Added in proof. We are indebted to the following mathematicians for their friendly help in computing upper bounds for the minimum value of λ as (k, l) runs over all exponent pairs: Professor D. R. Heath-Brown (for his letter deted 25.2.1989), Professor A. Ivić (for his letter dated 8.3.1989), Professor H. L. Montgomery (for his letter dated 17.3.1989, communicating the result of his student Professor S. Graham), Professor M. Jutila (for his letter dated 31.3.1989), Professor M. N. Huxley (for his letters dated 11.4.1989 and 11.5.1989).

The best known upper bound for $\min\lambda$ is $\leqslant \frac{681}{2074} = 0.328365101\ldots$ computed by Professor M. N. Huxley (letter dated 11.5.1989).

References

[1] R. Balasubramanian, *An improvement of a theorem of Titchmarsh on the mean square of* $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$, Proc. London Math. Soc. (3) 36 (1978), 540–576.

[2] D. R. Heath-Brown, *Hybrid bounds for Dirichlet L-functions*, Invent. Math. 47 (1978), 149–170.

[3] T. Meurman, *A generalization of Atkinson's formula to L-functions*, Acta Arith. 47 (1986), 351–370.

[4] H. L. Montgomery, *Mean and large values of Dirichlet polynomials*, Invent. Math. 8 (1969), 334–345.

[5] K. Ramachandra, *A simple proof of the mean fourth power estimate for* $\zeta(\frac{1}{2}+it)$ *and* $L(\frac{1}{2}+it, \chi)$, Ann. Scoula Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 1 (1–2) (1974), 81–97.

[6] — *Some remarks on a theorem of Montgomery and Vaughan*, J. Number Theory 11 (1979), 465–471.

[7] P. N. Ramachandran, *Density results of the Riemann zeta-function over short intervals*, M. Phil. thesis, Autonomous Postgraduate Centre, Thiruchirapalli, Tamil Nadu, India, 1978.

[8] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Clarendon Press, Oxford 1951.

MATSCIENCE
Madras 600 113, India
SCHOOL OF MATHEMATICS
TATA INSTITUTE OF FUNDAMENTAL RESEARCH
Homi Bhabha Road, Bombay 400 005, India

Received on 24.6.1988
and in revised form on 2.3.1989 (1837)

ACTA ARITHMETICA
LV (1990)

Sur la suite des nombres premiers jumeaux

par

Jie Wu (Paris)

I. Introduction et résultats

La conjecture des nombres premiers jumeaux consiste à montrer que la fonction $\pi_2(x)$ définie par

$$\pi_2(x) = |\{p \leqslant x;\ p+2 = p'\}|$$

(p désigne toujours un nombre premier) tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$. Plus précisément, Hardy et Littlewood ([12]) ont conjecturé l'équivalence

$$\pi_2(x) \sim Cx\log^{-2} x \quad (x \to +\infty) \tag{1.1}$$

où C désigne le produit infini

$$C = 2\prod_{p\geqslant 3}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right).$$

1. Majoration asymptotique de $\pi_2(x)$. L'équivalence (1.1) semble extrêmement difficile à démontrer, il est donc déjà très intéressant de rechercher les constantes b telles qu'on ait l'inégalité

$$\pi_2(x) \leqslant (b+\varepsilon)Cx\log^{-2} x \tag{1.2}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $x > x_0(\varepsilon)$.

On doit à Brun d'avoir démontré l'existence de telles constantes ([3]), les étapes les plus significatives furent ensuite $b = 8$ (Selberg [16]) et $b = 4$ (Bombieri et Davenport [1]). Ce dernier résultat dépend du crible de Selberg en dimension 1 et du théorème de Bombieri–Vinogradov sur la répartition en moyenne des nombres premiers dans les progressions arithmétiques (se reporter à [11] pour une présentation complète).

