

Sur le théorème de Runge

par

M. AYAD (Alger)

1. Introduction. Soit $f(x, y)$ un polynôme à coefficients entiers rationnels, de degré n , irréductible dans $\mathcal{Q}[x, y]$. En 1887, C. Runge [5] a donné une condition nécessaire pour que l'équation

$$(1) \quad f(x, y) = 0$$

admette une infinité de solutions entières. On trouvera dans [3] et [8] des versions du travail de Runge. Ces versions donnent l'énoncé d'un corollaire du théorème de Runge, mais ne reprennent pas son résultat principal que voici: soit

$$(2) \quad y = c_0 x^{\mu/N} + c_1 x^{(\mu-1)/N} + \dots + c_\mu + c_{\mu+1} x^{-1/N} + \dots, \quad c_i \in \mathcal{Q},$$

un développement de Newton-Puiseux à l'infini de la fonction algébrique $y(x)$ définie par (1). Il définit ce qu'il appelle un "système de conjugués de y ", comme étant l'ensemble des développements de Newton-Puiseux obtenus à partir de (2) en remplaçant $x^{1/N}$ par $\varepsilon x^{1/N}$ (ε racine N -ème de l'unité) et en conjuguant sur \mathcal{Q} les coefficients c_i et montre que si (1) a une infinité de solutions entières alors il existe un seul "système de conjugués" définissant toutes les branches à l'infini de (1).

En 1918, E. Maillet [1], [2] a montré que si une courbe unicursale, irréductible de degré n admet une infinité de points entiers, alors elle est paramétrée par

$$(3) \quad x = \frac{A(t)}{D(t)}, \quad y = \frac{B(t)}{D(t)},$$

$A(t), B(t), D(t) \in \mathcal{Z}[t]$, $\deg A$ et $\deg B \leq n$ et $D(t)$ vérifiant l'une des conditions suivantes, le dernier cas ne se produisant que si n est pair.

(i) $D(t) = d \in \mathcal{Z}$;

(ii) $D(t) = d(at+b)^n$, $d, a, b \in \mathcal{Z}$;

(iii) $D(t) = d(at^2+bt+c)^{n/2}$, $a, b, c, d \in \mathcal{Z}$, $b^2 - 4ac > 0$ non carré dans \mathcal{Q} .

Dans le cas (i) A ou B est de degré n . Les cas (i) et (ii) ne sont pas essentiellement différents.

T. Nagell écrit dans [4] que l'on peut supposer que $\deg A = \deg B = n$, $d = 1$, $(a, b) = 1$ dans le cas de (ii) et $au^2 + buv + cv^2$ représente un certain entier k tel que $k^{n/2}$ divise tous les coefficients de A et B dans le cas de (iii). Ainsi énoncé, on obtient une condition nécessaire et suffisante pour qu'une courbe unicursale irréductible passe par une infinité de points entiers. Comme le montre E. Maillet [2], si l'équation (1) possède une infinité de solutions entières et si f est irréductible sur \mathcal{Q} , alors f est absolument irréductible. Le théorème de Runge signifie que f est irréductible comme élément de $\mathcal{Q}((1/x))[y]$ (et de $\mathcal{Q}((1/y))[x]$). En 1929, C. L. Siegel [7] a montré que les "courbes de Maillet" sont les seules courbes planes ayant une infinité de points entiers.

Le lemme qui suit montre que le théorème de Runge est une conséquence du théorème de Siegel et donne des précisions sur les coefficients c_i de (2).

2. Places à l'infini d'une courbe ayant une infinité de points entiers. On consultera [9] pour les définitions.

LEMME 1. Soit $f(x, y) \in \mathcal{Z}[x, y]$ irréductible de degré n telle que l'équation (1) possède une infinité de solutions entières (de sorte que l'une des conditions (i), (ii), (iii) est vérifiée). Alors la courbe (1) possède une unique place à l'infini dans le cas (i), (ii) représentée par la forme normale irréductible:

$$(4) \quad \begin{cases} x = t^{-(n-h)}, \\ y = t^{-(n-k)}(q_0 \alpha^{-(n-k)} + q_1 \alpha^{-(n-k)+1} t + \dots + q_i \alpha^{-(n-k)+i} t^i + \dots), \\ z = 1, \end{cases}$$

où $q_i \in \mathcal{Z}$, $q_0 \neq 0$, $0 \leq h$ et $k < n$, $hk = 0$ et α vérifie $\alpha^{n-h} \in \mathcal{Q}$, et 2 places à l'infini dans le cas de (iii) représentées par

