ACTA ARITHMETICA
LVII (1991)

Matrizen mit einem über Q irreduziblen charakteristischen Polynom und die Dimension des Vektorraums der Spitzenformen zur Modulgruppe n-ten Grades und Stufe $q > 2$

von

PETRA PLOCH (Freiburg i. Br.)

1. Problemstellung. Ein sehr wichtiges ungelöstes Problem aus der Theorie der Siegelschen Modulformen ist die Berechnung der Dimension des Vektorraums der Spitzenformen zur Modulgruppe n-ten Grades und Stufe q, $\Gamma(n, q)$. Nach [3] wird diese gegeben durch

(1) $$\sigma(\Gamma(n, q), g) = \eta(n, g) \int_{\mathfrak{F}} \sum_{M \in \Gamma(n,q)} R(M, Z) dw_Z.$$

Hierbei bezeichnet g das Gewicht der Spitzenformen, wobei man aus Konvergenzgründen $g > 2n$ voraussetzt, $\mathfrak{F}$ ist ein Fundamentalbereich von $\Gamma(n, q)$ in der Siegelschen oberen Halbebene n-ten Grades $\mathfrak{Z}(n)$, $\eta(n, g)$ wurde in [3] (19) definiert und $dw_Z := dX\,dY(\det Y)^{-n-1}$ ist das invariante symplektische Volumenelement, wobei dX bzw. dY die euklidischen Volumenelemente bezeichnen. Für $M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \Gamma(n, q)$ mit $n \times n$ Matrizen A, B, C und D, sowie für $Z \in \mathfrak{Z}(n)$, setzt man weiter:

$$M\langle Z\rangle := (AZ+B)(CZ+D)^{-1}, \quad M\{Z\} := CZ+D$$

und

(2) $$R(M, Z) := \det(-\bar{Z}+M\langle Z\rangle)^{-g}\det(M\{Z\})^{-g}(\det Y)^{g}.$$

Die Benutzung der Selbergschen Spurformel, die in [14] beschrieben wird, ist eine Möglichkeit, dieses Integral zu berechnen. Hierbei zerlegt man zunächst $\Gamma(n, q)$ in endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen und betrachtet dann die Einzelintegrale. Diese Teilmengen hängen mit den Konjugationsklassen und diese wiederum mit den charakteristischen Polynomen der betrachteten Matrizen zusammen. Man vermutet, daß Matrizen mit einem charakteristischen Polynom $\chi(M, x) \neq (x-1)^{2n}$ keinen Beitrag zum Dimensionsintegral liefern. In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden:

THEOREM. *Es sei* $q > 2$. *Setzt man*

$$K := \{M \in \Gamma(n, q) \mid \text{das charakteristische Polynom von } M \text{ ist irreduzibel über } Q\}$$

und

$$k := \int_{\mathfrak{F}} \sum_{M \in K} R(M, Z) dw_Z,$$

so gilt $k = 0$.

Im allgemeinen ist bei der Berechnung der Einzelintegrale, mit Hilfe der Selbergschen Spurformel, die Vertauschung von Summation und Integration problematisch. Arbeiten, die sich mit diesen Schwierigkeiten beschäftigen, sind in Vorbereitung. Die hier entwickelte Klassifikation der Matrizen wird auch für die anderen Fälle benötigt.

2. Bezeichnungen und grundlegende Bemerkungen. Die symplektische Gruppe n-ten Grades $\Sigma(n)$ besteht aus allen reellen $2n \times 2n$ Matrizen M mit $M' I_n M = I_n$. Hierbei bezeichnet M' die Transponierte von M und I_n ist die symplektische Einheitsmatrix, d.h. $I_n := \begin{bmatrix} O_n & E_n \\ -E_n & O_n \end{bmatrix}$, wobei E_n bzw. O_n die $n \times n$ Einheits- bzw. Nullmatrix ist. Weiter besteht die Siegelsche Modulgruppe n-ten Grades $\Gamma(n)$ aus allen symplektischen Matrizen mit ganzzahligen Koeffizienten und für $q \in N$ wird durch $\Gamma(n, q) := \{M \in \Gamma(n) \mid M \equiv E_{2n} \bmod q\}$ die Hauptkongruenzgruppe q-ter Stufe von $\Gamma(n)$ definiert.

