ACTA ARITHMETICA
LVII (1991)

Généralisation des suites de Pisot et de Boyd

par

M. J. BERTIN (Paris)

Introduction. En 1938, Pisot [4] étudiait certaines suites $E(a_0, a_1)$ d'entiers positifs (a_n) définies à partir des entiers a_0 et a_1 par la condition:

$$(*) \qquad -1/2 < a_{n+1} - a_n^2/a_{n-1} \leqslant 1/2, \quad n \geqslant 1.$$

Il montrait directement, pour tout couple (a_0, a_1) vérifiant $0 < a_0 \leqslant a_1$, l'existence de la limite $\theta \geqslant 1$ telle que $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}/a_n) = \theta$.

Il déduisait également de théorèmes de convergence, établis dans la première partie de sa thèse, pour tout couple (a_0, a_1) vérifiant $a_1 > a_0 + \frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{2}a_0}$, l'existence de $\theta > 1$ et $\lambda > 0$ tels que

$$\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}/a_n) = \theta \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}(a_n^{n+1}/a_{n+1}^n) = \lambda.$$

L'ensemble des nombres θ ainsi produits est un ensemble dénombrable E contenant l'ensemble S des nombres de Pisot et l'ensemble T des nombres de Salem.

En 1979, Boyd [3] généralisait les E-suites de Pisot en introduisant les F-suites de Boyd $F(a_0, a_1, a_2)$ d'entiers positifs (a_n) définies à partir des entiers a_0, a_1 et a_2 par la condition:

$$-\frac{1}{2} < a_{n+2} + a_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}(a_{n+1} + a_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2}, \quad n \geqslant 1.$$

Il montrait directement, sous certaines conditions initiales portant sur a_0, a_1, a_2, l'existence de $\theta > 1$ tel que $\lim_{n\to+\infty}(a_{n+1}/a_n) = \theta$. L'ensemble F de ces nombres θ contient également les ensembles S et T.

Nous proposons ici de généraliser les suites $E(a_0, a_1)$ et de définir les $E(2)$-suites $E(a_0, a_1, a_2, a_3)$ à partir des entiers positifs a_0, a_1, a_2, a_3 par une condition généralisant la condition $(*)$.

Nous associerons à certaines de ces suites dites "convergentes" "réelles", un ensemble $E(2)$ de couples de nombres réels supérieurs à 1 et nous montrerons que l'ensemble $E(2)$ contient les couples (α_1, α_2) d'entiers algébriques réels supérieurs à 1 dont les autres conjugués ont un module inférieur ou égal à 1. Enfin, après avoir amélioré le théorème de convergence dû à Pisot [4], nous déduirons des conditions suffisantes de “convergence” “réelle” portant sur les entiers a_0, a_1, a_2 et a_3.

1. Définition des $E(2)$-suites. Exemples. Si $(a_n)_{n\geq 0}$ désigne une suite de nombres réels et k un entier, $k \geq 1$, on note $D^k(a_n)$ le déterminant de Hankel d'ordre k de la suite

$$D^k(a_n) = D^k(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+k-1} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+k-1} & a_{n+k} & \cdots & a_{n+2k-2} \end{vmatrix}.$$

Plus généralement, pour $0 \leq i \leq k$, on note $D^k(a_n, a_{n+1}, \ldots, \hat{a}_{n+i}, \ldots, a_{n+k})$ le déterminant

$$D^k(a_n, a_{n+1}, \ldots, \hat{a}_{n+i}, \ldots, a_{n+k})$$
$$= \begin{vmatrix} a_n & a_{n+1} & \cdots & a_{n+i-1} & a_{n+i+1} & & a_{n+k} \\ a_{n+1} & a_{n+2} & \cdots & a_{n+i} & a_{n+i+2} & & a_{n+k+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+k-1} & a_{n+k} & \cdots & a_{n+k-1+i-1} & a_{n+k-1+i+1} & \cdots & a_{n+2k-1} \end{vmatrix}.$$

Les résultats de Pisot [4], Boyd [3] et Bertin [1], [2] suggèrent les définitions suivantes.

Définition 1.1. Soit k un entier, $k \geq 1$. On appelle *$E(k)$-suite* une suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 0}$, notée $E(a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1})$, définie à partir des entiers $a_0, \ldots, a_{2k-1}$, par les inégalités:

$$-1/2 < D^{k+1}(a_n)/D^k(a_n) \leq 1/2, \quad n \geq 0.$$

Définition 1.2. Une $E(k)$-suite est dite *convergente* si les conditions suivantes sont réalisées:

(i) pour tout $0 \leq i \leq k-1$, on a:

$$\lim_{n\to+\infty} [D^k(a_n, \ldots, \hat{a}_{n+i}, \ldots, a_{n+k})/D^k(a_n)] = \lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,k-i} = \sigma_{k-i};$$

(ii) l'équation $X^k - \sigma_1 X^{k-1} + \sigma_2 X^{k-2} + \ldots + (-1)^k \sigma_k = 0$ possède toutes ses racines de module supérieur à 1.

Définition 1.3. Si $k = 2$, une $E(2)$-suite convergente est dite *réelle* si les racines de l'équation $X^2 - \sigma_1 X + \sigma_2 = 0$ sont réelles.

Avant de donner des exemples de $E(2)$-suites “convergentes” nous allons établir un théorème préliminaire.