$$(5) \quad \begin{cases} x = t^{-(n/2-h)}, \\ y = t^{-(n/2-k)}(q_0 \alpha^{-(n/2-k)} + q_1 \alpha^{-(n/2-k)+1} t + \dots + q_i \alpha^{-(n/2-k)+i} t^i + \dots), \\ z = 1, \end{cases}$$

et par

$$(5') \quad \begin{cases} x = t^{-(n/2-h)}, \\ y = t^{-(n/2-k)}(\bar{q}_0 \beta^{-(n/2-k)} + \bar{q}_1 \beta^{-(n/2-k)+1} t + \dots + \bar{q}_i \beta^{-(n/2-k)+i} t^i + \dots), \\ z = 1, \end{cases}$$

où les q_i appartiennent à un certain corps quadratique $\mathcal{Q}(\sqrt{d})$, d entier > 0 sans facteur carré, $q_0 \neq 0$, \bar{q}_i désigne le conjugué sur \mathcal{Q} de q_i , $0 \leq h$ et $k < n/2$, $hk = 0$, α et β vérifiant $\alpha^{n/2-h} = a$, $\beta^{n/2-h} = \bar{a}$, a étant un certain élément de $\mathcal{Q}(\sqrt{d})$.

Dans le 1er cas, les développements de Newton-Puiseux se déduisent tous de

$$y = q_0 \alpha^{-(n-k)} x^{(n-k)/(n-h)} + q_1 \alpha^{-(n-k)+1} x^{(n-k+1)/(n-h)} + \dots$$

en remplaçant $x^{1/(n-h)}$ par $\varepsilon x^{1/(n-h)}$, ε racine $(n-h)$ -ème de l'unité car $hk = 0$.

Dans le 2ème cas, ils se déduisent de

$$y = q_0 \alpha^{-(n/2-k)} x^{(n/2-k)/(n/2-h)} + q_1 \alpha^{-(n/2-k)+1} x^{(n/2-k+1)/(n/2-h)} + \dots$$

et de

$$y = \bar{q}_0 \beta^{-(n/2-k)} x^{(n/2-k)/(n/2-h)} + \bar{q}_1 \beta^{-(n/2-k)+1} x^{(n/2-k+1)/(n/2-h)} + \dots$$

en remplaçant $x^{1/(n/2-h)}$ par $\varepsilon x^{1/(n/2-h)}$, ε racine $(n/2-h)$ -ème de l'unité.

Cela démontre et précise le théorème de Runge.

Pour la démonstration du lemme ci-dessus, nous aurons recours au lemme suivant et qui est proposé comme exercice dans [9], p. 151.

LEMME 2. Soit \mathcal{C} une courbe rationnelle sur un corps K dans $\mathbb{P}^n(K)$ et soit $G_i(s, t)$, $i = 0, 1, \dots, r$, des polynômes homogènes de même degré n tels que

1. Pour tout $(s, t) \in \mathbb{P}_1(K)$ (sauf peut-être pour un nombre fini d'exceptions) $(G_i(s, t))$ est un point de \mathcal{C} .

2. Pour tout point (x_i) de \mathcal{C} (sauf peut-être pour un nombre fini d'entre eux) il existe $(s, t) \in \mathbb{P}_1(K)$ unique et $q \in K$ tels que $qx_i = G_i(s, t)$.

Alors pour tout $(s_0, t_0) \in \mathbb{P}_1(K)$, $x_i(t) = G_i(s_0, t_0 + t)$, $i = 0, 1, \dots, r$, est une paramétrisation d'une place de \mathcal{C} et réciproquement pour toute place P de \mathcal{C} , il existe $(s_0, t_0) \in \mathbb{P}_1(K)$ unique tel que $x_i(t) = G_i(s_0, t_0 + t)$, $i = 0, 1, \dots, r$, est une paramétrisation représentant P .

Démonstration du lemme 1.

1. Supposons que l'on a (i) ou (ii); alors par un changement de paramètre, la courbe est paramétrée par

$$(6) \quad \begin{cases} x = t^{-n}(a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n), \\ y = t^{-n}(b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n), \\ z = 1. \end{cases}$$

Cette paramétrisation est centrée au point à l'infini $(a_0, b_0, 0)$.

