ACTA ARITHMETICA
LVI (1990)

Ein Mittelwertsatz bei dreidimensionalen Gitterpunktproblemen

von

PETER GEORG SCHMIDT (Marburg)

1. Einleitung. ϱ und σ seien reelle Konstanten mit $1 < \varrho < \sigma$. Für $x \in \boldsymbol{R}$, $x \geqslant 1$ sei

$$\Delta_{\varrho,\sigma}(x) := \sum_{\substack{(l,m,n)\in \boldsymbol{N}^3 \\ lm^\varrho n^\sigma \leqslant x}} 1 - \zeta(\varrho)\zeta(\sigma)x - \zeta\left(\frac{1}{\varrho}\right)\zeta\left(\frac{\sigma}{\varrho}\right)x^{1/\varrho} - \zeta\left(\frac{1}{\sigma}\right)\zeta\left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)x^{1/\sigma}.$$

Recknagel [3] bewies

$$(1) \qquad \bar{\Delta}_{\varrho,\sigma}(x) := \frac{1}{x}\int_1^x \Delta_{\varrho,\sigma}(t)\,dt \ll x^{1/(2(1+\varrho+\sigma))} + x^{(\varrho-2)/(1+\varrho+\sigma)}.$$

In §3 beweise ich den folgenden

SATZ. *Mit nur von ϱ und σ abhängiger $\ll$-Konstanten gilt*

$$\bar{\Delta}_{\varrho,\sigma}(x) \ll \log^3 x + x^{(\varrho-2)/(1+\varrho+\sigma)}.$$

Für $\varrho < 5/2$ wird die Abschätzung (1) durch den Satz verschärft; denn in diesem Falle ist $\varrho - 2 < 1/2$ und daher

$$\log^3 x + x^{(\varrho-2)/(1+\varrho+\sigma)} = o(x^{1/(2(1+\varrho+\sigma))}) \qquad (x \to \infty).$$

Die meiste Aufmerksamkeit wurde bislang dem Spezialfall $\varrho = 2$, $\sigma = 3$ zuteil, da er mit der Anzahl abelscher Gruppen beschränkter Ordnung zusammenhängt ([4], Hilfssatz 1). Die beste Abschätzung von $\Delta_{2,3}(x)$ stammt von Kolesnik [1]:

$$\Delta_{2,3}(x) \ll x^{97/381}\log^{35} x \qquad (x \geqslant 2).$$

Sie wird nach (1) ergänzt durch $\bar{\Delta}_{2,3}(x) \ll x^{1/12}$ und aufgrund obigen Satzes durch

$$\bar{\Delta}_{2,3}(x) \ll \log^3 x \qquad (x \geqslant 2).$$

2. Hilfssätze. Wesentliche Vorarbeit leistete Recknagel:

HILFSSATZ 1 ([3], Lemma 8). *$B_2(\cdot)$ sei das zweite Bernoullische Polynom und $\psi_2(t) := B_2(t-[t])$ für $t \in \boldsymbol{R}$. Ist (α, β, γ) eine Permutation des Tripels $(1, \varrho, \sigma)$ und*

$$T_{\alpha,\beta,\gamma}(x) := \frac{\alpha}{2}\sum_{\substack{m^\alpha + \beta n^\gamma \leqslant x \\ m > n}} \sqrt[\alpha]{\frac{m^\beta n^\gamma}{x}}\,\psi_2\left(\sqrt[\alpha]{\frac{x}{m^\beta n^\gamma}}\right),$$

so gilt

$$\bar{\Delta}_{\varrho,\sigma}(x) = -\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)} T_{\alpha,\beta,\gamma}(x) + O\left(x^{(\varrho-2)/(1+\varrho+\sigma)}+1\right).$$