Théorème 1.1. *Soit $(\lambda, \alpha, \mu, \beta)$ un quadruplet de nombres réels vérifiant $\lambda \neq 0$, $\mu \neq 0$, $|\alpha| > 1$, $|\beta| > 1$, $\lambda\alpha^n + \mu\beta^n = u_n + \varepsilon_n$, $u_n \in \mathbf{Z}$, $-1/2 < |\varepsilon_n| \leq 1/2$, pour* *lequel il existe un rang n_0 tel que:*

$$\sup_{n \geqslant n_0} |\varepsilon_n| < \frac{1}{2(|\alpha|+1)^2(|\beta|+1)^2}. \tag{1.1}$$

Alors, la suite (u_n) vérifiant pour $n \geqslant n_1 \geqslant n_0$,

$$\left|\frac{D^3(u_n)}{D^2(u_n)}\right| < \frac{1}{2},$$

est une $E(2)$-suite de Pisot.

Preuve. Soit L l'opérateur différence de polynôme minimal $(x-\alpha)(x-\beta)$. En l'appliquant successivement à la dernière colonne puis à la dernière ligne du déterminant $D^3(u_n)$ et en développant par rapport à la dernière ligne, on obtient:

$$D^3(u_n) = \big(L^2(u_n)\big)D^2(u_n) + O(u_n).$$

Or, $D^2(u_n) = \lambda\mu(\alpha\beta)^n(\alpha-\beta)^2 + o\big((\alpha\beta)^n\big)$; par suite, $u_n = o\big(D^2(u_n)\big)$ et l'on obtient immédiatement

$$\limsup |D^3(u_n)/D^2(u_n)| = \limsup |L^2(\varepsilon_n)|,$$

d'où le résultat grâce à (1.1).

Remarque. En écrivant $D^3(u_n)/D^2(u_n)$ sous la forme $D^3(u_n)/D^2(u_n) = u_{n+4} - u_{n+3}\sigma_{n,1} + u_{n+2}\sigma_{n,2}$, il résulte du théorème précédent que l'ensemble des quadruplets $(\lambda, \alpha, \mu, \beta)$ vérifiant les hypothèses du théorème 1.1 est dénombrable. On retrouve ainsi un résultat dû à Pisot ([4], p. 227).

Théorème 1.2. (Exemples de $E(2)$-suites "convergentes".) *Soit α et β deux nombres réels, uniques racines extérieures au cercle unité d'un polynôme unitaire à coefficients entiers. Alors il existe des nombres réels non nuls λ et μ tels que la suite (u_n), où u_n désigne l'entier le plus proche de $\lambda\alpha^n + \mu\beta^n$, soit une $E(2)$-suite "convergente" vérifiant*

$$\lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,1} = \alpha+\beta \quad \textit{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \sigma_{n,2} = \alpha\beta.$$

Preuve. Supposons d'abord α et β conjugués et considérons $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ le corps de nombres réel de degré s, ayant la base réelle d'entiers $(\omega_j)_{1\leqslant j\leqslant s} = (\omega_j^{(1)})_{1\leqslant j\leqslant s}$, de bases conjuguées $(\omega_j^{(i)})_{1\leqslant j\leqslant s}$, $1 \leqslant i \leqslant s$. Soient Δ le discriminant de K, C_1 et δ des constantes positives vérifiant

$$0 < \delta < 1, \quad C_1\delta^{s-1} > \sqrt{|\Delta|}, \quad (s-2)\delta < \frac{1}{2(|\alpha|+1)^2(|\beta|+1)^2}.$$

D'après le théorème de Minkowski sur les formes linéaires, il existe des entiers non tous nuls $n_1, \ldots, n_s$ tels que l'entier algébrique $\lambda = n_1\omega_1 + \ldots + n_s\omega_s$

vérifie $|\lambda_1| < C_1$, $|\lambda_j| < \delta$, $2 \leqslant j \leqslant s$, où $\lambda_1 = \lambda, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ désignent les conjugués de λ.

En prenant $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \lambda_2$, $u_n = \mathrm{Tr}_{K/\boldsymbol{Q}}(\lambda\alpha^n)$ on obtient donc, pour tout $n \geqslant 0$:

$$|\lambda\alpha^n + \mu\beta^n - u_n| < (s-2)\delta < \frac{1}{2(|\alpha|+1)^2(|\beta|+1)^2}.$$

Le théorème 1.1 entraîne alors que pour $n \geqslant n_1$, la suite (u_n) soit une $E(2)$-suite. La "convergence" se déduit des égalités:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{D^2(u_n, \hat{u}_{n+1}, u_{n+2})}{D^2(u_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+3}u_n - u_{n+1}u_{n+2}}{u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2} = \alpha + \beta$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{D^2(\hat{u}_n, u_{n+1}, u_{n+2})}{D^2(u_n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+3}u_{n+1} - u_{n+2}^2}{u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2} = \alpha\beta.$$

Si α et β ne sont pas conjugués, on opère comme précédemment en considérant simultanément les deux corps de nombres réels $K_1 = \boldsymbol{Q}(\alpha)$ et $K_2 = \boldsymbol{Q}(\beta)$.

2. Un théorème de convergence. A partir d'une suite quelconque d'entiers $(a_n)_{n\geqslant 0}$, on définit la suite $\boldsymbol{b}_n = (a_n, \ldots, a_{n+h})$ de $h+1$-uples d'entiers, h étant un entier strictement positif. La suite $(\boldsymbol{b}_n)_{n\geqslant 0}$ peut être associée à une suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ de difféomorphismes de $\boldsymbol{R}^{h+1}$ ayant les Φ_n pour difféomorphismes réciproques. L'espace $\boldsymbol{R}^{h+1}$ est muni de la norme sup. Si $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_h)$ est un point de $\boldsymbol{R}^{h+1}$ et $\boldsymbol{c} = (c_0, \ldots, c_h)$ un $h+1$-uple de nombres réels positifs éventuellement infinis, on note $B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$ (resp. $\bar{B}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{c})$) le pavé ouvert (resp. fermé) de centre $\boldsymbol{x}$ de côté $2\boldsymbol{c}$.

