2(2+W(x)),$$

где

$$W(x) = \min_\lambda\left(\lambda^2 + \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\min\bigl(1, (g(p)-\lambda\log p)^2\bigr)\right).$$

Доказательство. Очевидно, что для каждого d имеем

$$\pi^{-1}(x)\bigl|\{q\colon\ q\leqslant x, |g(q+a)-d|\leqslant 1\}\bigr|$$
$$\leqslant \pi^{-1}(x)\bigl(|\{n\colon\ n\in\gamma(y,z),\ n\leqslant x,\ |g(n+a)-d|\leqslant 1\}|+z\bigr).$$

Отсюда, учитывая, что

$$\int_{-1}^{1}(1-|t|)e^{ity}\,dt = \left(\frac{\sin(y/2)}{y/2}\right)^2 \geqslant \frac{1}{2}$$

при $|y|\leqslant 1$, получаем

$$R_p(d-1, d+1, x) \leqslant \frac{2}{\pi(x)}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\gamma(y,z)}}\int_{-1}^{1} e^{it(g(n+a)-d)}(1-|t|)\,dt + \frac{z}{\pi(x)}$$
$$= \frac{2}{\pi(x)}\int_{-1}^{1} e^{-itd}(1-|t|)\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\in\gamma(y,z)}} e^{itg(n+a)}\,dt + \frac{z}{\pi(x)}.$$

Воспользовавшись теоремой 1, имеем

$$R_p(d-1, d+1, x)$$
$$\leqslant \frac{2}{\pi(x)}\prod_{y<p\leqslant z}\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{-1}^{1} e^{-itd}(1-|t|)\sum_{n\leqslant x} e^{itg(n)}\,dt + 2R + \frac{z}{\pi(x)}$$
$$= \frac{2}{\pi(x)}\prod_{y<p\leqslant z}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{\sin\bigl((g(n)-d)/2\bigr)}{(g(n)-d)/2}\right)^2 + 2R + \frac{z}{\pi(x)}.$$

Следовательно,

$$Q_{p,1}(x) \leqslant 4\frac{\log x}{\log z}\log y \sup_d \frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\left(\frac{\sin\bigl((g(n)-d)/2\bigr)}{(g(n)-d)/2}\right)^2 + 2R + \frac{z}{\pi(x)}$$
$$\leqslant 4\frac{\log x}{\log z}\log y \sup_d \sum_{-\infty}^{+\infty}\max_{k\leqslant y\leqslant k+1}\left(\frac{\sin(y/2)}{y/2}\right)^2\cdot\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ k\leqslant g(n)-d<k+1}} 1 + 2R + \frac{z}{\pi(x)}.$$

Отсюда, учитывая, что $\left(\dfrac{2\sin(y/2)}{y}\right)^2 \leqslant \min(1, 4/y^2)$, получаем

$$Q_{p,1}(x) \leqslant 36\frac{\log x}{\log z}\log y\cdot Q_1 + 3R.$$

Выберем $y = (W(x)+2)^{50}$, $\log z = \log x/\log(W(x)+2)$; учитывая оценку (1.7) находим, что

$$Q_{p,1}(x) \ll Q_1\log^2(W(x)+2) + \frac{\log^2(W(x)+2)}{W(x)} \ll \frac{\log^2(W(x)+2)}{\sqrt{W(x)}}.$$

Из теоремы 2, повторяя, фактически, рассуждения работы И. Ружи [12], получим

Теорема 3. *Если $Q_{p,1}(x)$ не стремится к нулю при $x\to\infty$, то существует число λ, с которым ряд (1.2) сходится.*

Доказательство. Если $Q_{p,1}(x)\not\to 0$ при $x\to\infty$, то из теоремы 1 вытекает существование постоянной c и $\{x_n\}$, на которой

$$\min_\lambda\left(\lambda^2 + \sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\min\bigl(1, (g(p)-\lambda\log p)^2\bigr)\right) \leqslant c. \tag{1.9}$$

Обозначим для каждого x через Λ_x множество λ, для которых выполняется неравенство (1.9). Это множество ограниченное, $|\lambda|\leqslant\sqrt{c}$ и замкнутое. Кроме того $\Lambda_{x_n}\neq\varnothing$ и $\Lambda_x\subset\Lambda_y$ при $x>y$; поэтому существует $\lambda\in\bigcap_x\Lambda_x$. С этим λ сходится ряд (1.2).

Теорема 4. *Если ряд (1.4) расходится, то $Q_{p,h}(x)$ стремится к нулю при $h\to 0$ и $x\to\infty$.*

Теорема 5. *Обозначим*

$$E(x) = \sum_{\substack{p\leqslant x\\ g(p)\neq 0}} 1/p.$$

Тогда

$$|\{p\colon\ p\leqslant x,\ g(p+a)=b\}| \ll \frac{\pi(x)}{\sqrt{E(x)}}\log^2 E(x).$$

Доказательство теорем 4 и 5, впрочем, как и теоремы 3, проводится точно также, как в работе И. Ружи [12]. Повторим рассуждения этой работы в случае теоремы 5. Обозначим

$$A = \pi^{-1}(x)|\{p\colon\ p\leqslant x,\ g(p+a)=b\}|.$$

Следовательно, $Q_{p,h}(x)\geqslant A$ для любого $h>0$. Заменим аддитивную функцию $g(n)$ на $(1/h)g(n)$; тогда для этой функции $Q_{p,1}(x)\geqslant A$ и поэтому из теоремы 2 следует, что

$$\frac{W(x)}{\log^4(2+W(x))} \leqslant cA^{-2}$$

с некоторой абсолютной постоянной c и поэтому

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\min\left(1,\left(\frac{g(p)}{h}-\lambda_h\log p\right)^2\right)$$
$$\times\log^{-4}\left(2+\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}\min\left(\left(\frac{g(p)}{h}-\lambda_h\log p\right)^2,1\right)\right)\leqslant cA^{-2},$$

где $\lambda_h \leqslant c_1 A^{-1}$. Перейдем к пределу при $h\to 0$, учитывая, что при $g(p)\neq 0$ имеем $(1/h)g(p)\to\infty$; получим

$$E(x)\log^{-4}(2+E(x))\leqslant cA^{-2}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы 5.

Из теоремы 3 следует следующий результат.

Теорема 6. *Для того, чтобы аддитивная функция $g(n)$ имела предельное распределение на $\{q+a\}$ с центрировкой $\mathscr{A}(x)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, с которым ряд* (1.2) *сходился. В случае сходимости ряда* (1.2) *центрировка $\mathscr{A}(x)$ имеет вид* (1.3).