On sait que, dans les formules générales du crible linéaire (Lemme 2), les fonctions F et f sont optimales; mais Chen ([6]) a remarqué que, dans ce problème, les suites criblées sont très particulières: elles satisfont le principe d'inversion du rôle des variables (*switching principle*) — Chen avait déjà profité de cette propriété pour démontrer que tout entier pair assez grand est somme d'un nombre premier et d'un entier ayant au plus deux facteurs premiers

([4], [5]). Chen ([6]) introduit donc deux fonctions $G(s)$ et $H(s)$ qui sont, *grosso modo*, ce qu'on gagne, dans ce contexte, par rapport aux fonctions générales $f(s)$ et $F(s)$, et qui sont liées par une inégalité intégrale. Cette technique très compliquée repose sur une méthode d'itération et des inégalités pondérées et conduit à la valeur $b = 3.9171$.

En 1981, Pan ([14], [15]) parvient à la valeur $b = 3.964$ de façon très simple en utilisant une inégalité pondérée et le principe d'inversion du rôle des variables, et en évitant les fonctions G et H. Signalons que Chen et Pan travaillaient avec le théorème de Jurkat–Richert et qu'ils contrôlaient les termes d'erreur du crible par le théorème de Bombieri–Vinogradov et ses généralisations.

En 1983, Fouvry et Iwaniec ([10]) ont donné le premier résultat avec un exposant supérieur à 1/2, de répartition en moyenne des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, mais avec des coefficients *bien factorisables*. En combinant ce résultat et le crible de Rosser–Iwaniec, ils parvinrent à $b = 34/9 = 3.7777\ldots$ Suivant cette direction, Fouvry ([7]) en 1984 a obtenu $b = 64/17 = 3.7647\ldots$, et Bombieri, Friedlander et Iwaniec ([2]), en 1986, sont parvenus à $b = 3.5$. Récemment, Fouvry et Grupp ([8]) injectèrent dans la méthode de Pan les résultats nouveaux sur la répartition, en moyenne dans les progressions arithmétiques, de la suite des nombres premiers ou de suites obtenues par convolution (Lemmes 4 et 6) pour parvenir à $b = 3.454$.

L'objet de cet article est de placer dans la technique de Chen ([6]) ces nouveaux résultats de répartition pour parvenir au

THÉORÈME 1. *L'inégalité* (1.2) *est vraie pour* $b = 3.418$.

La démonstration est suffisamment générale pour conduire à de nouvelles valeurs de b, dès que les exposants de répartition en moyenne seront améliorés. Mais une des difficultés est la construction des fonctions G et H de Chen dans le cadre des coefficients bien factorisables (voir § III).

2. Minoration de $\pi_{1,2}(x)$. On note P_2 un entier ayant au plus deux facteurs premiers et $\pi_{1,2}(x)$ désigne la fonction

$$\pi_{1,2}(x) = |\{p \leqslant x;\ p+2 = P_2\}|.$$

Le théorème de Chen ([4]) déjà évoqué ci-dessus montre qu'il existe $a > 0$ tel qu'on ait pour x assez grand l'inégalité

$$\pi_{1,2}(x) \geqslant aCx\log^{-2}x. \tag{1.3}$$

La valeur $a = 0.335$ de la démonstration originale de Chen fut portée à $a = 0.3445$ par Halberstam et Richert ([11]). En passant par une inégalité pondérée plus efficace, Chen parvint ensuite à $a = 0.405$ ([5]), puis Fouvry et Grupp ([8]) par une inégalité tout à fait naturelle parvinrent à $a = 0.71$ en incluant les résultats de répartition en moyenne de Bombieri, Friedlander et Iwaniec. Toutes ces valeurs de a ont été obtenues en ayant recours au principe d'inversion du rôle des variables et ce n'est que récemment que Fouvry et Grupp ([9]) ont donné la première démonstration de (1.3), indépendante de ce principe (la valeur de a trouvée est extrêmement petite). Nous montrerons le

THÉORÈME 2. *L'inégalité* (1.3) *est vraie pour* $a = 1.05$.

Ainsi il apparaît que, pour x très grand, $\pi_{1,2}(x)$ est supérieur à la valeur espérée de $\pi_2(x)$, donc il est tout à fait raisonnable de penser que l'équation $p+2 = p_1 p_2$ admet une infinité de solutions.

Pour obtenir la valeur de a ci-dessus, nous utiliserons des résultats sur les fonctions G et H nécessaires à la démonstration du Théorème 1, le recours à ces fonctions permet un gain, sur la valeur de a, de l'ordre de 2%.