Traduisons que (6) est équivalente à une paramétrisation sous la forme normale irréductible

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = t^{-N}, \\ y_1 = t^{-\mu}(c_0 + c_1 t + \dots), \\ z_1 = 1. \end{cases}$$

Posons $\bar{t} = t(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots)$ et soient h et k les plus petits entiers ≥ 0 tels que $a_h \neq 0$ et $b_k \neq 0$. On a $h, k < n$. Si $hk \neq 0$ alors

$$x = \frac{a_h + a_{h+1}t + \dots + a_n t^{n-h}}{t^{n-h}} \quad \text{et} \quad y = \frac{b_k + b_{k+1}t + \dots + b_n t^{n-k}}{t^{n-k}}.$$

Pour toute droite d'équation $ux + vy + w = 0$, les valeurs de t correspondant

aux points d'intersection de cette droite avec la courbe sont données par $ux(t) + vy(t) + w = 0$. Le nombre de tels points est $< n$, ce qui contredit le théorème de Bézout; d'où $hk = 0$.

La condition $x(\bar{t}) = t^{-N}$ s'écrit

$$t^{-n+h}(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots)^{-n+h} [a_h + a_{h+1} t(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots) + \dots \\ \dots + a_n t^{n-h}(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots)^{n-h}] = t^{-N},$$

d'où $n-h = N$ et

$$a_h + a_{h+1} t(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots) + \dots + a_n t^{n-h}(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots)^{n-h} = (\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots)^{n-h}.$$

Par identification on a

$$\alpha_1^{n-h} = a_h \quad \text{et} \quad \alpha_i = p_i \alpha_1^i, \quad p_i \in \mathcal{Q}.$$

La condition $y(\bar{t}) = y_1(t)$ s'écrit

$$t^{n+h}(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots)^{k-n} [b_k + b_{k+1} t(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots) + \dots \\ \dots + b_n t^{n-k}(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots)^{n-k}] = t^{-\mu}(c_0 + c_1 t + \dots),$$

d'où $\mu = n-k$ et

$$b_k + b_{k+1} t(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots) + \dots + b_n t^{n-k}(\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots)^{n-k} \\ = (\alpha_1 + \alpha_2 t + \dots)^{n-k}(c_0 + c_1 t + \dots).$$

Par identification on obtient

$$c_0 = b_k \alpha_1^{-(n-k)} \quad \text{et} \quad c_i = q_i \alpha_1^{-(n-k)+i}, \quad q_i \in \mathcal{Q}.$$

La paramétrisation (7) est irréductible parce qu'elle est équivalente à (6) qui elle est irréductible en vertu du lemme 2.

Les relations $N = n-h$ et $\mu = n-k$, avec $hk = 0$, montrent qu'il n'existe pas d'autre place à l'infini que celle qui vient d'être obtenue.

En effet, une place à l'infini est une classe d'équivalence de paramétrisations irréductibles centrée en un certain point à l'infini. De plus à tout développement de Newton-Puiseux (2) correspond une place à l'infini représenté par

$$x = t^{-N}, \quad y = t^{-\mu}(c_0 + c_1 t + \dots).$$

Cette application induit une bijection de l'ensemble des développements de Newton-Puiseux à l'infini (modulo la relation : 2 développements de Newton-Puiseux sont \sim s'il correspondent au même N et si l'on passe de l'un à l'autre en remplaçant $x^{1/N}$ par $ex^{1/N}$) sur l'ensemble des places à l'infini.

Si r désigne le nombre de places à l'infini, N_1, \dots, N_r les différentes valeurs de N correspondant aux places, deg_y le degré de f en y alors $\text{deg}_y = N_1 + \dots + N_r$.

Si $h = 0$ alors $N = n$, d'où $r = 1$.

Si $k = 0$ alors $N = n-h$ et $\mu = n$. Soient y_1, \dots, y_{n-h} les développements de Newton-Puiseux correspondant à N , $y_i = c_0 \varepsilon_i x^{n/(n-h)} + \dots$ et soient z_1, \dots, z_r les autres développements existant seulement dans le cas $r > 1$. On pose

$$z_i = c(z_i) \varepsilon(z_i) x^{\lambda(z_i)} + \dots$$

Le terme dominant en x de $f(x, y)$ est à un coefficient multiplicatif près le même que celui de

$$\prod_{i=1}^{n-h} (y - c_0 \varepsilon_i x^{n/(n-h)}) \prod (y - c(z_i) \varepsilon(z_i) x^{\lambda(z_i)}),$$

où le deuxième produit est éventuellement indexé par l'ensemble vide.

Comme le terme dominant du premier produit est en x^n , alors le deuxième produit se réduit à l'unité, donc $r = 1$.