Für $i \in N$ mit $1 \leqslant i \leqslant n$ besteht die i-te Spitzengruppe $\Sigma_i(n)$ aus allen $M \in \Sigma(n)$ der Gestalt

$$M = \begin{bmatrix} A & O & B & * \\ * & P' & * & * \\ C & O & D & * \\ O & O & O & P^{-1} \end{bmatrix}$$

mit $(n-i) \times (n-i)$ Matrizen A, B, C und D, sowie einer $i \times i$ Matrix P. Analog definiert man $\Gamma_i(n)$ und $\Gamma_i(n, q)$.

Es sei $n = n_1 + \ldots + n_r$ mit $n_i \in N$ $(i = 1, \ldots, r)$. $\Sigma(n_1, \ldots, n_r)$ besteht aus allen Matrizen

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} =: \{M_1, \ldots, M_r\} \in \Sigma(n)$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_r \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} B_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & B_r \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} C_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & C_r \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} D_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & D_r \end{bmatrix}$$

und

$$M_i := \begin{bmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{bmatrix} \in \Sigma(n_i) \qquad (i = 1, \ldots, r).$$

Es sei R eine Untergruppe von $\Sigma(n)$. $Z \in \mathfrak{Z}(n)$ heißt ein *elliptischer Fixpunkt* von R, wenn es ein $M \in R\backslash\{\pm E_{2n}\}$ mit $M\langle Z\rangle = Z$ gibt. [4] kann man entnehmen, daß $\Gamma(n, q)$ für $q > 2$ keine elliptischen Fixpunkte besitzt.

Es sei R eine Untergruppe von $\Sigma(n)$. M, $N \in R$ heißen *konjugiert* in R, falls es ein $L \in R$ mit $M = L^{-1}NL$ gibt. Die Menge

$$\{M\}_R := \{M_i \in R \mid \text{es gibt ein } L \in R \text{ mit } LM_iL^{-1} = M\}$$

heißt die *Konjugationsklasse* von M in R. Das charakteristische Polynom einer Matrix ist invariant unter Konjugation.

3. Beweis des Theorems. Zunächst überlegt man sich, welche charakteristischen Polynome für eine Matrix $M \in \Gamma(n, q)$ mit $q > 2$ möglich sind. Durch elementare Überlegungen kann man aus [1] folgern:

LEMMA 1. *Es sei $M \in \Gamma(n, q)$ mit $q > 2$. Dann zerfällt das charakteristische Polynom von M, $\chi(M, x)$, über $\boldsymbol{C}$, in der folgenden Weise:*

$$\chi(M, x) = (x-1)^e p_1^{s_1}(x)\ldots p_k^{s_k}(x) v_1^{t_1}(x)\ldots v_m^{t_m}(x) w_1^{r_1}(x)\ldots w_j^{r_j}(x) \tag{3}$$

mit

$e \equiv 0 \bmod 2$,
$p_i(x) = (x-b)(x-b^{-1}), \quad b \in \boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q} \ (i = 1, \ldots, k)$,
$v_i(x) = (x-a)(x-\bar{a}), \ a \notin \boldsymbol{R}, \ a\bar{a} = 1 \ (i = 1, \ldots, m)$,
$w_i(x) = (x-g)(x-\bar{g})(x-g^{-1})(x-\bar{g}^{-1}), \ g \notin \boldsymbol{R}, \ g\bar{g} \neq 1 \ (i = 1, \ldots, j)$.
Haben alle Eigenwerte von M den Absolutbetrag 1, *dann gilt*

$$\chi(M, x) = (x-1)^{2n}.$$

Da in der vorliegenden Arbeit nur Matrizen betrachtet werden, bei denen $\chi(M, x)$ irreduzibel über $\boldsymbol{Q}$ ist, muß $e = 0$ sein. Mit Lemma 1 folgt hieraus, daß das charakteristische Polynom einen Faktor $(x-b)(x-b^{-1})$ mit $b \in \boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q}$ oder einen Faktor $(x-g)(x-\bar{g})(x-g^{-1})(x-\bar{g}^{-1})$ mit $g \notin \boldsymbol{R}$ und $g\bar{g} \neq 1$ enthält.