Durant la rédaction de ce travail, H. Liu nous a signalé qu'il avait obtenu $a = 1.015$ (non publié).

Remerciements. Cet article a été élaboré sous la direction du Professeur Fouvry à qui je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude. Je remercie aussi Pierre Goetgheluck pour son aide lors des calculs numériques sur machine.

II. Préliminaires

Pour k entier positif, on définit $\tau_k(n)$ comme le nombre de manières d'écrire l'entier n en produit de k entiers positifs. Une fonction arithmétique est dite de *niveau* Q et de *degré* k, si

$$\lambda(q) = 0 \quad \text{pour } q > Q, \text{ et}$$
$$|\lambda(q)| \leqslant \tau_k(q) \quad \text{pour } q \geqslant 1.$$

Maintenant λ est dite *bien factorisable* si pour tous $Q_1, Q_2 \geqslant 1$ avec $Q_1 Q_2 = Q$, il existe deux fonctions arithmétiques λ_1 et λ_2 de niveau Q_1 et Q_2 et de degré k vérifiant l'égalité $\lambda = \lambda_1 * \lambda_2$.

On rencontre les coefficients bien factorisables dans le terme d'erreur de la formule du crible linéaire de Rosser–Iwaniec (Lemme 2). Par convention, $\lambda(q)$ désignera toujours une fonction bien factorisable de niveau Q et de degré k.

Comme conséquence directe de la définition, on a le

LEMME 1. *Si λ' est une fonction arithmétique de niveau Q' ($\leqslant Q$) et de degré k', la fonction arithmétique $\lambda * \lambda'$ est alors bien factorisable de niveau QQ' et de degré $k+k'$.*

Pour rappeler la formule du crible linéaire de Rosser–Iwaniec, nous désignons par $\mathscr{J}$ une suite finie d'entiers, $\mathscr{P}$ un ensemble de nombres premiers. Nous voulons évaluer, pour $z \geqslant 2$, la quantité

$$S(\mathscr{J};\mathscr{P},z) = |\{a \in \mathscr{J};\ (a, P(z)) = 1\}|$$

où $P(z) = \prod_{p<z,\, p\in\mathscr{P}} p$.

Si d est un entier sans facteur carré, avec tous ses facteurs premiers appartenant à $\mathscr{P}$, on note $\mathscr{I}_d$ l'ensemble des éléments de $\mathscr{I}$ divisibles par d et on suppose la formule d'approximation suivante:

$$(2.1)\qquad |\mathscr{I}_d| = \frac{\omega(d)}{d}X + r(\mathscr{I}, d)$$

où X (> 1) est indépendant de d et $\omega(d)$ est une fonction multiplicative vérifiant

$$(2.2)\qquad 0 \leqslant \omega(p) < p \quad \text{pour } p \in \mathscr{P}.$$

On pose encore

$$V(z) = \prod_{p<z,\, p\in\mathscr{P}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right)$$

et on écrit l'hypothèse du crible linéaire sous la forme

$$(2.3)\qquad \frac{V(z_1)}{V(z_2)} \leqslant \frac{\log z_2}{\log z_1}\left(1 + \frac{K}{\log z_1}\right) \quad \text{pour } z_2 \geqslant z_1 \geqslant 2$$

avec K constante > 1.

On a alors le

LEMME 2. *Soient $0 < \varepsilon < 1/8$, $2 \leqslant z \leqslant Q^{1/2}$. Sous les hypothèses (2.1)–(2.3), on a les inégalités*

$$S(\mathscr{I}; \mathscr{P}, z) \leqslant XV(z)\left\{F\left(\frac{\log Q}{\log z}\right) + E\right\} + \sum_{l<L} \sum_{q|P(z)} \lambda_l^+(q) r(\mathscr{I}, q),$$

$$S(\mathscr{I}; \mathscr{P}, z) \geqslant XV(z)\left\{f\left(\frac{\log Q}{\log z}\right) - E\right\} - \sum_{l<L} \sum_{q|P(z)} \lambda_l^-(q) r(\mathscr{I}, q).$$