Le théorème suivant établit des conditions suffisantes de convergence de la suite $\Phi_n(\boldsymbol{b}_n)$ vers l'élément β de $\boldsymbol{R}^{h+1}$. Il améliore légèrement un théorème dû à Pisot ([4], pp. 209–214). D'une part, les majorations (2.1.2) sont supposées seulement pour un sous-ensemble propre $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. On obtient alors la limite de certaines composantes du vecteur $\Phi_n(\boldsymbol{b}_n)$ sans qu'il soit nécessaire d'obtenir celle des autres composantes. Dans certains cas, cette généralisation est nécessaire, par exemple pour étudier les suites de Boyd mentionnées dans l'introduction, où $a_n = \lambda\alpha^n + \mu\alpha^{-n} + \varepsilon_n$, car le comportement asymptotique de a_n ne détermine pas le paramètre μ.

D'autre part, les difféomorphismes F_n sont définis sur des ouverts A_n vérifiant $A_{n-1} \subset A_n$, pour tout $n \geqslant 0$ et non sur le même ouvert A. Ceci permet d'utiliser une suite $\boldsymbol{b}_n$, avec $\boldsymbol{b}_n \in F_n(A_n)$. Enfin, la convergence a lieu dans la boule $\bar{B}_0$ et non dans le fermé $\bar{W} \subset A$. C'est précisément cette situation que nous allons rencontrer dans l'étude des $E(2)$-suites.

THÉORÈME 2.1. *Soit $(F_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ une suite de difféomorphismes de A_n dans $\boldsymbol{R}^{h+1}$, où A_n désigne un ouvert de $\boldsymbol{R}^{h+1}$. On suppose que les composantes $F_{n,j}$,*

$0 \leqslant j \leqslant h$, du difféomorphisme F_n vérifient les relations:

$$F_{n,j} = F_{n-1,j+1}, \quad 0 \leqslant j \leqslant h-1, \; n \geqslant 1, \tag{2.1.1}$$

et que l'on a les inclusions $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \geqslant 0$. On suppose également que les difféomorphismes Φ_n, réciproques des F_n, vérifient pour $j \in J$, J ensemble d'indices non vide, $J \subset \{0, 1, \ldots, h\}$, les inégalités:

$$|D_{h+1}\Phi_{n,j}(F_n(\alpha))| \leqslant \psi_{n,j}, \tag{2.1.2}$$

pour tout élément α de A_n, où $\psi_{n,j}$ désigne un nombre réel positif, tel que la série $\sum_{m=1}^{\infty} \psi_{m,j}$ converge.

On note pour $l \geqslant 0$, $\Psi_{l,j}$ la somme

$$\Psi_{l,j} = \sum_{m=l+1}^{+\infty} \psi_{m,j}, \quad et \quad \Psi_l = (\Psi_{l,j})_{0 \leqslant j \leqslant h}$$

l'élément de $(\boldsymbol{R}^+)^{h+1}$, où, par abus de notation, $\Psi_{l,j}$ est infini pour $j \notin J$. S'il existe, pour tout $n \geqslant 0$, un élément $\boldsymbol{b}_n$ de $F_n(A_n)$, à coordonnées entières, $\boldsymbol{b}_n = (a_n, \ldots, a_{n+h})$ vérifiant, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\|\boldsymbol{b}_n - F_n \circ \Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_{n-1})\| \leqslant \tfrac{1}{2} \quad et \quad [\boldsymbol{b}_n, \tilde{\boldsymbol{b}}_n] \subset F_n(A_n), \tag{2.1.3}$$
$$\tilde{\boldsymbol{b}}_n = F_n \circ \Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_{n-1}),$$

alors l'élément $\Phi_n(\boldsymbol{b}_n)$ appartient à $B_0 = B\big(\Phi_0(\boldsymbol{b}_0), \tfrac{1}{2}\Psi_0\big)$. ($B_{0,j} = \boldsymbol{R}$ pour $j \notin J$.)

En outre, pour tout $j \in J$, la suite de nombres réels $\big(\Phi_{n,j}(\boldsymbol{b}_n)\big)_n$ a pour limite β_j, élément de $\bar{B}_{0,j}$ vérifiant l'inégalité:

$$|\beta_j - \Phi_{0,j}(\boldsymbol{b}_0)| \leqslant \tfrac{1}{2}\Psi_{0,j}.$$

P r e u v e. Supposons définis les éléments $\boldsymbol{b}_m$ de $F_m(A_m)$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Puisque $\boldsymbol{b}_{n-1} \in F_{n-1}(A_{n-1})$, alors $\Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_{n-1}) \in A_{n-1} \subset A_n$. L'élément $\tilde{\boldsymbol{b}}_n = F_n \circ \Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_{n-1})$ vérifie alors:

$$\Phi_n(\tilde{\boldsymbol{b}}_n) = \Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_{n-1}). \tag{2.1.4}$$

Des égalités (2.1.1) et (2.1.4), on déduit:

$$\tilde{\boldsymbol{b}}_{n,j} = F_{n,j}[\Phi_n(\tilde{\boldsymbol{b}}_n)] = F_{n,j}[\Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_{n-1})] = F_{n-1,j+1}[\Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_{n-1})] = \boldsymbol{b}_{n-1,j+1},$$
$$0 \leqslant j \leqslant h-1.$$

Comme les composantes de $\boldsymbol{b}_{n-1} = (a_{n-1}, \ldots, a_{n-1+h})$ sont des entiers, il en est de même des h premières composantes de $\tilde{\boldsymbol{b}}_n$.