Man setzt:

$$K_j := \{M \in K \mid \chi(M, x) = (x-b)^j(x-b^{-1})^j g(x) \text{ mit } b \in \boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q} \text{ und } (x-b)\nmid g(x) \text{ und ist } \chi(M, x) = (x-\underline{b})^{\underline{j}}(x-\underline{b}^{-1})^{\underline{j}}\underline{g}(x) \text{ mit } \underline{b} \in \boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Q} \text{ und } (x-\underline{b})\nmid \underline{g}(x), \text{ dann gilt } \underline{j} \geqslant j\} \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{4}$$

$$(5)\quad R_j := \{M \in K \setminus \bigcup_{j=1}^{n} K_j \mid \chi(M, x) = (x-v)^j(x-\bar v)^j(x-v^{-1})^j(x-\bar v^{-1})^j g(x) \text{ mit } v \notin \mathbf{R},\ v\bar v \neq 1 \text{ und } (x-v) \nmid g(x) \text{ und ist } \chi(M, x) = (x-\underline{v})^{\underline{j}}(x-\underline{\bar v})^{\underline{j}}(x-\underline{v}^{-1})^{\underline{j}}(x-\underline{\bar v}^{-1})^{\underline{j}}\underline{g}(x) \text{ mit } \underline{v} \notin \mathbf{R},\ \underline{v}\underline{\bar v} \neq 1 \text{ und } (x-\underline{v}) \nmid \underline{g}(x), \text{ dann gilt } \underline{j} \geqslant j\} \quad (j = 1, \ldots, [n/2]).$$

Nach Lemma 1 ist

$$\bigcup_{j=1}^{n} K_j \cup \bigcup_{j=1}^{[n/2]} R_j$$

eine disjunkte Zerlegung von K. Trivialerweise ist jede Menge K_j $(j = 1, \ldots, n)$ und R_j $(j = 1, \ldots, [n/2])$ invariant unter Konjugation.

Man zeigt jetzt, daß

$$(6)\qquad k_j := \int_{\mathfrak{F}} \sum_{M \in K_j} R(M, Z)\, dw_Z \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

und

$$(7)\qquad r_j := \int_{\mathfrak{F}} \sum_{M \in R_j} R(M, Z)\, dw_Z \qquad (j = 1, \ldots, [n/2])$$

verschwinden.

Will man diese Integrale mit Hilfe der Selbergschen Spurformel auswerten, so muß man zunächst Summation und Integration vertauschen. Hierzu sind einige Vorüberlegungen erforderlich.

Ist $\mathfrak{F}$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma(n, q)$ in $\mathfrak{Z}(n)$, dann gibt es $N_1, \ldots, N_p \in \Gamma(n)$ mit

$$\mathfrak{F} = \bigcup_{r=1}^{p} N_r\langle \mathfrak{F}_1 \rangle,$$

wobei $\mathfrak{F}_1$ ein Fundamentalbereich von $\Gamma(n)$ in $\mathfrak{Z}(n)$ ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} k_j &= \sum_{r=1}^{p} \int_{N_r\langle \mathfrak{F}_1 \rangle} \sum_{M \in K_j} R(M, Z)\, dw_Z \\ &= \sum_{r=1}^{p} \int_{\mathfrak{F}_1} \sum_{M \in K_j} R(M, N_r\langle Z \rangle)\, dw_Z \\ &= \sum_{r=1}^{p} \int_{\mathfrak{F}_1} \sum_{M \in K_j} R(N_r^{-1} M N_r, Z)\, dw_Z. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\chi(N_r^{-1} M N_r, x) = \chi(M, x).$$

Da $\Gamma(n, q)$ ein Normalteiler von $\Gamma(n)$ ist, gilt weiter

$$N_r^{-1} M N_r \in \Gamma(n, q).$$

Damit erhält man

$$k_j = p \int_{\mathfrak{F}_1} \sum_{M \in K_j} R(M, Z) dw_Z.$$

Da dieselben Überlegungen für r_j gelten, kann man im folgenden, in den Integralen (6) und (7), $\mathfrak{F}$ als einen Fundamentalbereich von $\Gamma(n)$ annehmen. Benötigt man also bei der Vertauschung von Summation und Integration konvergenzerzeugende Faktoren, so kann man sich auf die Spitze bei Unendlich beschränken.