Dans ces formules, L dépend seulement de ε, λ_l^+ et λ_l^- sont des coefficients bien factorisables de niveau Q et de degré 1 et E satisfait

$$E \leqslant C_1\left(\varepsilon + \varepsilon^{-8} e^K (\log Q)^{-1/3}\right)$$

(C_1 constante absolue). Les fonctions $F(s)$ et $f(s)$ sont continues et définies par

$$F(s) = 2e^{\gamma} s^{-1}, \quad f(s) = 0 \quad \text{pour } 0 < s \leqslant 2,$$

$$(sF(s))' = f(s-1), \quad (sf(s))' = F(s-1) \quad \text{pour } s > 2,$$

où γ désigne la constante d'Euler.

On rappelle maintenant des propriétés de la fonction w de Buchstab:

LEMME 3. *Soit $w(t)$ la fonction définie par*

$$w(t) = 0 \quad \text{pour } 0 < t < 1,$$

$$w(t) = 1/t \quad \text{pour } 1 \leqslant t \leqslant 2.$$

$$(tw(t))' = w(t-1) \quad \text{pour } t \geqslant 2.$$

On a alors l'équivalence

$$|\{n \leqslant x;\ p|n \Rightarrow p > x^{1/t}\}| \sim tw(t)x\log^{-1} x$$

pour x tendant vers $+\infty$, uniformément pour t dans un intervalle borné de $[1, +\infty)$.

Les lemmes suivants serviront à majorer les termes d'erreur qui apparaîtront lors du criblage. Ces lemmes donnent des renseignements sur la répartition en moyenne de la suite des nombres premiers ou de suites de même structure, dans les progressions arithmétiques. Leur démonstration passe par la méthode de dispersion et les majorations de sommes de Kloosterman. On a le

LEMME 4 ([2], Theorem 10). *Pour tout entier a, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $A > 0$, on a l'estimation*

$$\sum_{(q,a)=1} \lambda(q)\left(\pi(x; q, a) - \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(q)}\right) = O_{a,k,\varepsilon,A}(x\log^{-A} x)$$

avec $Q = x^{4/7-\varepsilon}$.

Dans les deux lemmes suivants, le coefficient devant le terme d'erreur est *presque bien factorisable.* On montre le

LEMME 5 ([9], Théorème 2). *Soient λ une fonction bien factorisable de niveau Q_1 et de degré k, et ξ une fonction arithmétique vérifiant les conditions*

$$|\xi(q_2)| \leqslant \log x \quad \text{et} \quad q_2 > Q_2 \Rightarrow \xi(q_2) = 0.$$

Alors l'inégalité

$$\sum_{(q_1q_2,a)=1} \lambda(q_1)\xi(q_2)\left(\pi(x; q_1q_2, a) - \frac{\mathrm{li}\, x}{\varphi(q_1q_2)}\right) = O_{A,a,\varepsilon,k}(x\log^{-A} x)$$

est vraie pour tout entier a, tout $\varepsilon > 0$, tout $A > 0$, quand une des trois conditions suivantes est vraie:

$$(\mathrm{C}.1)\qquad Q_2 \leqslant Q_1, \quad Q_1Q_2 \leqslant x^{4/7-\varepsilon},$$

$$(\mathrm{C}.2)\qquad Q_2 \geqslant Q_1, \quad Q_1Q_2^6 \leqslant x^{2-\varepsilon},$$

$$(\mathrm{C}.3)\qquad \xi(q) = \Lambda(q), \quad Q_1Q_2 \leqslant x^{11/20-\varepsilon}, \quad Q_2 \leqslant x^{1/3-\varepsilon},$$

où Λ est la fonction de von Mangoldt.