Доказательство. Если существует предельное распределение на $\{q+a\}$, то $Q_{p,1}(x)\nrightarrow 0$ при $x\to\infty$; следовательно, по теореме 3 найдется λ, с которым ряд (1.2) сходится. В случае сходимости ряда (1.2) существование предельного распределения на $\{q+a\}$ с $\mathscr{A}(x)$ имеющим вид (1.3) доказано в работах [13] или [2].

Из этой теоремы вытекает

Теорема 7 (гипотеза Эрдеша–Кубилюса). *Для существования предельного распределения $g(n)$ на последовательности $\{q+a\}$ необходимо и достаточно, чтобы ряды* (1.1) *сходились.*

Доказательство. Действительно, из теоремы 6, в случае существования предельного распределения, следует сходимость ряда (1.2), но так как в этом случае $\mathscr{A}(x)=d$, то из вида $\mathscr{A}(x)$ вытекает, что $\lambda=0$ и сходимость рядов (1.1).

Заметим, что из теорем 4 и 5 вытекает, что предельный закон будет дискретным тогда и только тогда, когда ряд (1.4) расходится.

2. Вспомогательные результаты. Доказательство теоремы 1. Обозначим $\pi_y=\prod_{p<y}p$. Будем писать, что $d\mid\pi_y$, если все простые делители d меньше y, и $(d,\pi_y)=1$, если все простые делители d больше или равны y. Так же как и в предыдущем параграфе, через $\gamma(y,z)$ обозначим множество натуральных чисел, все простые делители которых либо $<y$, либо $\geqslant z$.

Лемма 1. *При $\log x\leqslant z\leqslant x^{1/e}$ имеем*

(2.1) $$|\{n\colon n\leqslant x,\ n\mid\pi_z\}|\ll x\exp\left(-2\frac{\log x}{\log z}\right),$$

если $z\log z\leqslant\sqrt{x/d}$, *то*

(2.2) $$|\{n\colon n\leqslant x,\ (n,\pi_z)=1,\ n\equiv a\ (\mathrm{mod}\,d)\}|\ll x/(\varphi(d)\log z).$$

Доказательство соотношения (2.1) приведено в работе [1], оценка (2.2) доказывается с помощью решета Сельберга (см., например, [6], теорему 3.4).

Следующий результат это фундаментальная лемма решета; доказательство ее можно найти, например, в [2] и [10]. Здесь она будет использоваться в форме данной в работе [2].

Лемма 2. *Пусть b_n — арифметическая функция принимающая неотрицательные значения, a_n, $n=1,2,\ldots,N$ — последовательность целых чисел, z — положительное вещественное число и $p_1<p_2<\ldots<p_s<z$ — некоторое множество простых чисел. Обозначим $P=p_1\ldots p_s$. Если $d\mid P$, положим*

(2.3) $$\sum_{\substack{n\leqslant N\\ a_n\equiv 0(\mathrm{mod}\,d)}} b_n=\eta(d)X+R(N,d),$$

где $X\geqslant 0$ и $R(N,d)$ — вещественные числа, $\eta(d\delta)=\eta(d)\eta(\delta)$, когда d и δ — взаимнопростые делители P.

Предположим, что для каждого p имеем $0\leqslant\eta(p)<1$. Пусть

$$I(N,P)=\sum_{\substack{n\leqslant N\\ (a_n,P)=1}} b_n.$$

Тогда имеет место соотношение

$$I(N,P)=\{1+2\theta_1 H\}X\prod_{p\mid P}(1-\eta(p))+2\theta_2\sum_{\substack{d\mid P\\ d\leqslant\xi^3}}3^{\omega(d)}|R(N,d)|,$$

равномерно по $z\geqslant 2$, $\max(\log z,S)\leqslant\frac{1}{8}\log\xi$, где $|\theta_1|\leqslant 1$, $|\theta_2|\leqslant 1$ и

$$H=\exp\left(-\frac{\log\xi}{\log z}\left\{\log\left(\frac{\log\xi}{S}\right)-\log\log\left(\frac{\log\xi}{S}\right)-\frac{2S}{\log\xi}\right\}\right),$$

$$S=\sum_{p\mid P}\frac{\eta(p)}{1-\eta(p)}\log p.$$

Лемма 3. *Пусть $\gamma(y,y_1)$ — множество натуральных чисел, все простые делители которых либо меньше y, либо $\geqslant y_1$, a_n, b_m — ограниченные последовательности комплексных чисел, причем $a_n=0$ при $n\leqslant z_2$, $b_m=0$ при $m\leqslant z_1$. Тогда при $Q\leqslant\sqrt{x}$, $y_1\leqslant z_3$ имеем*

$$\sum_{\substack{d\leqslant Q\\(d,\pi_{z_3})=1}}\max_{t\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\Bigg|\sum_{\substack{nm\leqslant t\\ nm\equiv l \,(\mathrm{mod}\, d)\\ nm-l\in\gamma(y,y_1)}} a_nb_m-\frac{1}{d}\sum_{\substack{nm\leqslant t\\ nm-l\in\gamma(y,y_1)}} a_nb_m\Bigg|$$

$$\ll \log^4 x\left(Qy_2\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{z_1}}+\frac{x}{\sqrt{z_2}}+\frac{x}{z_3}\right)+x\exp\left(-\frac{\log y_2}{\log y_1}\right)\log^8 x.$$

Доказательство. Так как все простые делители d не меньше z_3, то

$$1-\frac{\varphi(d)}{d}=1-\prod_{p|d}\left(1-\frac{1}{p}\right)\leqslant\frac{\tau(d)}{z_3}.$$

Кроме этого имеем

$$\frac{1}{d}\sum_{\substack{nm\leqslant t\\ nm-l\in\gamma(y,y_1)}} a_nb_m=\frac{1}{d}\sum_{\substack{nm\leqslant t,(nm,d)=1\\ nm-l\in\gamma(y,y_1)}} a_nb_m+O\left(\frac{1}{d}\sum_{\substack{n\leqslant t\\(n,d)>1}}\tau(n)\right).$$

Их последних двух соотношений, учитывая, что

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\(n,d)>1}}\tau(n)\ll\sum_{\substack{\delta>z_3\\ \delta|d}}\frac{\tau(\delta)\,x}{\delta}\log x\ll\frac{x}{z_3}\tau_3(d)\log x,$$

получаем, что сумма стоящая в левой части соотношения леммы 3, с точностью до $O((x/z_3)\log^4 x)$, равна

$$\Sigma_1=\sum_{\substack{d\leqslant Q\\(d,\pi_{z_3})=1}}\max_{t\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\Bigg|\sum_{nm-l\in\gamma_t(y,y_1,d)} a_nb_m-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{(nm,d)=1\\ nm-l\in\gamma_t(y,y_1)}} a_nb_m\Bigg|. \tag{2.4}$$

Здесь $nm-l\in\gamma_t(y,\,y_1,\,d)$ означает, что $nm\leqslant t$, $nm-l\in\gamma(y,\,y_1)$, $nm\equiv l(\mathrm{mod}\,d)$, и $nm-l\in\gamma_t(y,\,y_1)$ означает, что $nm\leqslant t$ и $nm-l\in\gamma(y,\,y_1)$.