Über die Vertauschbarkeit von Summation und Integration kann man folgendes aussagen. Es sei $\mathfrak{X}$ die Menge der reellen symmetrischen $n \times n$ Matrizen $X = (x_{ij})$ mit $|x_{ij}| \leqslant 1/2$ und $t \subset \Gamma(n)$. Dann setze man

Nach [7] gilt

$$T(t, g, Y) \prec y_1^{a_1} \dots y_n^{a_n}.$$

Hierbei bedeutet die Schreibweise $f(x) \prec g(x)$, daß es eine positive Konstante c gibt mit $f(x) \leqslant cg(x)$ für alle $x \in D$, dem Bereich in dem $f(x)$ und $g(x)$ definiert sind. Weiter bezeichnen $y_1, \dots, y_n$ die Diagonalelemente von Y und es gilt

$$a_r + \dots + a_n \leqslant r + \dots + n \qquad (r = 1, \dots, n).$$

Nach [8] kann man Summation und Integration vertauschen, wenn

$$a_r + \dots + a_n < r + \dots + n \qquad (r = 1, \dots, n)$$

gilt. Will man dies nachprüfen, so muß man untersuchen, ob es Elemente in einer Spitzengruppe gibt, denn aus

$$t \cap \Gamma_{n-k+1}(n) = \emptyset$$

folgt

$$a_k + \dots + a_n < k + \dots + n.$$

Ob es Elemente in einer Spitzengruppe gibt, kann man aus dem charakteristischen Polynom ablesen. Nach [10] kann man entnehmen, daß es, abgesehen von den Faktoren $(x-a)(x-\bar{a})$ mit $a \notin \boldsymbol{R}$ und $a\bar{a} = 1$, genau dann eine zu M $\Gamma(n)$-konjugierte Matrix in $\Gamma_k(n)$ gibt, wenn das charakteristische Polynom von M über $\boldsymbol{Q}$ in der Gestalt

$$\chi(M, x) = f(x) h(x) h^*(x)$$

mit

$$\operatorname{grad} f(x) = 2(n-k)$$

aufspaltet, also reduzibel über Q ist.

Da alle Matrizen aus K_j $(j = 1, \ldots, n)$ bzw. R_j $(j = 1, \ldots, [n/2])$ ein über Q irreduzibles charakteristisches Polynom besitzen, folgt aus diesen Überlegungen:

LEMMA 2. *In* (6) *und* (7) *ist die Vertauschung von Summation und Integration möglich.*

Jetzt wendet man die Selbergsche Spurformel an und man hat zu zeigen, daß folgende Ausdrücke verschwinden:

$$k'_j = \sum_{\{K_j\}} \int_{\mathfrak{F}_M} R(M, Z) dw_Z \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{8}$$

$$r'_j = \sum_{\{R_j\}} \int_{\mathfrak{F}_M} R(M, Z) dw_Z \qquad (j = 1, \ldots, [n/2]). \tag{9}$$

Die Konjugationsklassen $\{K_j\}$ und $\{R_j\}$ sind bezüglich $\Gamma(n)$ zu nehmen und $\mathfrak{F}_M$ ist ein Fundamentalbereich der diskontinuierlichen Gruppe der Matrizen aus $\Gamma(n)$, die mit M kommutieren. Man konjugiert jetzt die Matrizen aus K_j und aus R_j mit reellen symplektischen Matrizen auf eine möglichst einfache Gestalt. In (8) bzw. (9) ist dann $\mathfrak{F}_M$ ein Fundamentalbereich der Gruppe der Matrizen, die mit den bereits konjugierten Matrizen vertauschbar sind.

Es sei jetzt $M \in K_j$. Dann gilt:

$$\chi(M, x) = f_1(x) f_2(x)$$

mit

$$f_1(x) = g(x), \qquad f_2(x) = (x-b)^j (x-b^{-1})^j.$$

Die Faktoren $f_1(x)$ und $f_2(x)$ sind hierbei jeweils involutorisch und prim zueinander. Nach der Reduktionstheorie [1] gibt es eine $\Sigma(n)$-konjugierte Matrix

$$M = \{M_1, M_2\} \in \Sigma(n-j, j)$$

mit

$$\chi(M_i, x) = f_i(x) \qquad (i = 1, 2).$$

M_1 und M_2 können jetzt getrennt reduziert werden. Weiter kann man [1] entnehmen, daß es eine zu M_2 $\Sigma(j)$-konjugierte Matrix

$$M_2 = \begin{bmatrix} V' & O_j \\ O_j & V^{-1} \end{bmatrix},$$

mit $\chi(V, x) = (x-b)^j$ gibt. Bekanntlich gibt es eine nichtsinguläre Matrix S mit

$$S^{-1}VS = \begin{bmatrix} b & * & 0 \\ & \ddots & * \\ 0 & & b \end{bmatrix}.$$