LEMME 6 ([9], Corollary). *Soient η un réel positif très petit et $g(t) = g_\eta(t)$ la fonction définie par*

$$g(t) = \begin{cases} \frac{4}{7} & \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant \frac{2}{7} - \eta, \\ \frac{11}{20} & \text{pour } \frac{2}{7} - \eta < t \leqslant \frac{1}{3} - \eta, \\ \frac{1}{2} & \text{pour } \frac{1}{3} - \eta < t \leqslant \frac{1}{2} - \eta. \end{cases}$$

On a alors, pour tout entier a, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout A, l'estimation

$$\sum_{\substack{p\in\mathscr{P}\\(pq,a)=1}}\sum_{q} \lambda(q)\left(\pi(x;\, pq,\, a)-\frac{\operatorname{li} x}{\varphi(pq)}\right) = O_{a,k,\varepsilon,\eta,A}(x\log^{-A} x)$$

dès que $\mathscr{P}$ est un intervalle de $[x^t, 2x^t)$ $(0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}-\eta)$ et que $Q = x^{g(t)-t-\varepsilon}$.

Le dernier lemme est, en quelque sorte, une généralisation du Lemme 4, il peut être amélioré dès qu'on connaît la valeur précise des ε_i et cette amélioration conduit à une nouvelle valeur de b dans le Théorème 1, mais au prix de situations techniquement inextricables. On a le

LEMME 7. *Soient $\eta > 0$, $r \geqslant 1$, $(\varepsilon_i)_{1\leqslant i\leqslant r}$ des réels vérifiant*

$$\varepsilon_i \geqslant \eta, \quad \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_r = 1,$$

$\mathscr{P}_i$ des intervalles de $[x^{\varepsilon_i}, 2x^{\varepsilon_i})$. Alors, pour tout entier a, tout $\varepsilon > 0$ et tout $A > 0$, on a la majoration

$$\sum_{(q,a)=1} \lambda(q)\Bigg(\sum_{\substack{p_1\ldots p_r\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)\\ p_i\in\mathscr{P}_i\,(1\leqslant i\leqslant r)}} 1-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{(p_1\ldots p_r,q)=1\\ p_i\in\mathscr{P}_i\,(1\leqslant i\leqslant r)}} 1\Bigg) = O_{a,k,\varepsilon,\eta,A}(x\log^{-A} x)$$

avec $Q = x^{4/7-\varepsilon}$.

La démonstration se fait comme celle du Lemme 4, en utilisant une décomposition en formes bilinéaires (identités de Vaughan ou de Heath-Brown) de la fonction caractéristique des nombres premiers et en appliquant les résultats de répartition en moyenne du produit de convolution de deux suites ([2], [8], Lemma 6, par exemple).

III. Les fonctions G et H

Dans ce paragraphe, nous définissons les fonctions G et H introduites par Chen ([6]), dans le cadre du crible de Selberg. Mais ici, la structure particulière du terme d'erreur du Lemme 2 amène à une construction beaucoup plus difficile de ces fonctions.

1. Les ensembles $\mathscr{U}_k(x)$. Dans toute la suite, δ sera un réel positif très petit. On pose alors

$$\mathscr{L} = \log x, \quad Q = x^{4/7-\delta}, \quad W_k = x^{\delta 100^{-k}} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

On désigne par $\Pi_{[Y,Z)}$ la fonction caractéristique des nombres premiers de l'intervalle $[Y, Z)$.

Pour $k = 0, 1, 2, \ldots$, on note $\mathscr{U}_k(x)$ l'ensemble des fonctions arithmétiques χ qui peuvent s'écrire sous la forme

$$\chi = \Pi_{[V_1\Delta^{-1}, V_1)} * \ldots * \Pi_{[V_i\Delta^{-1}, V_i)}$$

où i est un entier vérifiant $0 \leqslant i \leqslant k$,

Δ est un réel vérifiant $1+\mathscr{L}^{-4} \leqslant \Delta \leqslant 1+2\mathscr{L}^{-4}$,

$V_1, \ldots, V_i$ sont des nombres réels vérifiant

$$V_1 \geqslant \ldots \geqslant V_i \geqslant W_k, \quad V_1^2 \leqslant Q, \quad V_1 V_2^2 \leqslant Q, \;\ldots,\; V_1\ldots V_{i-1}V_i^2 \leqslant Q \tag{3.1}$$

(si $i = 0$, on fait la convention que χ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{1\}$).