2. Supposons que l'on a (iii), n étant pair. Par un changement de paramètre évident, on peut mettre x et y sous la forme

$$(8) \quad x = (e_0 + e_1 t + \dots + e_n t^n)/(t^2 - d)^{n/2}, \quad y = (f_0 + f_1 t + \dots + f_n t^n)/(t^2 - d)^{n/2},$$

$e_i, f_i \in \mathcal{Q}$ et $d > 1$ entier sans facteur carré.

En remplaçant t par $\sqrt{d} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)$, on obtient la paramétrisation

$$(9) \quad \begin{cases} x = (a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n)/t^{n/2}, \\ y = (b_0 + b_1 t + \dots + b_n t^n)/t^{n/2}, \\ z = 1, \end{cases}$$

avec $a_i, b_i \in \mathcal{Q}(\sqrt{d})$, $a_{n-i} = \bar{a}_i$, $b_{n-i} = \bar{b}_i$, $\forall i$.

De plus, l'un des coefficients $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ n'est pas rationnel. Sinon en posant $t+1/t = u$, on peut exprimer x et y sous la forme $x = a'_0 + a'_1 u + \dots + a'_{n/2} u^{n/2}$, $y = b'_0 + b'_1 u + \dots + b'_{n/2} u^{n/2}$, $a'_0, b'_0 \in \mathcal{Q}$, ce qui est impossible.

Comme dans le cas précédent, on met (9) sous la forme normale (5). De même, si dans (8) on remplace t par $-\sqrt{d} \left(\frac{t+1}{t-1} \right)$, on obtiendra la paramétrisation

$$(9') \quad \begin{cases} x = (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 t + \dots + \bar{a}_n t^n)/t^{n/2}, \\ y = (\bar{b}_0 + \bar{b}_1 t + \dots + \bar{b}_n t^n)/t^{n/2}, \\ z = 1, \end{cases}$$

qui se mettra sous la forme (5'). Les paramétrisations (9) et (9') sont irréductibles et représentent toutes les places à l'infini, en vertu du lemme 2.

Les relations $N = n/2 - h$ et $\mu = n/2 - k$, $hk = 0$ montrent que (9) et (9') (ainsi que (5) et (5')) représentent les places distinctes.

THÉOREME 1. Si $f(x, y)$ est irréductible sur \mathcal{Q} et si (1) possède une infinité de solutions entières, alors ou bien f est irréductible comme élément de $\overline{\mathcal{Q}}((1/x))[y]$, ou bien il se décompose en un produit de 2 facteurs irréductibles de même degré. La même conclusion vaut dans $\overline{\mathcal{Q}}((1/y))[x]$.

Preuve. Conservons les notations introduites dans la démonstration du lemme 1, et soient δ le coefficient dominant de $f(x, y)$ comme polynôme en y , et Ω le corps $\bigcup_{N \geq 1} \overline{\mathcal{Q}}((x^{-1/N}))$. Ω est algébriquement clos [9]. $f(x, y)$ étant à coefficients dans ce corps, il se décompose en facteurs linéaires: $f(x, y) = \delta \prod_{i=1}^{\text{deg}_y} (y - y_i)$. Si nous regroupons les facteurs en fonctions des places à l'infini qu'il définissent, on obtient une factorisation dans $\overline{\mathcal{Q}}((1/x))[y]$, $f(x, y) = \delta \prod_{i=1}^r f_i(x, y)$ avec $f_i(x, y) = \prod_{j=1}^{N_i} (y - y_{ij})$, les y_{ij} s'obtenant à partir de y_{i1} en remplaçant x^{1/N_i} par $\varepsilon x^{1/N_i}$ (ε racine N_i -ème de 1). En fait, si la norme dans l'extension de corps $\overline{\mathcal{Q}}((x^{-1/N_i}))/\overline{\mathcal{Q}}((1/x))$ est étendue aux polynômes, on a que $f_i(x, y)$ est la norme de $y - y_{i1}$.

Dans notre cas ici, on a soit une unique place à l'infini et alors $f(x, y)$ est irréductible dans $\overline{\mathcal{Q}}((1/x))[y]$, soit deux places à l'infini correspondant à la même valeur de N et alors $f(x, y)$ se décompose en un produit de deux facteurs irréductible de même degré N dans $\overline{\mathcal{Q}}((1/x))[y]$.