Pour réaliser (2.1.3), il suffit alors qu'il existe un entier a_{n+h} tel que $|a_{n+h} - \tilde{b}_{n,h}| \leqslant 1/2$. En effet, en posant $\boldsymbol{b}_n = (a_n, \ldots, a_{n-1+h}, a_{n+h})$, on aura:

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{b}_n - \tilde{\boldsymbol{b}}_n\| &= \|\boldsymbol{b}_n - F_n \circ \Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_{n-1})\| = |a_{n+h} - F_{n,h}[\Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_{n-1})]| \\ &= |a_{n+h} - \tilde{b}_{n,h}| \leqslant 1/2.\end{aligned}$$

Nous allons montrer que l'élément $\Phi_{n-1}(\boldsymbol{b}_n)$ ainsi défini appartient à

$$B_0 = B\left(\Phi_0(\boldsymbol{b}_0), \tfrac{1}{2}\Psi_0\right).$$

Supposons également vérifiées, pour $0 < m \leqslant n-1$, les inclusions:

$$B_m = B\left(\Phi_m(\boldsymbol{b}_m), \tfrac{1}{2}\Psi_m\right) \subset B_{m-1} \subset \ldots \subset B_0.$$

Puisque les éléments $\boldsymbol{b}_n$ et $\tilde{\boldsymbol{b}}_n$ de $F_n(A_n)$ ne diffèrent que par leur dernière composante, et grâce à l'inclusion $[\boldsymbol{b}_n, (\tilde{\boldsymbol{b}}_n)] \subset F_n(A_n)$, le théorème des accroissements finis permet d'écrire, pour $j \in J$:

(2.1.5) $$|\Phi_{n,j}(\boldsymbol{b}_n) - \Phi_{n,j}(\tilde{\boldsymbol{b}}_n)| \leqslant \|\boldsymbol{b}_n - \tilde{\boldsymbol{b}}_n\| \sup_{z \in [\boldsymbol{b}_n, \tilde{\boldsymbol{b}}_n]} |D_{h+1}\Phi_{n,j}(z)| \leqslant \tfrac{1}{2}\psi_{n,j}$$

d'après (2.1.2) et (2.1.3).

Soit alors $\boldsymbol{x} = (x_0, \ldots, x_h) \in B_n = B\left(\Phi_n(\boldsymbol{b}_n), \tfrac{1}{2}\Psi_n\right)$.

Pour $j \in J$, on a:

(2.1.6) $$|x_j - \Phi_{n,j}(\boldsymbol{b}_n)| < \tfrac{1}{2}\Psi_{n,j} = \tfrac{1}{2}\sum_{m=n+1}^{+\infty} \psi_{n,j}.$$

Les relations (2.1.5) et (2.1.6) entraînent alors:

$$|x_j - \Phi_{n-1,j}(\boldsymbol{b}_{n-1})| = |x_j - \Phi_{n,j}(\tilde{\boldsymbol{b}}_{n-1})| < \tfrac{1}{2}\Psi_{n-1,j}, \quad j \in J.$$

On en déduit alors l'inclusion:

$$B_n = B\left(\Phi_n(\boldsymbol{b}_n), \tfrac{1}{2}\Psi_n\right) \subset B_{n-1} = B\left(\Phi_{n-1,j}(\boldsymbol{b}_{n-1}), \tfrac{1}{2}\Psi_{n-1}\right),$$

puis:

$$B_n \subset B_{n-1} \subset \ldots \subset B_0.$$

Ecrivons maintenant (2.1.5) sous la forme:

(2.1.7) $$|\Phi_{n,j}(\boldsymbol{b}_n) - \Phi_{n-1,j}(\boldsymbol{b}_{n-1})| \leqslant \tfrac{1}{2}\psi_{n,j}.$$

Comme les séries $(\psi_{n,j})_{n\in N}$ sont convergentes pour $j \in J$, la suite $\left(\Phi_{n,j}(\boldsymbol{b}_n)\right)_{n\in N}$ est une suite de Cauchy de $B_{0,j}$, donc converge vers un nombre réel β_j de $\bar{B}_{0,j}$.

On déduit de (2.1.7) l'inégalité:

$$|\beta_j - \Phi_{0,j}(\boldsymbol{b}_0)| \leqslant \tfrac{1}{2}\Psi_{0,j}, \quad j \in J.$$

Ceci achève la démonstration.

3. "Convergence" des $E(2)$**-suites.** Le théorème 2.1 montre, qu'étant donné une $E(k)$-suite, on assurera sa "convergence", en imposant des conditions initiales, c'est-à-dire des relations entre les $a_0, a_1, \ldots, a_{2k-1}$. C'est l'objet du théorème suivant.

THÉORÈME 3.1. *Soit* $(a_n)_{n\geqslant 0}$ *une* $E(2)$*-suite définie à partir des entiers* a_0, a_1, a_2, a_3 *telle que* $a_0 > 0$, $a_1 > 0$, $\mathcal{A}_1 = a_2 a_0 - a_1^2 > 0$ *et telle que l'équation*

$X^2-\sigma_{0,1}X+\sigma_{0,2}=0$ possède deux racines réelles α_0 et β_0 supérieures à 1 et distinctes.