Избавимся от условия $nm-l\in\gamma(y,\,y_1)$. Имеем

$$\sum_{-l+nm\in\gamma_t(y,y_1,d)} a_nb_m=\sum_{\delta\leqslant y_2}\mu(\delta)\sum_{\substack{nm\leqslant t\\ nm\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\delta d)}} a_nb_m+O\Big(\sum_{\delta>y_2}\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\delta d)}}\tau(n)\Big),$$

где δ — натуральные числа, все простые делители которых меньше y_1 и $\geqslant y$. Оценим вторую сумму. Она равна

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d)}}\tau(n)\sum_{\substack{\delta|(n-l)/d\\ \delta>y_2}}1\ll\left(\frac{x}{d}\log^3 x\sum_{y_2<\delta\leqslant x}\frac{\tau_3(\delta)}{\delta}\frac{x}{d}\right)^{1/2}.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sum_{\substack{y_2<\delta\leqslant x\\ \delta|\pi_{y_1}}}\frac{\tau_3(\delta)}{\delta}\leqslant\left(\sum_{\delta\leqslant x}\frac{\tau_3^2(\delta)}{\delta}\log x\max_{y_2<V_0\leqslant x}\frac{1}{V_0}\sum_{\substack{\delta\leqslant V_0\\ \delta|\pi_{y_1}}}1\right)^{1/2},$$

и применяя оценку (2.1), получим

$$\sum_{nm\in\gamma_t(y,y_1,d)} a_nb_m=\sum_{\delta\leqslant y_2}\mu(\delta)\sum_{\substack{nm\leqslant t\\ nm\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\delta d)}} a_nb_m+O\left(\frac{x}{d}\exp\left(-\frac{\log y_2}{\log y_1}\right)\log^7 x\right).$$

Проделав аналогичные преобразования со второй суммой в Σ_1, находим

$$\Sigma_1=\sum_{\substack{d\leqslant Q,\delta\leqslant y_2\\(d,\pi_{z_3})=1}}\max_{t\leqslant x}\max_{(l,d)=1}\Bigg|\sum_{\substack{nm\leqslant t\\ nm\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d\delta)}} a_nb_m-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{nm\leqslant t,(nm,d)=1\\ nm\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\delta)}} a_nb_m\Bigg| \tag{2.5}$$

$$+O\left(x\exp\left(-\frac{\log y_2}{\log y_1}\right)\log^8 x+\frac{x}{z_3}\log^4 x\right)=\Sigma_2+R_1.$$

Разобьем промежуток изменения n, $z_2<n\leqslant x/z_1$, на промежутки вида $]V,2V]$ и введем разрывный множитель

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} n^{i\alpha}\frac{\sin\alpha\log([t]+1/2)}{\alpha}\,d\alpha=\begin{cases}1, & \text{если } n<t,\\ 0, & \text{если } n>t.\end{cases}$$

Тогда имеем

$$\Sigma_2\ll\log x\max_{V>z_2}\sum_{\substack{d\leqslant Q,\delta\leqslant y_2\\(d,\pi_{z_3})=1}}\max_{\substack{t\leqslant x\\(l,d\delta)=1}}\Bigg|\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\alpha\log([t]+1/2)}{\alpha}$$

$$\times\left(\sum_{\substack{V<n\leqslant 2V\\(n,d\delta)=1}} a_nn^{i\alpha}\left(\sum_{\substack{z_1<m\leqslant x/V\\ nm\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d\delta)}} b_mm^{i\alpha}-\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\substack{z_1<m\leqslant x/V\\(nm,d)=1,\,nm\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\delta)}} b_mm^{i\alpha}\right)\right)d\alpha\Bigg|.$$

С помощью характеров избавимся от условий: $nm\equiv l\,(\mathrm{mod}\,d\delta)$ и $nm\equiv l\,(\mathrm{mod}\,\delta)$. Получим

$$\Sigma_2\ll\log^2 x\max_{V>z_2}\max_{\alpha}\sum_{\substack{d\leqslant Q\\(d,\pi_{z_3})=1}}\sum_{\delta\leqslant y_2}\frac{1}{\varphi(d\delta)}$$

$$\times\sum_{\chi_d\neq\chi_0}\sum_{\chi_\delta}\Big|\sum_{V<n\leqslant 2V} a_n\chi_{d\delta}(n)n^{i\alpha}\Big|\Big|\sum_{z_1<m\leqslant x/V} b_m\chi_{d\delta}(m)m^{i\alpha}\Big|+1/x.$$

Так как любой простой делитель d больше z_3, то модуль примитивного характера порождающего $\chi_{d\delta}=\chi_d\cdot\chi_\delta$ при $\chi_d\neq\chi_0$ будет больше z_3; поэтому, после перехода к примитивным характерам, получим, что .

$$\Sigma_2\ll\log^4 x\max_{V\geqslant z_2}\max_{\alpha}\max_{k\leqslant x}\max_{z_3\leqslant Q_1\leqslant Qy_2}\sum_{Q_1<d\leqslant 2Q_1}\frac{1}{\varphi(d)} \tag{2.6}$$

$$\times\sum_{\chi_d^*}|S(\chi_d^*)||F(\chi_d^*)|+1/x,$$

где

$$S(\chi_d^*) = \sum_{\substack{V<n\le 2V\\(n,k)=1}} a_n\chi_d^*(n)n^{i\alpha}, \qquad F(\chi_d^*) = \sum_{\substack{z_1<m\le x/V\\(m,k)=1}} b_m\chi_d^*(m)m^{i\alpha}.$$

Используя неравенство Коши и неравенство большого решета в форме Галлагера [5], находим

$$\sum_{Q_1<d\le 2Q_1}\frac{1}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d^*}|S(\chi_d^*)||F(\chi_d^*)| \le \frac{1}{Q_1}\left(\sum_{d\le 2Q_1}\frac{d}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d^*}|S(\chi_d^*)|^2\sum_{d\le 2Q_1}\frac{d}{\varphi(d)}\sum_{\chi_d^*}|F(\chi_d^*)|^2\right)^{1/2}$$
$$\ll \frac{1}{Q_1}\left((Q_1^2+V)V\left(Q_1^2+\frac{x}{V}\right)\frac{x}{V}\right)^{1/2} \ll Qy_2\sqrt{x}+\frac{x}{\sqrt{z_1}}+\frac{x}{\sqrt{z_2}}+\frac{x}{z_3}.$$

Подставляя найденную оценку в (2.6), отсюда и из соотношений (2.5), (2.4) получаем утверждение леммы 3.