Remarquons d'abord que χ est bien factorisable de degré k et de niveau Q (voir [13], Lemme 1) et qu'on a les inclusions

$$\mathscr{U}_k(x) \subset \mathscr{U}_{k+1}(x). \tag{3.2}$$

2. Les fonctions $G_{k,x_0}(s)$ et $H_{k,x_0}(s)$. Nous criblerons la suite

$$\mathscr{A} = \{p+2;\; p \leqslant x\}$$

avec l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers impairs. Pour d entier nous posons

$$\mathscr{P}(d) = \{p\in\mathscr{P};\; p\nmid d\}, \quad \underline{d} = Q/d,$$

et on introduit, pour $1 \leqslant s \leqslant 100$, les fonctions

$$A(s) = \frac{sF(s)}{2e^{\gamma}}-1, \quad B(s) = \frac{sf(s)}{2e^{\gamma}}.$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$ et tout $x_0 \geqslant 2$, on définit $H_{k,x_0}(s)$ (resp. $G_{k,x_0}(s)$) comme la borne supérieure des $h \geqslant -\infty$ tels qu'on ait, pour tout $x \geqslant x_0$ et tout $\chi\in\mathscr{U}_k(x)$, l'inégalité

$$\sum_{d}\chi(d)\,S(\mathscr{A}_d;\, \mathscr{P}(d),\, \underline{d}^{1/s}) \leqslant (1+A(s)-h)\,\Xi(\chi;\, x)$$

$$(\text{resp. } \sum_{d}\chi(d)\,S(\mathscr{A}_d;\, \mathscr{P}(d),\, \underline{d}^{1/s}) \geqslant (B(s)+h)\,\Xi(\chi;\, x))$$

où

$$\Xi(\chi;\, x) = 2Cx\mathscr{L}^{-1}\sum_{d}\frac{\chi(d)}{\varphi(d)\log \underline{d}}.$$

D'après cette définition, on voit facilement que les fonctions $H_{k,x_0}(s)$ et $G_{k,x_0}(s)$ sont décroissantes en k, à cause de (3.2), et croissantes en x_0. Remarquons que les relations

$$A(s) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant s \leqslant 3 \quad\text{et}\quad B(s) = 0 \text{ pour } 1 \leqslant s \leqslant 2$$

entraînent la décroissance de $H_{k,x_0}(s)$ et $G_{k,x_0}(s)$ respectivement sur les intervalles $1 \leqslant s \leqslant 3$ et $1 \leqslant s \leqslant 2$.

Enfin nous posons

$$H_k(s) = \lim_{x_0\to+\infty} H_{k,x_0}(s), \quad H(s) = \lim_{k\to+\infty} H_k(s),$$

$$G_k(s) = \lim_{x_0\to+\infty} G_{k,x_0}(s), \quad G(s) = \lim_{k\to+\infty} G_k(s).$$

3. Premières propriétés de $G(s)$ **et** $H(s)$. Nous montrerons la

Proposition 1. *On a les propriétés:*

(i) $H(s)$ *est décroissante pour* $1 \leqslant s \leqslant 3$.

(ii) *Pour tout* k *entier* $\geqslant 0$, *et tout* $x_0 \geqslant 2$, *tout* $x \geqslant x_0$ *et tout* $\chi \in \mathscr{U}_k(x)$, *on a les inégalités*

$$\sum_d \chi(d) S(\mathscr{A}_d;\ \mathscr{P}(d),\ \underline{d}^{1/s}) \quad \begin{array}{ll} \leqslant (1+A(s)-H_{k,x_0}(s))\,\Xi(\chi;\ x), & (3.3) \\ \geqslant (B(s)+G_{k,x_0}(s))\,\Xi(\chi;\ x). & (3.4) \end{array}$$

(iii) $H_k(s) \geqslant 0$ *et* $G_k(s) \geqslant 0$ *pour* $k \geqslant 0$ *et* $s \in [1, 100]$.

Les propriétés (i) et (ii) sont évidentes et nous nous contenterons de montrer l'inégalité $H_k(s) \geqslant 0$.