On note τ_0 la racine réelle positive de l'équation

$$x^3\mathscr{A}_1-(x+1)a_0=0.$$

On suppose vérifiées les inégalités:

$$\alpha_0>1+\tau_0+\frac{1}{2cK},\quad \beta_0>1+\tau_0+\frac{1}{2cK}, \tag{3.1.1}$$

$$0<c<\mathscr{A}_1/a_0,\ \text{très voisin de } \mathscr{A}_1/a_0,$$

$$2(1+\tau_0)a_0\geqslant a_1, \tag{3.1.2}$$

$$(1+\tau_0)^2-\sigma_{0,1}(1+\tau_0)+\sigma_{0,2}>\frac{a_0}{2\mathscr{A}_1K}(1+\tau_0)+\frac{a_1}{2\mathscr{A}_1K}, \tag{3.1.3}$$

$$\frac{a_1}{2\mathscr{A}_1K}<1, \tag{3.1.4}$$

$$\frac{a_0\mathscr{A}_2}{a_1\mathscr{A}_1}>1, \tag{3.1.5}$$

où $\mathscr{A}_2=D^2(a_1)=a_1a_3-a_2^2$ et $K=\tau_0^2/(1+2\tau_0)$. Alors les équations $X^2-\sigma_{n,1}X+\sigma_{n,2}=0$ possèdent leurs deux racines, réelles, supérieures à 1, α et β, distinctes. On a en outre,

$$\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=\alpha>1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty}\beta_n=\beta>1.$$

La $E(2)$-suite $E(a_0, a_1, a_2, a_3)$ est donc "convergente" "réelle".

De plus, l'ensemble des couples (α,β) ainsi obtenus est dense dans $(]1,+\infty[)^2$. Si l'on suppose en outre, $(\sigma_{0,1})^2-4\sigma_{0,2}>4\tau_0^2$, on a également $\alpha\neq\beta$.

(On rappelle que

$$\sigma_{n,1}=\frac{D^2(a_n,\hat{a}_{n+1},a_{n+2})}{D^2(a_n)}=\frac{a_{n+3}a_n-a_{n+1}a_{n+2}}{a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2},$$

$$\sigma_{n,2}=\frac{D^2(\hat{a}_n,a_{n+1},a_{n+2})}{D^2(a_n)}=\frac{\mathscr{A}_{n+2}}{\mathscr{A}_{n+1}},\qquad n\in \boldsymbol{N}.)$$

P r e u v e. Soient F_n les applications de $\boldsymbol{R}^4$ dans $\boldsymbol{R}^4$ définies par:

$$F_n\colon \boldsymbol{R}^4\to\boldsymbol{R}^4,$$

$$\gamma=(\lambda,\mu,\alpha,\beta)\mapsto(\lambda\alpha^n+\mu\beta^n,\ \lambda\alpha^{n+1}+\mu\beta^{n+1},\ \lambda\alpha^{n+2}+\mu\beta^{n+2},\ \lambda\alpha^{n+3}+\mu\beta^{n+3}).$$

Les F_n sont des difféomorphismes sur tout ouvert Ω_n où la matrice jacobienne de F_n, dont le déterminant d_n est un déterminant de Vandermonde généralisé, est inversible.

On a:

$$d_n = -\lambda\mu(\alpha\beta)^{2n}(\alpha-\beta)^4.$$

Par suite sur tout ouvert Ω_n sur lequel d_n est différent de 0, les F_n ont des difféomorphismes réciproques Φ_n définis par:

$$\Phi_n\colon F_n(\Omega_n)\to\Omega_n,$$

$$(x, y, z, t)\mapsto\left(\frac{x\beta_n-y}{\alpha_n^n(\beta_n-\alpha_n)}, \frac{x\alpha_n-y}{\beta_n^n(\alpha_n-\beta_n)}, \alpha_n, \beta_n\right)$$

où α_n et β_n sont racines de l'équation:

$$X^2-\frac{tx-yz}{xz-y^2}X+\frac{ty-z^2}{xz-y^2}=0.$$

On a en outre, pour $\gamma\in\Omega_n$:

$$D_4\Phi_{n,1}(F_n(\gamma)) = \frac{(n+2)\alpha-n\beta}{\alpha^{n+1}(\beta-\alpha)^3},$$

$$D_4\Phi_{n,3}(F_n(\gamma)) = \frac{1}{\lambda\alpha^n(\beta-\alpha)^2} = \frac{\mu\beta^n}{\lambda\mu(\alpha\beta)^n(\beta-\alpha)^2}.$$

Les formules donnant $D_4\Phi_{n,2}(F_n(\gamma))$ (resp. $D_4\Phi_{n,4}(F_n(\gamma))$) se déduisent de $D_4\Phi_{n,1}(F_n(\gamma))$ (resp. $D_4\Phi_{n,3}(F_n(\gamma))$) par la symétrie évidente $(\lambda, \alpha)\leftrightarrow(\mu, \beta)$. Définissons, pour $n \geqslant 0$:

$$A_n = \{(\lambda, \mu, \alpha, \beta)\in \mathbf{R}^4,\ \alpha > 1+\sigma,\ \beta > 1+\sigma,\ \sigma > 0,$$
$$\lambda\mu(\alpha\beta)^n(\beta-\alpha)^2 > c(1+K)^n|\lambda\alpha^n+\mu\beta^n|\},$$

où $0 < c < \mathscr{A}_1/a_0$, $K = \sigma^2/(1+2\sigma)$, σ étant déterminé ultérieurement.

On voit immédiatement que pour tout $n \geqslant 0$, les F_n sont des difféomorphismes sur A_n. En outre, $A_n \subset A_{n+1}$, pour tout $n \geqslant 0$.