При доказательстве следующей леммы существенно используется дисперсионный метод Ю. В. Линника.

ЛЕММА 4. *Пусть $f(n)$ — мультипликативная функция, $|f(n)|\le 1$, $a\ne 0$ — целое число, $\pi(y,z)=\prod_{y\le p<z}p$. Тогда, если*

$$\lambda(x,d,a,z)=\{n\le x,\ n\equiv a \pmod d,\ ((n-a)/d,\pi_z)=1\},$$

$$R(y,z)=\sum_{d|\pi_y}\sum_{r|\pi(y,z)}\left|\sum_{n\in\lambda(x,rd,a,z)}f(n)-\frac1r\prod_{y\le p<z}\left(1-\frac1p\right)\sum_{n\in\lambda(x,d,a,y)}f(n)\right|,$$

то при $|a|<y<z\le x^{1/100}$, $y<\exp(\sqrt{\log x})$ имеем

$$R(y,z)\ll x\left(y^{-1/21}+\sqrt[3]{\frac{\log z}{\log x}}\right).$$

Постоянная подразумеваемая символом $\ll$ — абсолютная.

Доказательство. Оценим вклад в $R(y,z)$, который вносит та часть суммы, где $d>t_1$ или $r>t_1'$. Он равен

$$\ll \sum_{\substack{d|\pi_y\\ d>t_1}}\sum_{\substack{md\le x-a\\(m,\pi_y)=1}}1+\sum_{\substack{d|\pi(y,z)\\d>t_1'}}\sum_{\substack{md\le x-a\\(m,\pi(y,z))=1}}1+\sum_{\substack{r|\pi(y,z)\\r>t_1'}}\frac1r\prod_{y\le p<z}\left(1-\frac1p\right).$$

Все три суммы оцениваются одинаково. Рассмотрим, например, вторую сумму. Она равна

$$\ll\frac{1}{\log t_1'}\sum_{d|\pi(y,z)}\log d\sum_{\substack{md\le x-a\\(m,\pi(y,z))=1}}1\ll\frac{x}{\log t_1'}\sum_{r,p\le z}\frac{\log p^r}{p^r}\ll x\frac{\log z}{\log t_1'}.$$

Таким образом, имеем

$$R(y,z)\ll R(y,z,t_1,t_1')+O\left(x\left(\frac{\log z}{\log t_1'}+\frac{\log y}{\log t}\right)\right), \tag{2.7}$$

где $R(y,z,t_1,t_1')$ — сумма $R(y,z)$, в которой $d\le t_1$, $r\le t_1'$.

Представим n в виде $n=n_1n_2n_3$, где $n_1|\pi_{z_1}$, $n_2|\pi(z_1,z_2)$, $n_3|\pi(z_2,x)$. Та часть суммы $R(y,z,t_1,t_1')$, в которой либо $n_2=1$, либо $n_2>t_2$, равна

$$\ll\sum_{n_1n_3\le x}1+\sum_{n_2>t_2}\sum_{n_1n_3\le x}1.$$

Применяя лемму 1 получим, что эта часть суммы есть

$$O\left(x\left(\frac{\log z_1}{\log z_2}+\frac{\log z_2}{\log t_2}\right)\right).$$

Обозначим $\alpha(r,d)=\exp(-i\arg\sigma)$, где σ — разность сумм стоящая под знаком модуля в $R(y,z)$; если $\sigma=0$, то положим $\alpha(r,d)=1$. Будем предполагать, что $z<z_1$, поэтому $(n_2,dr)=1$. Таким образом, имеем

$$R(y,z)\ll\sum_{d\le t_1}\sum_{x/t_2^2<n\le x/z_1}\sum_{\substack{r\le t_1'\\r|\pi(y,z)}}\alpha(r,d)\Bigg(\sum_{\substack{nn_2\in\lambda(x,rd,a,z)\\z_1<n_2\le x_1}}f(n_2) -\frac1r\prod_{y\le p<z}\left(1-\frac1p\right)\sum_{\substack{z_1<n_2\le x_1,(n_2,r)=1\\nn_2\in\lambda(x,d,a,y)}}f(n_2)\Bigg)+R_1=R_1(y,z)+R_1, \tag{2.8}$$

где $x_1=\min(x/n,t_2)$, $n_2|\pi(z_1,z_2)$, $d|\pi_y$ и

$$R_1=O\left(x\left(\frac{\log y}{\log t_1}+\frac{\log z}{\log t_1'}+\frac{\log z_2}{\log t_2}+\frac{\log z_1}{\log z_2}\right)\right).$$

Разобьем промежутки $]1,t_1]$ и $]x/t_2^2,x/z_1]$ на промежутки вида $]V,2V]$ и $]\Lambda,2\Lambda]$. Затем на каждом из них применим неравенство Коши. Получим

$$R_1(y,z)\ll\log t_1\log t_2\max_{V,\Lambda}\left(V\Lambda\Delta(V,\Lambda)\right)^{1/2}, \tag{2.9}$$

где

$$\Delta(V,\Lambda)=W_1-2\operatorname{Re}W_2+W_3.$$

Исследуем самую трудную из вновь полученных сумм, то есть W_1. Для нее имеем

$$W_1=\sum_{V<d\le 2V}\sum_{r',r''\le t_1'}\alpha(r',d)\bar\alpha(r'',d)\sum_{z_1<n_2',n_2''\le t_2}f(n_2')\bar f(n_2'')\sum_{n\in\mathcal{A}(r'd,r''d,z)}1.$$