Remarque 1. Runge [5] a déjà montré que si $f(x, y)$ est irréductible sur \mathcal{Q} et possède une infinité de points entiers, alors les plus hautes puissances de x et y figurent séparément. Soit deg_x et deg_y les degrés respectifs de f en x et en y , A. Schinzel [6] a montré que la somme des termes de $f: \varepsilon x^u y^v, \varepsilon \in \mathcal{Z}$, tels que $u \text{deg}_y + v \text{deg}_x = \text{deg}_x \text{deg}_y$, est à un coefficient multiplicatif près de la forme $g(x^{\text{deg}_x/s}, y^{\text{deg}_y/s})^u$ où $s = (\text{deg}_x, \text{deg}_y)$ et g est une forme linéaire ou quadratique irréductible et indéfinie.

Il est possible de retrouver ce résultat en utilisant le lemme 1; la somme des termes en question est à un coefficient multiplicatif près

$$\prod_{\varepsilon \text{ racine } (n-h)\text{-ème de } 1} (y - \varepsilon^{n-k} q_0 \alpha^{-(n-k)} x^{(n-k)/(n-h)})$$

dans le cas d'une seule place à l'infini et

$$\prod_{\varepsilon \text{ racine } (n/2-h)\text{-ème de } 1} (y - \varepsilon^{n/2-k} q_0 \alpha^{-(n/2-k)} x^{(n/2-k)/(n/2-h)}) \times \prod_{\varepsilon \text{ racine } (n/2-h)\text{-ème de } 1} (y - \varepsilon^{n/2-k} \bar{q}_0 \beta^{-(n/2-k)} x^{(n/2-k)/(n/2-h)})$$

dans le cas de deux places à l'infini.

Remarque 2. Le théorème de Runge porte sur les développements de Newton-Puiseux à l'infini pour une courbe possédant une infinité de points entiers, c'est-à-dire sur les développements en séries de Laurent de puissance fractionnaires de $1/x$. L'exemple qui suit montre qu'on ne peut pas en général remplacer $1/x$ par $x - a, a \in \mathcal{C}$.

La courbe d'équation $f(x, y) = y^2 + 2xy - x^2 + 2y$, possède une infinité de points entiers car elle est paramétrée par $x = 2(t+1)/(t^2-2), y = 2/(t^2-2)$. Les développements de y en série de Laurent de puissances de x sont données par $y = -x \pm \sqrt{1 + (2x + 2x^2)}$. On obtient ainsi deux "systèmes de conjugués de y en puissance de x ",

$$y = -2 - 2x - x^2/2 + \dots \quad \text{et} \quad y = x^2/2 + \dots$$

En d'autres termes, f est réductible dans $\mathcal{Q}((x))[y]$.

En utilisant la même méthode, on peut montrer que la conclusion du théorème de Runge reste vraie sans l'hypothèse sur les points entiers. De manière précise nous avons le

THÉOREME 2. Soient K un corps de nombres, $f(x, y) \in K[x, y]$ un polynôme irréductible sur K . On suppose que la courbe d'équation $f(x, y) = 0$ est rationnelle sur K paramétrée en coordonnées homogènes par

$$x = G_1(s, t), \quad y = G_2(s, t), \quad z = G_0(s, t),$$

où G_0, G_1, G_2 sont des polynômes vérifiant les conditions du lemme 2.

Si $G_0(s, t)$ est puissance d'un polynôme irréductible sur K , alors les développements de Newton-Puiseux à l'infini de la fonction algébrique $y(x)$ (et $x(y)$) forment un "seul système de conjugués".

References

[1] E. Maillet, Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coefficients entiers, C. R. Acad. Sci. Paris 168 (4) (1918), 217-220.
 [2] - Détermination des points entiers des courbes algébriques unicursales à coefficients entiers, Journal de l'Ecole Polytechnique 2, 20 (1919), 115-156.
 [3] L. J. Mordell, Diophantine Equations, Academic Press, 1969.
 [4] T. Nagell, Introduction to Number Theory, Chelsea Publishing Company, 1964.
 [5] C. Runge, Über ganzzahlige Lösungen von Gleichungen zwischen zwei Veränderlichen, J. Reine Angew. Math. 100 (1887), 425-435.
 [6] A. Schinzel, An improvement of Runge's theorem on diophantine equations, Comment. Pontificia Acad. Scient. 2, 20 (1969).
 [7] C. L. Siegel, Über einige Anwendungen Diophantischen Approximationen, Abh. Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. (1929), Nr 1.
 [8] Th. Skolem, Diophantische Gleichungen, Chelsea Publishing Company, 1950.
 [9] R. J. Walker, Algebraic Curves, Princeton 1950.

U.S.T.H.B
 DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
 Dar El Beida
 Alger
 Algérie

Reçu le 20.3.1990
 Révisé le 9.7.1990

(2019)