En effet, si $(\lambda, \mu, \alpha, \beta)$ vérifie par exemple $\beta \geqslant \alpha$ et

$$\lambda\mu(\alpha\beta)^n(\beta-\alpha)^2 > c(1+K)^n|\lambda\alpha^n+\mu\beta^n|,$$

$\alpha > 1+\sigma$, $\beta > 1+\sigma$, $\sigma > 0$, alors $\lambda\mu > 0$ et

$$\begin{aligned}\lambda\mu(\alpha\beta)^{n+1}(\beta-\alpha)^2 &> c(1+K)^n\alpha|\lambda\alpha^n\beta+\mu\beta^{n+1}|\\ &> c(1+K)^n\alpha|\lambda\alpha^{n+1}+\mu\beta^{n+1}|\\ &> c(1+K)^n(1+\sigma)|\lambda\alpha^{n+1}+\mu\beta^{n+1}|\\ &> c(1+K)^{n+1}|\lambda\alpha^{n+1}+\mu\beta^{n+1}|,\end{aligned}$$

car $1+\sigma > 1+\sigma\dfrac{1+\sigma}{1+2\sigma} = 1+K$.

Enfin, pour $\gamma \in A_n$, on a la majoration:

$$|D_4 \Phi_{n,3}(F_n(\gamma))| \leqslant \frac{1}{c(1+K)^n} = \psi_{n,3};$$

d'où $\Psi_{0,3} = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{m,3} = 1/(cK)$; de même $\Psi_{0,4} = 1/(cK)$.

Soit $\boldsymbol{b}_0 = (a_0, a_1, a_2, a_3)$. La condition $\boldsymbol{b}_0 \in F_0(A_0)$ est réalisée car l'équation $X^2 - \sigma_{0,1} X + \sigma_{0,2} = 0$ possède deux racines réelles supérieures à 1, α_0 et β_0 vérifiant (3.1.1). Supposons réalisées les conditions $\boldsymbol{b}_i \in F_i(A_i)$; $0 \leqslant i \leqslant n-1$, et cherchons si la condition $\boldsymbol{b}_n \in F_n(A_n)$ est réalisée ($\boldsymbol{b}_n = (a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, a_{n+3})$).

Comme la suite (a_n) est une $E(2)$-suite, les rationnels $\sigma_{n,1}$ et $\sigma_{n,2}$ vérifient les inégalités $(*)$ équivalentes aux inégalités de la définition 1.1:

$$(*) \qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{2}\dfrac{a_n}{\mathscr{A}_{n+1}} < \sigma_{n,1} - \sigma_{n-1,1} \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{a_n}{\mathscr{A}_{n+1}}, \\[2ex] -\dfrac{1}{2}\dfrac{a_{n+1}}{\mathscr{A}_{n+1}} < \sigma_{n,2} - \sigma_{n-1,2} \leqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{a_{n+1}}{\mathscr{A}_{n+1}}. \end{cases}$$

On déduit alors des inégalités $(*)$, par sommation:

$$\sigma_{n,2} > \sigma_{0,2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a_2}{\mathscr{A}_2} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{\mathscr{A}_{n+1}}\right). \tag{3.1.6}$$

Or:

$$\left(\frac{\mathscr{A}_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \bigg/ \left(\frac{\mathscr{A}_n}{a_n}\right) = \frac{\mathscr{A}_{n+1}}{\mathscr{A}_n}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha_{n-1}\beta_{n-1}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sigma_{n-1,2}}{\sigma_{n-1,1} - \sigma_{n-1,2}\dfrac{a_{n-1}}{a_n}},$$

puisque $a_{n+1} = \sigma_{n-1,1} a_n - \sigma_{n-1,2} a_{n-1}$.

Supposons vérifiée par récurrence l'inégalité:

$$\sigma_{n-1,2}\frac{a_{n-1}}{a_n} > 1;$$

la condition $\sigma_{0,2}\dfrac{a_0}{a_1} > 1$ n'est autre que l'hypothèse (3.1.5).

On obtient alors:

$$\left(\frac{\mathscr{A}_{n+1}}{a_{n+1}}\right) \bigg/ \left(\frac{\mathscr{A}_n}{a_n}\right) > \frac{\sigma_{n-1,2}}{\sigma_{n-1,1} - 1} = \frac{\alpha_{n-1}\beta_{n-1}}{\alpha_{n-1} + \beta_{n-1} - 1} > \frac{(1+\sigma)^2}{1+2\sigma} = 1 + K > 1. \tag{3.1.7}$$

D'où:

$$\frac{a_{n+1}}{\mathscr{A}_{n+1}} < \frac{a_n}{\mathscr{A}_n(1+K)}, \qquad \text{ou encore } \sigma_{n-1,2}\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + K. \tag{3.1.8}$$

En reportant la majoration (3.1.8) dans (3.1.6), il vient:

$$\sigma_{n,2} > \sigma_{0,2} - \frac{1}{2}\frac{a_2}{\mathscr{A}_2}\left(1 + \frac{1}{1+K} + \ldots + \frac{1}{(1+K)^{n-1}}\right)$$

$$> \sigma_{0,2} - \frac{1}{2}\frac{a_1}{\mathscr{A}_1 K} > (1+\sigma)^2 + \frac{1+\sigma}{cK} - \frac{1}{2}\frac{a_1}{\mathscr{A}_1 K} \quad \text{d'après (3.1.1)}$$

$$> (1+\sigma)^2 \quad \text{si } 0 < c < \mathscr{A}_1/a_0 \text{ et (3.1.2);}$$

d'où:

(3.1.9) $$\sigma_{n,2} > (1+\sigma)^2.$$

Montrons enfin la relation $\sigma_{n,2}\dfrac{a_n}{a_{n+1}} > 1$, qui assurera la récurrence. On a:

$$\sigma_{n,2}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sigma_{n,2}}{\sigma_{n-1,2}}\sigma_{n-1,2}\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\sigma_{n,2}}{\sigma_{n-1,2}}(1+K) \quad \text{d'après (3.1.8).}$$

On déduit alors de (*):

$$\sigma_{n,2} > \sigma_{n-1,2} - \frac{1}{2}\frac{a_{n+1}}{\mathscr{A}_{n+1}};$$

d'où:

$$\sigma_{n,2}\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{\left(\sigma_{n-1,2} - \frac{1}{2}\frac{a_{n+1}}{\mathscr{A}_{n+1}}\right)(1+K)}{\sigma_{n-1,2}}, \quad \text{d'après (3.1.8),}$$

$$> 1 \quad \text{si } \sigma_{n-1,2} > \frac{(1+K)a_{n+1}}{2\mathscr{A}_{n+1}K},$$

ce qui est réalisé si

$$\sigma_{n-1,2} > \frac{(1+K)a_n}{2\mathscr{A}_n K(1+K)} = \frac{a_n}{2\mathscr{A}_n K},$$

grâce à (3.1.8).

Or l'inégalité $\sigma_{n-1,2} = \mathscr{A}_{n+1}/\mathscr{A}_n > a_n/2\mathscr{A}_n K$ est équivalente à $a_n/2\mathscr{A}_{n+1}K < 1$. Il suffit donc de montrer cette dernière inégalité.

Mais

$$\frac{a_n}{\mathscr{A}_{n+1}} = \frac{a_n}{\mathscr{A}_n}\frac{\mathscr{A}_n}{\mathscr{A}_{n+1}} < \frac{a_n}{\mathscr{A}_n} < \frac{a_1}{\mathscr{A}_1}\frac{1}{(1+K)^{n-1}}, \quad n \geqslant 2, \quad \text{d'après (3.1.8);}$$

d'où

$$\frac{a_n}{2\mathscr{A}_{n+1}K} < \frac{a_1}{2\mathscr{A}_1 K} < 1, \quad \text{d'après (3.1.4).}$$

L'inégalité (3.1.9), à savoir $\sigma_{n,2} = \mathscr{A}_{n+2}/\mathscr{A}_{n+1} > (1+\sigma)^2$, entraîne, puisque $\mathscr{A}_1 > 0$, et par récurrence, $\mathscr{A}_{n+2} > 0$. D'où:

$$(\sigma_{n,1})^2 - 4\sigma_{n,2} = \frac{(a_n\mathscr{A}_{n+2} - a_{n+2}\mathscr{A}_{n+1})^2 + 4\mathscr{A}_{n+1}^2\mathscr{A}_{n+2}}{a_{n+1}^2\mathscr{A}_{n+1}^2} > 0.$$

Par suite, l'équation $X^2 - \sigma_{n,1}X + \sigma_{n,2} = 0$ possède deux racines réelles positives distinctes, l'une d'entre elles étant supérieure à $1+\sigma$, puisque $\sigma_{n,2} > (1+\sigma)^2$.

D'après $(*)$:

$$\begin{aligned}
&(1+\sigma)^2 - \sigma_{n,1}(1+\sigma) + \sigma_{n,2} \\
&\qquad > (1+\sigma)^2 - (1+\sigma)\left[\sigma_{0,1} + \frac{1}{2}\left(\frac{a_1}{\mathscr{A}_2} + \ldots + \frac{a_n}{\mathscr{A}_{n+1}}\right)\right] \\
&\qquad\quad + \sigma_{0,2} - \frac{1}{2}\left[\frac{a_2}{\mathscr{A}_2} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{\mathscr{A}_{n+1}}\right] \\
&\qquad > (1+\sigma)^2 - (1+\sigma)\sigma_{0,1} + \sigma_{0,2} - (1+\sigma)\frac{a_0}{2\mathscr{A}_1 K} - \frac{a_1}{2\mathscr{A}_1 K} > 0,
\end{aligned}$$

d'après (3.1.3).

Par suite, les deux racines α_n et β_n sont toutes deux supérieures à $1+\sigma$.

Pour achever de montrer la relation $\boldsymbol{b}_n \in F_n(A_n)$, il suffit de prouver que $\mathscr{A}_{n+1}/a_n > (1+K)^n c$.

Or:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathscr{A}_{n+1}}{a_n}\frac{a_{n-1}}{\mathscr{A}_n} &= \alpha_{n-1}\beta_{n-1}\frac{\lambda_{n-1}(\alpha_{n-1})^{n-1} + \mu_{n-1}(\beta_{n-1})^{n-1}}{\lambda_{n-1}(\alpha_{n-1})^n + \mu_{n-1}(\beta_{n-1})^n} \\
&> \alpha_{n-1}, \quad \text{si par exemple } \beta_{n-1} \geqslant \alpha_{n-1}, \\
&> 1+\sigma > 1+K.
\end{aligned}$$

D'où:

$$\frac{\mathscr{A}_{n+1}}{a_n} > (1+K)^n\frac{\mathscr{A}_1}{a_0} > (1+K)^n c \qquad \text{car } c < \frac{\mathscr{A}_1}{a_0}.$$