Здесь $d|\pi_y$, $r'r''|\pi(y,z)$, $n_2'n_2''|\pi(z_1,z_2)$, $n_2'\equiv n_2''\pmod{d(r',r'')}$, $\mathcal{A}(r'd,r''d,z)$ — множество натуральных чисел удовлетворяющих условиям:

$$\Lambda < n \leqslant x_2 = \min\left(2\Lambda, \frac{x}{n_2'}, \frac{x}{n_2''}\right), \qquad nn_2' \equiv a \pmod{dr'},$$

$$nn_2'' \equiv a \pmod{dr''}, \qquad \left(\frac{(nn_2'-a)(nn_2''-a)}{d^2r'r''}, \pi_z\right) = 1.$$

Далее будем предполагать, что $t_1(t_1't_2)^3z_2 \leqslant x^{1/5}$. Оценим ту часть суммы W_1, в которой $n_2' = n_2''$. Она не превосходит

$$\sum_{V<d\leqslant 2V}\sum_{r',r''\leqslant t_1'}\sum_{n_2\leqslant t_2}\sum_{\substack{nn_2\leqslant x\\ nn_2\equiv a(\mathrm{mod}\, d[r',r''])}} 1$$

$$\ll x\sum_{V<d\leqslant 2V}\sum_{r',r''\leqslant t_1'}\sum_{n_2\leqslant t_2}\frac{1}{d[r',r'']n_2} \ll R_2,$$

где далее

$$R_2 = x^2(\Lambda V y)^{-1}\left(\frac{\log z}{\log y}\right)^2\log^2 z.$$

Это неравенство справедливо, так как оцениваемая сумма равна

$$O\left(x\left(\frac{\log z}{\log y}\right)^3\frac{\log z_2}{\log z_1}\right)$$

и будем предполагать, что выполняется условие

$$t_1 y\log z_2 \leqslant z_1\log y\log z_1\log z.$$

Покажем, что с точностью до R_2 можно отбросить ту часть суммы W_1, в которой $(r', r'') = \delta \neq 1$ и поэтому $y \leqslant \delta \leqslant y_0 = \min(t_1', t_2/d)$. Напомним, что $t_1(t_1't_2)^3z_2 \leqslant x^{1/5}$; тогда она равна

$$\ll \sum_{V<d\leqslant 2V}\sum_{y<\delta\leqslant y_0}\sum_{r',r''\leqslant t_2/\delta}\sum_{\substack{z_1<n_2',n_2''\leqslant t_2\\ n_2'\equiv n_2''(\mathrm{mod}\, d\delta)}}\frac{\Lambda}{d\delta r'r''}$$

$$\ll \sum_{d>V}\sum_{\delta>y}\sum_{r',r''}\frac{x^2}{\Lambda^2 d\delta}\frac{\Lambda}{d\delta r'r''} \ll R_2.$$

Точно также оценивается и та часть суммы W_1, в которой $(n_2', n_2'') = \delta \neq 1$.

Следовательно, можно считать, что в сумме W_1, $(n_2', n_2'') = (r', r'') = 1$. Применим к множеству $\mathscr{A}(r'd, r''d, z)$ фундаментальную лемму 2, взяв в качестве $P = \prod_{y\leqslant p<z} p$, $p\cdot\eta(p)$ — число решений сравнения

$$(nn_2'-a)(nn_2''-a) \equiv 0 \pmod p,$$

где $\Lambda < n \leqslant x_2$, $nn_2' \equiv a \pmod{dr'}$, $nn_2'' \equiv a \pmod{dr''}$. Заметим, что $p\cdot\eta(p) = 2$, если $p \nmid (n_2'-n_2'')r'r''$ и $p\cdot\eta(p) = 0$ или единице в противном случае.

После применения леммы 2 получим

(2.10) $$|\mathscr{A}(r'd, r''d, z)| = (1+O(H))\frac{1}{r'r''}|\mathscr{A}(d, d, y)|\prod_{y\leqslant p<z}(1-\eta(p))$$
$$+O\left(\sum_{\delta|P,\,\delta\leqslant\xi^3} 3^{\omega(\delta)}\left||\mathscr{A}_\delta| - \frac{\eta(\delta)}{r'r''}|\mathscr{A}(d, d, y)|\right|\right).$$

Здесь $\mathscr{A}_\delta$ — множество натуральных чисел удовлетворяющих условиям:

(2.11) $$\Lambda < n \leqslant x_2, \quad nn_2' \equiv a \pmod{dr'}, \quad nn_2'' \equiv a \pmod{dr''},$$
$$(nn_2'-a)(nn_2''-a) \equiv 0 \pmod{d^2r'r''\delta}, \qquad \left(\frac{(nn_2'-a)(nn_2''-a)}{d^2r'r''}, \pi_y\right) = 1.$$

К множеству $\mathscr{A}_\delta$ и $\mathscr{A}(d, d, y)$ снова применим лемму 2 с $P = \prod_{p<y} p$. Заметим, что для $\mathscr{A}_\delta$ и $\mathscr{A}(d, d, y)$ значения $p\cdot\eta(p)$ будут одинаковы, так как это число решений соответственно сравнений

$$\frac{(nn_2'-a)(nn_2''-a)}{d^2r'r''} \equiv 0 \pmod p, \qquad \frac{(nn_2'-a)(nn_2''-a)}{d^2} \equiv 0 \pmod p$$

и $p < y$, то есть $p \nmid r'r''$. Возьмем для $\mathscr{A}_\delta$ в лемме 2 $X = \frac{\eta(\delta)}{dr'r''}(x_2-\Lambda)$ и для $\mathscr{A}(d, d, y)$ равным $(x_2-\Lambda)/d$. Главные члены после подстановки во вторую сумму соотношения (2.10) сократятся, а остатки дадут вклад равный

$$\ll \sum_{\substack{\delta|\pi(y,z)\\ \delta\leqslant\xi^3}} 3^{\omega(\delta)}\eta(\delta)\frac{\Lambda}{dr'r''}H_1\prod_{p<y}(1-\eta(p))$$
$$+\sum_{\substack{\delta|\pi(y,z)\\ \delta\leqslant\xi^3}} 3^{\omega(\delta)}\sum_{\substack{\delta'|\pi_y\\ \delta'\leqslant\xi^3}} 3^{\omega(\delta')}\left\{\left||\mathscr{A}_{\delta\delta'}'| - \frac{x_2-\Lambda}{dr'r''}\eta(\delta\delta')\right|\right.$$
$$\left.+\frac{\eta(\delta)}{r'r''}\left||B_\delta| - \frac{x_2-\Lambda}{d}\eta(\delta')\right|\right\},$$

где $\mathscr{A}_{\delta\delta'}'$ — множество натуральных чисел удовлетворяющих первым четырем из условий (2.11) с заменой δ на $\delta\delta'$ и B_δ — множество натуральных чисел удовлетворяющих условиям:

$$\Lambda < n \leqslant x_2, \quad nn_2' \equiv a \pmod d,$$
$$nn_2'' \equiv a \pmod d, \quad (nn_2'-a)(nn_2''-a) \equiv 0 \pmod{d^2\delta}.$$

Возьмем $\xi = x^{1/8}$, тогда при $z \leqslant x^{1/100}$, $y \leqslant \exp(\sqrt{\log x})$ получим, что

$$H_1 \ll \log^{-A} x, \qquad H \ll \exp\left(-2\frac{\log x}{\log z}\right),$$

где A — любая положительная постоянная.