HILFSSATZ 2 ([5], Lemma α). *Sei R ein achsenparalleles Rechteck des $\boldsymbol{R}^2$, g: $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $|g(\mu,\nu)| \leqslant G$ für $(\mu,\nu)\in R$. Haben die partiellen zweiten Ableitungen von g festes Vorzeichen in R und sind $b_{m,n}$ für $m, n\in\boldsymbol{Z}$, $(m,n)\in R$ beliebige komplexe Zahlen, so gilt mit geeigneten M', $N'\in\boldsymbol{Z}$*

$$\Big|\sum_{(m,n)\in R} g(m,n)\, b_{m,n}\Big| \leqslant 5G\Big|\sum_{\substack{(m,n)\in R\\ m\leqslant M'\\ n\leqslant N'}} b_{m,n}\Big|.$$

Krätzel bewies

HILFSSATZ 3 ([2], Theorem 2.19). *Seien $\underline{\mu}$, $\bar{\mu}$, $\underline{\nu}$, $\bar{\nu}$ reell, λ_1, λ_2, λ, Λ positiv, $M := \bar{\mu}-\underline{\mu}\geqslant 1$, $N := \bar{\nu}-\underline{\nu}\geqslant 1$ und $R := \{(\mu,\nu)\in\boldsymbol{R}^2 \mid \underline{\mu}\leqslant\mu\leqslant\bar{\mu}$, $\underline{\nu}\leqslant\nu\leqslant\bar{\nu}\}$. f: $R\to\boldsymbol{R}$ sei dreimal stetig differenzierbar, f_μ monoton in μ,* $\max f_\mu - \min f_\mu \ll \lambda_1$, $\max f_\nu - \min f_\nu \ll \lambda_2$, $f_{\nu\nu} \gg \ll \lambda$ *(f_ν also monoton in ν), $f_{\mu\mu}f_{\nu\nu}-f_{\mu\nu}^2 \gg \ll \Lambda$ und $f_{\nu\nu\nu} \ll \lambda/N$. $f_{\nu\nu}f_{\mu\nu\nu}-f_{\mu\nu}f_{\nu\nu\nu}$ habe festes Vorzeichen in R und*

$$\varphi(\nu) := \{f_\nu(\mu_0,\nu)-f_\nu(\mu_0,\nu_0)\}^6$$
$$-8f_{\nu\nu}(\mu_0,\nu_0)\, f_{\nu\nu}^2(\mu_0,\nu)\{f(\mu_0,\nu)-f(\mu_0,\nu_0)-f_\nu(\mu_0,\nu_0)(\nu-\nu_0)\}^3$$

für jedes $(\mu_0,\nu_0)\in R$ nur $O(1)$ Nullstellen in $[\underline{\nu},\bar{\nu}]$. D sei eine nichtleere Teilmenge von R, deren stetiger Rand ∂D von jeder achsenparallelen Geraden in höchstens zwei Punkten oder einer Strecke getroffen wird. Dasselbe gelte auch für Durchschnitte von D mit Bereichen des Typs $\pm f_\mu \leqslant$ const und $\pm f_\nu \leqslant$ const. ∂D bestehe aus $O(1)$ zweimal stetig differenzierbaren Kurvenstücken der Form $\mu=$ const oder $\nu = g(\mu)$. Ist dann auf letzteren Kurvenstücken $df_\nu(\mu, g(\mu))/d\mu \gg \sqrt{\Lambda}$, so gilt

$$\sum_{(m,n)\in D} e\big(f(m,n)\big)$$
$$\ll MN\sqrt{\Lambda}+\frac{\lambda_1+\lambda_2+1}{\sqrt{\Lambda}}(1+\log M)+\frac{\lambda_2+1}{\sqrt{\lambda}}+M\left(\frac{1}{\lambda N}+1+\log N+|\log\lambda|\right).$$