La démonstration ci-dessus prouvant la relation $\boldsymbol{b}_n \in F_n(A_n)$ prouve de même les relations $z \in F_n(A_n)$, pour tout $z \in [\boldsymbol{b}_n, \tilde{\boldsymbol{b}}_n]$. Enfin, étant donné une équation $X^2 - \sigma_{0,1}X + \sigma_{0,2} = 0$ ayant ses deux racines réelles α_0 et β_0, supérieures à 1, l'existence de $\sigma > 0$ tel que:

$$\alpha > 1+\sigma+\frac{1+2\sigma}{2c\sigma^2} \quad \text{et} \quad \beta > 1+\sigma+\frac{1+2\sigma}{2c\sigma^2},$$

a lieu pour $\sigma > \tau_0$ où τ_0 est la racine positive de l'équation $x^3\mathscr{A}_1-(x+1)a_0 = 0$. D'après le théorème 2.1, les suites (α_n) et (β_n) tendent vers des limites respectives $\alpha > 1$ et $\beta > 1$ vérifiant:

$$|\alpha-\alpha_0| < \tfrac{1}{2}\Psi_{0,3} = \frac{a_0}{2\mathscr{A}_1 K}, \quad |\beta-\beta_0| < \tfrac{1}{2}\Psi_{0,4} = \frac{a_0}{2\mathscr{A}_1 K}.$$

Or, pour $\sigma \geqslant \tau_0$, on a

$$\frac{a_0}{2\mathscr{A}_1 K} = \frac{a_0(1+2\sigma)}{2\mathscr{A}_1\sigma^2} < \frac{a_0}{2\mathscr{A}_1}\frac{1+2\tau_0}{\tau_0^2} < \tau_0;$$

on en déduit:

$$|\alpha-\alpha_0| < \tau_0 \quad \text{et} \quad |\beta-\beta_0| < \tau_0. \tag{3.1.10}$$

Comme τ_0 tend vers 0 avec $a_0/\mathscr{A}_1$, au besoin en remplaçant le quadruplet (a_0, a_1, a_2, a_3) par (ta_0, ta_1, ta_2, ta_3) avec t entier suffisamment grand, on en déduit que l'ensemble des (α, β) est dense dans $(]1, +\infty[)^2$. On déduit également de (3.1.10) si $(\sigma_{0,1})^2-4\sigma_{0,2} > 4\tau_0^2$, la relation $\alpha \neq \beta$.

Exemples: 1. La $E(2)$-suite $E(2, 3, 5, 9)$ définit la suite de terme général $a_n = 2^n+1$, non "convergente" car $\sigma_{n,1} = 3$, $\sigma_{n,2} = 2$ mais l'équation $X^2-3X+2 = 0$ n'a pas ses deux racines de module supérieur à 1.

2. La $E(2)$-suite $E(1, 3, 4, 2)$ définit la $E(2)$-suite $1, 3, 4, 2, -4, -12, -16, -8, 16, 48, 64, 32, -64, \ldots$ On a $\sigma_{n,1} = 2$, $\sigma_{n,2} = 2$. C'est donc une $E(2)$-suite "convergente" "imaginaire" avec α et β points limites complexes, racines de l'équation $X^2-2X+2 = 0$.

3. La $E(2)$-suite $E(22, 44, 132, 1320)$ vérifie les conditions du théorème 3.1. En effet $\mathscr{A}_1 = 968$, $\mathscr{A}_2 = 40.656$, $\sigma_{0,1} = 24$, $\sigma_{0,2} = 42$, $\alpha_{0,1} = 1{,}9004\ldots$, $\alpha_{0,2} = 22{,}0995\ldots$, $\tau_0 = 0{,}3099\ldots$, $K = 0{,}096038\ldots$, $1/(2cK) < 0{,}12$.

En outre, la condition $(\sigma_{0,1})^2-4\sigma_{0,2} > 4\tau_0^2$ étant vérifiée, la $E(2)$-suite $E(22, 44, 132, 1320)$ "converge" et son couple limite (α, β) vérifie $\alpha > 1$, $\beta > 1$, $\alpha \neq \beta$, $|\alpha-1{,}9004\ldots| < 0{,}3099\ldots$ et $|\beta-22{,}0995\ldots| < 0{,}3099\ldots$

Bibliographie

[1] M. J. Bertin, *Nouvelles aplications d'un théorème de Pisot*, Groupe d'étude en théorie analytique des nombres, Publications de l'I.H.P., Paris 1984.

[2] — *Généralisation de suites de Pisot et de suites de Boyd*, Comptes-rendus de la Conférence internationale de théorie des nombres (Québec, juillet 1987), W. de Gruyter—Editeur.

[3] D. W. Boyd, *Some integer sequences related to Pisot sequences*, Acta Arith. 34 (1979), 295–305.
[4] Ch. Pisot, *La répartition modulo* 1 *et les nombres algébriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 7 (1938), 205–248.
[5] — *Répartition modulo* 1 *des puissances successives des nombres réels*, Comment. Math. Helv. 19 (1946–47), 153–160.
[6] — *Quelques aspects de la théorie des entiers algébriques*, Sém. Math. Sup., Montréal 1963.
[7] Ch. Pisot and R. Salem, *Distribution modulo* 1 *of the powers of real numbers larger than* 1, Compositio Math. 16 (1,2) (1964), 164–168.
[8] R. Salem, *Algebraic Numbers and Fourier Analysis*, Heath Mathematical monographs, Boston 1963.

UNIVERSITÉ P. ET M. CURIE
MATHÉMATIQUES U.E.R. 47
4, Place Jussieu
75005 Paris, France

Reçu le 27.12.1988
et révisé le 7.7.1989 (1892)