Возвратясь к соотношению (2.10), получим

$$|\mathscr{A}(dr', dr'', z)| = \frac{1}{r'r''}\prod_{y\leqslant p<z}(1-\eta(p))|\mathscr{A}(d, d, y)| + O\biggl(x^{3/4}\log^6 x + \frac{1}{r'r''}\biggl(\exp\biggl(-2\frac{\log x}{\log z}\biggr)\biggl(\frac{\log y}{\log z}\biggr)^2|\mathscr{A}(d, d, y)| + \frac{\Lambda}{\log^A x}\biggr)\biggr). \tag{2.12}$$

Оценим сначала вклад, который дают в W_1 слагаемые входящие в остаточный член. Первое слагаемое дает вклад равный

$$\ll \sum_{V<d\leqslant 2V}\ \sum_{\substack{z_1<n_2', n_2''\leqslant t_2\\ n_2'\equiv n_2''(\mathrm{mod}\, d)}} \exp\biggl(-2\frac{\log x}{\log z}\biggr)|\mathscr{A}(d, d, y)|$$

$$= \sum_{V<d\leqslant 2V}\ \sum_{\Lambda<n\leqslant 2\Lambda}\biggl(\sum_{\substack{z_1<n_2\leqslant t_2\\ n_2 n\equiv a (\mathrm{mod}\, d)\\ ((n_2 n-a)/d, \pi_y)=1}} \exp\biggl(-\frac{\log x}{\log z}\biggr)\biggr)^2 \ll \frac{x^2\exp(-2\log x/\log z)}{\Lambda V(\log y\log z_1)^2}.$$

Здесь мы воспользовались получающейся с помощью решета Сельберга (см., например, [6]) оценкой

$$\sum_{\substack{z_1<n_2\leqslant t_2\\ nn_2\equiv a (\mathrm{mod}\, d)\\ ((nn_2-a)/d, \pi_y)=1}} 1 \ll \prod_{\substack{p<y\\ p\nmid dn}}\biggl(1-\frac{1}{p}\biggr)\frac{x}{d\Lambda}\frac{1}{\log z_1},$$

справедливой при $t_1 \leqslant \sqrt[4]{z_1}$. Второе и третье слагаемое после подстановки в W_1 дают, при условии $(t_1' t_2)^3 \leqslant x^{1/5}$, вклад равный

$$O\biggl(\frac{x^2}{\Lambda V}\log^{-A} x\biggr),$$

где A — любая положительная постоянная. Таким образом, после подстановки (2.12) в W_1 получим, что

$$W_1 \doteq \sum_{V<d\leqslant 2V}\ \sum_{r', r''\leqslant t_1'} \frac{\alpha(r', d)\bar{\alpha}(r'', d)}{r'r''} \sum_{z_1<n_2', n_2''\leqslant t_2} f(n_2')f(n_2'') \times \prod_{y\leqslant p<z}(1-\eta(p))|\mathscr{A}(d, d, y)| + O\biggl(\frac{x^2}{\Lambda V}\biggl(\frac{\exp(-2\log x/\log z)}{\log^2 y\log^2 z_1} + \frac{1}{\log^A x}\biggr) + R_2\biggr). \tag{2.13}$$

Первая сумма в последнем равенстве будет равна W_3, если заменить $(1-\eta(p))$ на $(1-1/p)^2$ и затем отбросить условия $(n_2', n_2'') = (r', r'') = 1$. Второе можно сделать, как показано было ранее при преобразовании W_1, а первое тоже возможно с точностью до $O(R_2)$, так как

$$\biggl|\prod_{y\leqslant p<z}(1-\eta(p)) - \prod_{y\leqslant p<z}\biggl(1-\frac{1}{p}\biggr)^2\biggr| \leqslant \biggl|\prod_{\substack{y\leqslant p<z\\ p|T}}\biggl(1-\frac{1}{p}\biggr)^{-2} - 1\biggr|\biggl(\frac{\log z}{\log y}\biggr)^2 + \frac{1}{y},$$

где $T = (n_2' - n_2'')r'r''$, и правая часть последнего неравенства равна

$$\ll \sum_{i=1}^{3}\sum_{\substack{d|T_i\\ d>y}} \tau(d)/d,$$

где $T_1 = (n_2' - n_2'')$, $T_2 = r'$, $T_3 = r''$.

После подстановки в (2.13) получим

$$W_1 = W_3 + O\biggl(\frac{x^2}{\Lambda V}\biggl(\frac{\exp(-2\log x/\log z)}{\log^2 y\log^2 z_1} + \frac{1}{\log^A x} + \frac{1}{y}\biggl(\frac{\log z}{\log y}\biggr)^2\log^2 z\biggr)\biggr).$$

Исследование W_2 проводится по той же схеме, но несколько проще. В результате получим

$$W_1 - 2\,\mathrm{Re}\, W_2 + W_3 = O\biggl(\frac{x^2}{\Lambda V}\biggl(\frac{1}{\log^2 y\log^2 z}\exp\biggl(-2\frac{\log x}{\log z}\biggr) + \frac{1}{\log^A x} + \frac{1}{y}\biggl(\frac{\log z}{\log y}\biggr)^2\log^2 z\biggr)\biggr).$$

Подставляя полученную оценку в (2.9), а затем в (2.8), имеем

$$R(y, z) \ll x\biggl(\frac{\log t_1\log t_2}{\log z_1\log y}\exp\biggl(-\frac{\log x}{\log z}\biggr) + \frac{1}{\log^A x} + \frac{\log t_1\log t_2\log^2 z}{\sqrt{y}\log y} + \frac{\log y}{\log t_1} + \frac{\log z}{\log t_1'} + \frac{\log z_2}{\log t_2} + \frac{\log z_1}{\log z_2} + \frac{1}{z_1}\biggr),$$

где

$$t_1(t_1' t_2)^3 z_2 \leqslant x^{1/5}, \quad t_1 \leqslant \sqrt[4]{z_1}, \quad t_1 y\log z_2 \leqslant z_1\log z_1.$$