3. Beweis des Satzes. (α,β,γ) sei eine Permutation des Tripels $(1,\varrho,\sigma)$; $M, N\in\{2^k-1 \mid k\in\boldsymbol{N}\}$ und

$$T_{\alpha,\beta,\gamma}(x; M, N) := \frac{\alpha}{2}\sum_{\substack{m^\alpha+\beta n^\gamma\leqslant x\\ m>n\\ M\leqslant m\leqslant 2M\\ N\leqslant n\leqslant 2N}} \sqrt[\alpha]{\frac{m^\beta n^\gamma}{x}}\,\psi_2\left(\sqrt[\alpha]{\frac{x}{m^\beta n^\gamma}}\right).$$

Ist die Summe $T_{\alpha,\beta,\gamma}(x; M, N)$ nicht leer, so ist

(2) $$M\geqslant N,\quad x>4$$

und $M^{\alpha+\beta}N^\gamma\leqslant x$. Letzteres ist äquivalent zu

(3) $$F := (xM^{-\beta}N^{-\gamma})^{1/\alpha}\geqslant M.$$

Zunächst liefert Hilfssatz 2 mit geeigneten $M'\in[M, 2M]$ und $N'\in[N, 2N]$

$$T_{\alpha,\beta,\gamma}(x; M, N) \ll \frac{1}{F}\left|\sum_{\substack{m^\alpha+\beta n^\gamma\leqslant x\\ m>n\\ M\leqslant m\leqslant M'\\ N\leqslant n\leqslant N'}}\psi_2\left(\sqrt[\alpha]{\frac{x}{m^\beta n^\gamma}}\right)\right|.$$

Fourierentwicklung von ψ_2 ergibt

(4) $$T_{\alpha,\beta,\gamma}(x; M, N) \ll \frac{1}{F}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}|S|$$

mit

$$S := \sum_{\substack{m^\alpha+\beta n^\gamma\leqslant x\\ m>n\\ M\leqslant m\leqslant M'\\ N\leqslant n\leqslant N'}} e\left(k\cdot\sqrt[\alpha]{\frac{x}{m^\beta n^\gamma}}\right).$$

Zur Abschätzung von S wende ich Hilfssatz 3 mit $R := [M, 2M]\times[N, 2N]$, $f(\mu,\nu) := k(x\mu^{-\beta}\nu^{-\gamma})^{1/\alpha}$ und $D := \{(\mu,\nu)\in R \mid \mu\leqslant M', \nu\leqslant N', \mu>\nu, \mu^{\alpha+\beta}\nu^\gamma\leqslant x\}$ an. Dann ist $g(\mu) = N, N', \mu$ oder $(x\mu^{-\alpha-\beta})^{1/\gamma}$ und, setzt man $q := \nu/\nu_0\in[1/2, 2]$ und $\delta := \gamma/\alpha$, $\varphi(\nu) = f_\nu^6(\mu_0,\nu_0)\cdot h(q)$ mit

$$h(q) = (q^{-\delta-1}-1)^6-8\left(\frac{\delta+1}{\delta}\right)^3 q^{-2\delta-4}(q^{-\delta}+\delta q-\delta-1)^3.$$

Da h im Intervall $[1/2, 2]$ analytisch ist, hat h dort nur endlich viele Nullstellen, deren Anzahl lediglich von $\delta = \gamma/\alpha$ abhängen kann. Daher hat φ nur $O(1)$ Nullstellen in $[N, 2N]$ für jedes $(\mu_0,\nu_0)\in R$. Die übrigen Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 sind, wie man ohne besondere Schwierigkeiten nachrechnet, mit $\lambda_1 := kF/M$, $\lambda_2 := kF/N$, $\lambda := kF/N^2$ und $\Lambda := (kF)^2/(MN)^2$ erfüllt. Wegen (2) und (3) erhält man $S\ll kF+M\log F$. Verwendet man dies in (4), so folgt im Hinblick auf die triviale Abschätzung $S\ll MN$

$$T_{\alpha,\beta,\gamma}(x; M, N) \ll \frac{1}{F}\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k^2}\min(kF, MN)+\frac{M}{F}\log F$$
$$\leqslant \sum_{k\leqslant MN/F}\frac{1}{k}+\frac{MN}{F}\sum_{k>MN/F}\frac{1}{k^2}+\log F$$
$$\ll \log\left(\frac{MN}{F}+1\right)+1+\log F \ll \log x.$$