Konjugiert man M_2 mit

$$R_2 := \begin{bmatrix} S' & O_j \\ O_j & S^{-1} \end{bmatrix} \in \Sigma(j),$$

so erhält man aus jeder Konjugationsklasse eine Matrix in einer einfachen Gestalt. Wendet man analoge Überlegungen auf die Matrizen $M \in R_j$ an, so hat man damit insgesamt gezeigt:

LEMMA 3: *Jede Matrix $M \in K_j$ ($j = 1, \ldots, n$) besitzt eine $\Sigma(n)$-konjugierte Matrix der Gestalt*

$$M = \{M_1, M_2\} \in \Sigma(n-j, j) \tag{10}$$

mit

$$\chi(M_1, x) = g(x), \qquad M_2 = \begin{bmatrix} V' & O_j \\ O_j & V^{-1} \end{bmatrix}$$

und

$$V = \begin{bmatrix} b & * & 0 \\ & \ddots & * \\ 0 & & b \end{bmatrix}.$$

Für die Matrizen $M \in R_j$ ($j = 1, \ldots, [n/2]$) gibt es stets eine $\Sigma(n)$-konjugierte Matrix der Gestalt

$$M = \{M_1, M_2\} \in \Sigma(n-2j, 2j) \tag{11}$$

mit

$$\chi(M_1, x) = g(x), \qquad M_2 = \begin{bmatrix} V' & O_{2j} \\ O_{2j} & V^{-1} \end{bmatrix}$$

und

$$\chi(V, x) = (x-v)^j(x-\bar{v})^j.$$

Jetzt muß man für die Matrizen $M \in K_j$ ($j = 1, \ldots, n$) bzw. $M \in R_j$ ($j = 1, \ldots, [n/2]$) der Gestalt (10) bzw. (11) die Gruppe der Matrizen N bestimmen, die mit M vertauschen. Nach [1] erhält man für $M \in K_j$, $N = \{N_1, N_2\} \in \Sigma(n-j, j)$ und für $M \in R_j$, $N = \{N_1, N_2\} \in \Sigma(n-2j, 2j)$, wobei jeweils

$N_i M_i = M_i N_i$ $(i = 1, 2)$ gilt. Es sei jetzt N_1 mit M_1 vertauschbar. Macht man für N_2 den Ansatz

$$N_2 = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

mit $j \times j$ bzw. $2j \times 2j$ Matrizen A, B, C und D, so erhält man durch einen Koeffizientenvergleich

$$N_2 = \begin{bmatrix} T' & O \\ O & T^{-1} \end{bmatrix}\cdot$$

mit $TV = VT$.

Einen Fundamentalbereich bezüglich der diskontinuierlichen Gruppe der T kann man im Y-Raum festlegen. Damit erhält man:

LEMMA 4. *Es sei*

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_3 \\ Z_3' & Z_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{Z}(n)$$

mit einer $j \times j$ *Matrix* Z_2 *im Fall* $M \in K_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ *und einer* $2j \times 2j$ *Matrix* Z_2 *im Fall* $M \in R_j$ $(j = 1, \ldots, [n/2])$. *Weiter sei*

$$Z_k := X_k + iY_k \qquad (k = 1, 2, 3).$$

Dann gibt es für die Gruppe der Matrizen, die mit M *vertauschen, einen Fundamentalbereich, in dem* X_2 *keinen Einschränkungen unterliegt.*

Jetzt betrachtet man k_j' $(j = 1, \ldots, n)$ aus (8). Nach Lemma 4 gibt es für die Gruppe der Matrizen, die mit $M \in K_j$, in der Gestalt (10), vertauschen, einen Fundamentalbereich, in dem x_{nn} frei variabel bleibt. Hierbei wurde

$$X_2 = (x_{pq})_{p,q=n-j+1}^{n}$$

gesetzt. k_j' verschwindet also, wenn

$$\underline{k}_j := \int_{-\infty}^{+\infty} R(M, Z)\, dx_{nn} \qquad (j = 1, \ldots, n) \tag{12}$$