Если

$$z < \exp\biggl(\frac{\log x}{(\log\log x)^2}\biggr) \quad \text{и} \quad y \geqslant \log^8 x,$$

то выберем

$$t_1' = x^{\gamma}, \quad t_2 = x^{\gamma}, \quad \gamma < 1/100, \quad \log z_2 = \sqrt[3]{\frac{\log z}{\log x}}\log t_2,$$

$$\log z_1 = \sqrt[3]{\biggl(\frac{\log z}{\log x}\biggr)^2}\log t_2 \quad \text{и} \quad t_1 = z_1^{1/4}.$$

Тогда

$$R(y, z) \ll x\left(\frac{\log z}{\log x}\right)^{1/3}. \tag{2.14}$$

Если $z \geqslant \exp(\log x/(\log\log x)^2)$ и $y \geqslant \log^8 x$, выберем $t_1' = x^\gamma$, $t_2 = x^\gamma$, $\log z_2 = (\log z/\log x)^{1/2}\log t_2$, $\log z_1 = (\log z/\log x)^{1/2}\log z_2$, $\log t_1 = (\log x/\log z)^{1/2} \times \log y$. При таком выборе параметров снова получим оценку (2.14).

Пусть $y < \log^8 x$. Заметим, что непосредственно из определения $R(y, z)$ вытекает неравенство

$$R(y, z) \leqslant R(t, z) + \sum_{\delta|\pi(y,z)} \frac{1}{\delta} \prod_{y \leqslant p < t}\left(1 - \frac{1}{p}\right) R(y, t) \leqslant R(t, z) + R(y, t).$$

Учитывая это неравенство, имеем

$$R(y, z) \leqslant R(y, \log^8 x) + R(\log^8 x, z). \tag{2.15}$$

Предположим, что $y < z \leqslant \log^8 x$ и $\log z \leqslant \log^2 y$. Выберем $t_1' = x^\gamma$, $t_1 = z_1^{1/4}$, $\log z_1 = y^{1/20}$, $\log z_2 = y^{1/10}$, $\log t_2 = \min(y^{3/20}, \gamma \log x)$, $0 < \gamma < 1/100$.

При таком выборе параметров

$$R(y, z) \ll x\frac{\log y}{y^{1/20}} \ll \frac{x}{y^{1/21}}.$$

Пусть $y < z \leqslant \log^8 x$. Выберем $y_0 = y < y_1 < \ldots < y_n = z$ так, что $2y_{i-1} \leqslant y_i \leqslant y_{i-1}^{\log y_{i-1}}$. Тогда имеем

$$R(y, z) \leqslant \sum_{i=1}^{n} R(y_{i-1}, y_i) \ll x \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{y_i^{1/21}} \ll \frac{x}{y^{1/21}} \sum_{i=1}^{n} (\sqrt[21]{2})^{-i+1}.$$

Отсюда и из соотношений (2.15) и (2.14) вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1. Напомним, что $\gamma(y, z)$ — множество натуральных чисел, все простые делители которых либо $< y$, либо $\geqslant z$. Тогда имеем

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in \gamma(y,z)}} f(n+a) = \sum_{\substack{n \leqslant x+a \\ n-a \in \gamma(y,z)}} f(n) + O(1) = \sum_{\substack{n_1 n_2 \leqslant x \\ n_1 n_2 - a \in \gamma(y,z)}} f(n_1) f(n_2) + O(R),$$

где

$$n_1 | \pi_{z_1}, \quad (n_2, \pi_{z_1}) = 1, \quad n_1 \geqslant z_2, \quad n_2 \geqslant z_1,$$

$$R = \sum_{n_1 \leqslant z_2} \sum_{\substack{n_2 \leqslant x/n_1 \\ n_1 n_2 - a \in \gamma(y,z)}} 1 + \sum_{\substack{n_1 \leqslant x \\ n_1 - a \in \gamma(y,z)}} 1 \ll x\frac{\log z_2 \log y}{\log z_1 \log z}. \tag{2.16}$$

Оценка для первой суммы в (2.16) следует после применения решета Сельберга, если $z_2 \leqslant x^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, а для второй суммы, при $\log z_1 \times (\log\log x)^2 \leqslant \log x$, оценка $O(x\log^{-2} x)$ вытекает из леммы 1.

Применим фундаментальную лемму 2, взяв в качестве $b_n = 1 - \operatorname{Re} f(n)$, если $n = n_1 n_2$, $n_1 \geqslant z_2$, $n_2 \geqslant z_1$ и $b_n = 0$ в противном случае. Положим $P = \prod_{y_1 \leqslant p < z} p$, $a_n = n - a$ и $X = \sum_{n \leqslant x, n-a \in \gamma(y, y_1)} b_n$.

После применения леммы 2 получим

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n-a \in \gamma(y,z)}} b_n = (1 + 2\theta_1 H) \prod_{y_1 \leqslant p < z}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n-a \in \gamma(y,y_1)}} b_n + O\left(\sum_{\substack{d|P \\ d \leqslant \xi^3}} 3^{\omega(d)} \left| \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv a \,(\mathrm{mod}\, d) \\ n-a \in \gamma(y,y_1)}} b_n - \frac{1}{d} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n-a \in \gamma(y,y_1)}} b_n \right|\right).$$

Для оценки второго слагаемого сначала применим неравенство Коши и в сумме с множителем $9^{\omega(d)}$ для разности стоящей под знаком модуля используем тривиальную оценку, то есть $O(x/d)$. Для оценки второй из вновь полученных сумм используем лемму 3, выбрав

$$z_2 = \log^{4A+17} x, \quad z_1 = \exp(\log x/(\log\log x)^2),$$
$$y_1 = z_3 = \log^{2A+17} x, \quad y_2 = \exp((\log\log x)^3),$$
$$Q = \xi^3 = \sqrt{x}\, y_2^{-1} \log^{-2A-17} x,$$

где A — любая положительная постоянная. Учитывая, что $b_n = 1 - \operatorname{Re} f(n) = 1 - \operatorname{Re} f(n_1) \operatorname{Re} f(n_2) + \operatorname{Im} f(n_1) \operatorname{Im} f(n_2)$, получим, что второе слагаемое будет равно $O(x\log^{-A} x)$.