Soit $\chi \in \mathscr{U}_k(x)$ s'écrivant

$$\chi = \Pi_{[V_1\Delta^{-1}, V_1)} * \ldots * \Pi_{[V_i\Delta^{-1}, V_i)}.$$

D'après le Lemme 2, la formule de Mertens, on a, en notant $\xi(t)$ une fonction tendant vers 0 quand t tend vers $+\infty$, l'inégalité

$$(3.5)\quad \chi(d) S(\mathscr{A}_d;\ \mathscr{P}(d),\ \underline{d}^{1/s})$$
$$\leqslant \frac{\chi(d)}{\varphi(d)\log \underline{d}} C e^{-\gamma} s x \mathscr{L}^{-1} \left\{ F\left(\frac{\log(Q/V)}{\log \underline{d}^{1/s}}\right) + E \right\} \{1+\xi(\underline{d}^{1/s})\}$$
$$+ \sum_{l<L} \chi(d) \sum_{q|P(\underline{d}^{1/s})} \lambda_l^+(q) r(\mathscr{A}, dq)$$

où λ_l^+ est bien factorisable de degré 1 et de niveau Q/V avec $V = V_1 \ldots V_i$, et E vérifie $E \leqslant C_1(\varepsilon + \varepsilon^{-8} e^K (\log(Q/V))^{-1/3})$.

Si $\chi(d) \neq 0$, alors $d \in [V\Delta^{-i}, V)$, ce qui entraîne

$$0 \leqslant \log V - \log d \leqslant i \log \Delta \leqslant 2k\mathscr{L}^{-4}.$$

Nous en déduisons alors

$$(3.6)\quad F\left(\frac{\log(Q/V)}{\log \underline{d}^{1/s}}\right) = F(s) + O_{k,\delta}(\mathscr{L}^{-5}) = \frac{2e^\gamma}{s}(1+A(s)) + O_{k,\delta}(\mathscr{L}^{-5}).$$

Les relations (3.5) et (3.6) donnent la majoration

$$(3.7)\quad \chi(d) S(\mathscr{A}_d;\ \mathscr{P}(d),\ \underline{d}^{1/s})$$
$$\leqslant (1+A(s)+E+O_{k,\delta}(\mathscr{L}^{-5}))(1+\xi(\underline{d}^{1/s}))\, 2Cx\mathscr{L}^{-1} \frac{\chi(d)}{\varphi(d)\log \underline{d}}$$
$$+ \sum_{l<L} \chi(d) \sum_{q|P(\underline{d}^{1/s})} \lambda_l^+(q) r(\mathscr{A}, dq)$$

(majoration vérifiée trivialement pour $\chi(d) = 0$).

Il nous reste à montrer, que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 = x_0(\varepsilon, \delta, k)$ tel qu'on ait pour $x \geqslant x_0$ l'inégalité

$$(3.8)\quad \sum_d \chi(d) S(\mathscr{A}_d;\ \mathscr{P}(d),\ \underline{d}^{1/s}) \leqslant (1+A(s)+O_{\delta,k}(\varepsilon))(1+\varepsilon)\,\Xi(\chi;\ x).$$

Remarquons d'abord que si $\chi(d) \neq 0$, on a l'inégalité $\underline{d} \geqslant W_k$, d'où $1+\xi(\underline{d}^{1/s}) \leqslant 1+\varepsilon$ pour x suffisamment grand.

La relation (3.1) entraîne $V_i \leqslant Q/V$, donc $\lambda_l^+ * \Pi_{[V_i\Delta^{-1}, V_i)}$ est bien factorisable de niveau QV_i/V (Lemme 1), puis on a de même $V_{i-1} \leqslant QV_i/V$, donc $\lambda_l^+ * \Pi_{[V_{i-1}\Delta^{-1}, V_{i-1})} * \Pi_{[V_i\Delta^{-1}, V_i)}$ est bien factorisable de niveau $QV_{i-1}V_i/V$. Ainsi on parvient à montrer que $\chi * \lambda_l^+$ est bien factorisable de niveau Q et degré $k+1$. Pour application du Lemme 4, on obtient la relation

$$(3.9)\quad \sum_{l<L} \sum_d \chi(d) \sum_{q|P(\underline{d}^{1/s})} \lambda_l^+(q) r(\mathscr{A}, dq) = O_{k,\delta,\varepsilon}(x\mathscr{L}^{-5k-3}).$$

Nous venons donc d'utiliser la structure combinatoire de χ pour pouvoir recourir au Lemme 4.