verschwindet. Wie man leicht nachrechnen kann, gilt

$$R(M, Z) = a_1 \det \begin{bmatrix} * & \ldots & * & & * \\ \vdots & & & & \\ * & \ldots & * & & a_2 + (b^2 - 1)x_{nn} \end{bmatrix}^{-g}$$

wobei a_1, a_2 und die mit $*$ gekennzeichneten Ausdrücke nicht von x_{nn} abhängen. Es genügt also zu zeigen, daß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s_1 (s_2 x_{nn} + s_3)^{-g}\, dx_{nn}$$

verschwindet. Hierbei hängen s_1, s_2 und s_3 von den anderen Parametern x_{pq} und y_{pq} ab, nicht jedoch von x_{nn}. Da $g > 2n$ ist, verschwindet das obige Integral und damit ist gezeigt, daß die Matrizen aus K_j ($j = 1, \ldots, n$) keinen Beitrag zum Dimensionsintegral liefern.

Abschließend muß noch gezeigt werden, daß r'_j ($j = 1, \ldots, [n/2]$) aus (9) verschwindet. Nach Lemma 4 ist dies der Fall, wenn

$$(13) \qquad \underline{r}_j := \int_{X_2} R(M, Z)\,dX_2 \qquad (j = 1, \ldots, [n/2])$$

verschwindet. Hier ergibt sich durch eine elementare Rechnung

$$R(M, Z) = s_1 \det \begin{bmatrix} * & * \\ * & X_2[V] - X_2 + S_2 \end{bmatrix}^{-g},$$

wobei s_1, S_2 und die mit $*$ gekennzeichneten Ausdrücke wieder von den anderen Parametern X_i und Y_i und nicht von X_2 abhängen. Außerdem wurde

$$X_2[V] := V' X_2 V$$

gesetzt. Da

$$X_2 \to X_2[V] - X_2$$

eine Bijektion des $\mathbf{R}^{j(2j+1)}$ auf sich ist, verschwindet das obige Integral und damit liefern auch die Matrizen aus R_j ($j = 1, \ldots, [n/2]$) keinen Beitrag zum Dimensionsintegral.

Das Theorem ist hiermit bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] U. Christian, *A reduction theory for symplectic matrices*, Math. Z. 101 (1967), 213–244.
[2] – *Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$*, J. Reine Angew. Math. 277 (1975), 130–154.
[3] – *Siegelsche Modulformen und Integralgleichungen*, Math. Z. 101 (1967), 299–305.
[4] – *Siegelsche Modulfunktionen*, Vorlesungsausarbeitung, Math. Inst. d. Univ. Göttingen, 1974/75.
[5] – *Über die Anzahl der Spitzen Siegelscher Modulgruppen*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 32 (1968), 55–60.
[6] – *Über elliptische Fixpunkte symplektischer Matrizen*, Monatsh. Math. 72 (1968), 289–295.
[7] – *Untersuchung einer Poincaréschen Reihe I*, J. Reine Angew. Math. 233 (1968), 37–88.
[8] – *Untersuchung einer Poincaréschen Reihe II*, ibid. 237 (1969), 12–25.
[9] – *Zur Berechnung des Ranges der Schar der Spitzenformen zur Modulgruppe zweiten Grades und Stufe $q > 2$*, ibid. 296 (1977), 108–118.
[10] – *Zur Theorie der symplektischen Gruppen*, Acta Arith. 24 (1973), 61–85.
[11] K. Hashimoto, *The dimension of the space of cusp forms on Siegel upper half plane of degree two I*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I A, 30 (1983), 403–488.
[12] – *The dimension of the space of cusp forms on Siegel upper half plane of degree two II: The Q-rank one case*, Math. Ann. 266 (1984), 539–559.

[13] Y. Morita, *An explicit formula for the dimension of spaces of Siegel modular forms of degree II*, J. Fac. Soc. Univ. Tokyo 21 (1944), 167–248.

[14] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. 20 (1956), 47–87.

[15] R. Tsushima, *A formula for the dimension of spaces of Siegel cusp forms of degree three*, Amer. J. Math. 102 (1980), 937–977.

[16] – *On the spaces of Siegel cusp forms of degree two*, ibid. 104 (1982), 843–885.

MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT FREIBURG
Albertstr. 23 b
D-7800 Freiburg i. Br., Germany

Eingegangen am 8.5.1989
und in revidierter Form am 14.11.1989 (1936)