Так как $\xi \geqslant x^{1/7}$, то при $z \leqslant x^{1/100}$ имеем

$$H \leqslant \exp(-\log x/\log z).$$

Следовательно

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n-a \in \gamma(y,z)}} b_n = \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\log x}{\log z}\right)\right)\right) \prod_{y_1 \leqslant p < z}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n-a \in \gamma(y,y_1)}} b_n + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right).$$

Аналогичное соотношение справедливо для $b_n = 1 - \operatorname{Im} f(n)$ или 1, если $n = n_1 n_2$, $n_1 \geqslant z_2$, $n_2 \geqslant z_1$, и $b_n = 0$ в противном случае. Следовательно, используя эти соотношения и снова переходя к сумме по всем n, воспользовавшись оценкой (2.16), получим

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n-a \in \gamma(y,z)}} f(n) = \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\log x}{\log z}\right)\right)\right) \prod_{y_1 \leqslant p < z}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n-a \in \gamma(y,y_1)}} f(n) + O\left(\frac{x}{\log^A x}\right) + O\left(x\frac{(\log\log x)^3}{\log x}\frac{\log y}{\log z}\right).$$

Обозначим

$$S(y, z) = \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n-a \in \gamma(y,z)}} f(n).$$

При $y < t \leqslant z$ имеем

$$S(y, z) = S(y, t) - \sum_{\substack{d \mid \pi(t,z) \\ d \neq 1}} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \equiv a \pmod d \\ (n-a)/d \in \gamma(y,z)}} f(n).$$

Отсюда, используя обозначения леммы 4, получаем

$$S(y, z) = S(y, t) - \sum_{d \mid \pi(t,z)} \frac{1}{d} \prod_{t \leqslant p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) S(y, t)$$

$$+ \prod_{t \leqslant p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) S(y, t) + O(R(t, z)).$$

Таким образом, применив лемму 4, при $y < z \leqslant \log^A x$, где A — любая положительная постоянная, находим

$$S(y, z) = \sum_{t \leqslant p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) S(y, t) + O\left(\frac{x}{\sqrt[21]{t}} + x\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1/3}\right).$$

Пусть $y = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = z$, где $t_i = 2^i y$ при $i \leqslant k-1$. Тогда, применив k раз доказанное равенство, получим

$$S(y, z) = \prod_{y \leqslant p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{n \leqslant x} f(n) + O\left(x\left(\frac{\log y}{\log z} \frac{1}{\sqrt[21]{y}}\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\log 2y}{\log z} \frac{1}{\sqrt[21]{2y}} + \ldots + \frac{\log 2^k y}{\log z} \frac{1}{\sqrt[21]{2^k y}} + k\left(\frac{\log\log x}{\log x}\right)^{1/3}\right)\right).$$

Следовательно, при $y < z \leqslant \log^A x$ имеем

$$S(y, z) = \prod_{y \leqslant p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{n \leqslant x} f(n) + O\left(x\left(\frac{1}{\sqrt[21]{y}} \frac{\log y}{\log z} + \frac{(\log\log x)^2}{\sqrt[3]{\log x}}\right)\right).$$

Пусть $y < \log^A x < z$. Тогда используя (2.17) с $y_1 = \log^A x$, где $A > 0$ — достаточно большая постоянная, а затем предыдущее соотношение, получим

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ n \in \gamma(y,z)}} f(n+a) = \left(1 + O\left(\exp\left(-\frac{\log x}{\log z}\right)\right)\right) \prod_{y_1 \leqslant p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\substack{n \leqslant x \\ n - a \in \gamma(y, y_1)}} f(n)$$

$$+ O\left(x \frac{(\log\log x)^3}{\log x} \frac{\log y}{\log z}\right)$$

$$= \prod_{y \leqslant p < z} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{n \leqslant x} f(n) + O\left(x\left(\frac{1}{\sqrt[21]{y}} \frac{\log y}{\log z} + \frac{\log y}{\log z} \exp\left(-\frac{\log x}{\log z}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\log y_1}{\log z} \frac{(\log\log x)^2}{\sqrt[3]{\log x}}\right)\right).$$

Так как $\log y_1 = O(\log\log x)$, то отсюда следует справедливость теоремы 1 в рассматриваемом случае. Если y и z больше $\log^A x$, то теорема 1 вытекает из (2.17).

Теорема 1 полностью доказана.

Гипотеза Эрдеша–Кубилюса (теорема 7) и более слабая форма, по сравнению с полученной в настоящей работе, неравенства И. Ружи были доказаны в работе [7]. Краткое сообщение о результатах настоящей работы опубликовано в [14].

Литература

[1] А. И. Виноградов, *О числах с малыми простыми делителями*, Доклады АНСССР 109 (4) (1956), 683–686.

[2] P. D. T. A. Elliott, *Probabilistic Number Theory II*, Springer, New York 1980.

[3] P. D. T. A. Elliott and C. Ryavec, *The distribution of the values of additive arithmetical functions*, Acta Math. 126 (1971), 143–164.

[4] P. Erdös and A. Wintner, *Additive arithmetical functions and statistical independence*, Amer. J. Math. 61 (1939), 713–721.

[5] P. X. Gallagher, *The large sieve*, Mathematika 14 (1967), 14–20.

[6] H. Halberstam and H. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, 1974.

[7] A. Hildebrand, *Additive and multiplicative functions on shifted primes*, Proc. London Math. Soc. (3) 59 (1989), 209–232.

[8] I. Kátai, *On distribution of arithmetical functions on set of prime plus one*, Compositio Math. 19 (1968), 278–289.

[9] — *Research problems in number theory*, Publ. Math. 24 (3) (1977), 263–276.

[10] Й. П. Кубилюс, *Вероятностные методы в теории чисел*, Гос. издат. полит. и научн. лит. Лит. ССР, Вильнюс, 1962.

[11] Б. В. Левин, Н. М. Тимофеев, *Аналитический метод в вероятностной теории чисел*, Ученые записки Владимирского гос. пед. института 57 (2) (1971), 57–150.

[12] I. Ruzsa, *On the concentration of additive functions*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 36 (1980), 215–232.

[13] Н. М. Тимофеев, *Распределение значений аддитивных функций на последовательности* $\{p+1\}$, Мат. заметки 33 (6) (1983), 933–942.

[14] Н. М. Тимофеев, В кн.: *Пятая международная Вильнюсская конференция по теории вероятностей и математической статистике. Тезисы докладов*, т. IV, Вильнюс, 1989, 275–276.

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОС. ПЕД. ИНСТИТУТ
ФИЗ.-МАТ. ФАКУЛЬТЕТ
Владимир, пр. Строителей, д. 11
СССР 600024

Поступило 24.6.1989
и в исправленной форме 29.1.1990 (1943)