Da man für jede Permutation (α,β,γ) des Tripels $(1,\varrho,\sigma)$ die in Hilfssatz 1 auftretende Summe $T_{\alpha,\beta,\gamma}(x)$ in $O(\log^2 x)$ Summen der Form $T_{\alpha,\beta,\gamma}(x; M, N)$ zerlegen kann, resultiert schließlich aus Hilfssatz 1 der Satz.

Literatur

[1] G. Kolesnik, *On the number of Abelian groups of a given order*, J. Reine Angew. Math. 329 (1981), 164–175.
[2] E. Krätzel, *Lattice Points*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1988.
[3] W. Recknagel, *Ein Mittelwertsatz im asymmetrischen dreidimensionalen Gitterpunktproblem*, Mitt. Math. Semin. Gießen 175 (1981), 1–17.
[4] P. G. Schmidt, *Zur Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung*, J. Reine Angew. Math. 229 (1968), 34–42.
[5] E. C. Titchmarsh, *On Epstein's Zeta-function*, Proc. London Math. Soc. (2) 36 (1934), 485–500.

PHILIPPS-UNIVERSITÄT
Lahnberge
D-3550 Marburg, F.R.G.

Eingegangen am 6.4.1989
und in revidierter Form am 4.7.1989 (1921)

ACTA ARITHMETICA
LVI (1990)

Nombre de points des jacobiennes sur un corps fini

par

GILLES LACHAUD (Marseille)

et

MIREILLE MARTIN-DESCHAMPS (Paris)

Introduction. Dans l'analogie entre corps de nombres et corps de fonctions sur un corps fini, le nombre de classes correspond au nombre de points de la jacobienne. Nous donnons dans cet article une borne inférieure du nombre de points d'une jacobienne sur un corps fini. Depuis les résultats de Weil ([9], [10]), il y a eu beaucoup de travaux consacrés au nombre de points des courbes sur un corps fini, mais peu d'entre eux concernent explicitement le nombre de points des jacobiennes (cf. [1], [2], [5], [6]). Signalons que récemment S. G. Vladut a abordé ce problème pour l'appliquer à la théorie des codes correcteurs d'erreurs (cf. [8]).

Le § 1 fixe la terminologie, les notations, et rappelle les résultats de Weil; le § 2 établit les estimations classiques qui découlent immédiatement de ces résultats. Nous établissons au § 3 une identité (théorème 1) entre le nombre de diviseurs positifs de degré n sur une courbe, le nombre de points de sa jacobienne, et les racines inverses du numérateur de sa fonction zêta. Cette identité résulte d'une formule (lemme 2) qui est l'expression algébrique d'un théorème classique pour les fonctions zêta des corps de nombres: la formule de Hecke.

Nous donnons au § 4 une minoration (théorème 2) du nombre h de points d'une jacobienne qui résulte du théorème 1, et nous améliorons ainsi les minorations standard comme le montrent les tableaux en annexe. Ces minorations nous permettent d'obtenir des conditions sur q et g pour qu'il existe des courbes de genre g sur $\boldsymbol{F}_q$ avec $h = 1$ ou $h = 2$; dans le cas $h = 1$, nous retrouvons des résultats de Madan et Queen [6].

Nous tenons à remercier J. P. Serre pour les remarques qu'il a faites sur ce travail.

1. Fonction zêta d'une courbe algébrique. Soit X une courbe algébrique projective irréductible et lisse de genre g définie sur le corps fini $\boldsymbol{F}_q$; on suppose que le corps des constantes du corps des fonctions rationnelles sur X est égal à $\boldsymbol{F}_q$, ce qui revient à dire que X est géométriquement irréductible sur $\boldsymbol{F}_q$. On