Les relations (3.7) et (3.9) entraînent donc, pour $x > x_1(\varepsilon, \delta, k)$, l'inégalité

$$(3.10)\quad \sum_d \chi(d) S(\mathscr{A}_d;\ \mathscr{P}(d),\ \underline{d}^{1/s})$$
$$\leqslant (1+A(s)+E+O_{k,\delta}(\mathscr{L}^{-5}))(1+\varepsilon)\,\Xi(\chi;\ x) + O_{k,\delta,\varepsilon}(x\mathscr{L}^{-5k-3}).$$

Enfin, nous avons les relations

$$\Xi(\chi;\ x) \geqslant 2Cx\mathscr{L}^{-2} \sum_d \frac{\chi(d)}{d} = 2Cx\mathscr{L}^{-2} \prod_{j=1}^{i} \left(\sum_{p_j \in [V_j\Delta^{-1}, V_j)} \frac{1}{p_j} \right)$$

et, grâce au théorème des nombres premiers, on a pour $x > x_1(\delta, k)$

$$\sum_{p_j \in [V_j\Delta^{-1}, V_j)} \frac{1}{p_j} = \log\left(\frac{\log V_j}{\log V_j\Delta^{-1}}\right) + O\left(\frac{1}{\log^{10}(V_j\Delta^{-1})}\right) \geqslant \tfrac{1}{4}\mathscr{L}^{-5}.$$

On déduit alors pour le terme principal de (3.10) la minoration

$$(3.11)\quad \Xi(\chi;\ x) \geqslant C 4^{-k} x \mathscr{L}^{-5k-2}.$$

La démonstration de (3.8) découle alors de (3.10) et (3.11) en prenant x suffisamment grand.

La relation (3.8) implique donc pour x_0 assez grand

$$H_{k,x_0}(s) \geqslant -O_{\delta,k}(\varepsilon)$$

d'où $H_k(s) \geqslant -O_{\delta,k}(\varepsilon)$ et finalement, en faisant tendre ε vers 0, $H_k(s) \geqslant 0$, ce qui complète la démonstration de la Proposition 1.

IV. Relations entre G et H

On sait que les fonctions F et f sont reliées par des équations différentielles aux différences, équations qu'on retrouve en appliquant l'identité de Buchstab. Les fonctions G et H sont elles aussi reliées par l'identité de Buchstab, mais on ne parvient qu'à des inégalités. On montre la

PROPOSITION 2. *On a les inégalités*

$$G(s) \geqslant G(s') + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{H(t)}{t}\,dt, \qquad H(s) \geqslant H(s') + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{G(t)}{t}\,dt$$

pour $2 \leqslant s \leqslant s' \leqslant 100$.

Remarquons que les fonctions G et H sont décroissantes respectivement sur $[2, 100]$ et sur $[1, 100]$.

Nous démontrerons complètement la première relation, l'autre se traite de même.

Soient $k \geqslant 0$, $\chi \in \mathscr{U}_k(x)$ avec $\chi = \Pi_{[V_1\Delta^{-1}, V_1)} * \ldots * \Pi_{[V_i\Delta^{-1}, V_i)}$. L'identité de Buchstab donne

$$(4.1) \quad \sum_d \chi(d) S(\mathscr{A}_d;\, \mathscr{P}(d),\, \underline{d}^{1/s}) = \sum_d \chi(d) S(\mathscr{A}_d;\, \mathscr{P}(d),\, \underline{d}^{1/s'}) - \sum_d \chi(d) \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p < \underline{d}^{1/s}} S(\mathscr{A}_{dp};\, \mathscr{P}(d),\, p)$$

et la Proposition 1 conduit, pour $x > x_0$, à

$$(4.2) \quad \sum_d \chi(d) S(\mathscr{A}_d;\, \mathscr{P}(d),\, \underline{d}^{1/s'}) \geqslant \big(B(s') + G_{k,x_0}(s')\big)\, \Xi(\chi;\, x).$$

Nous montrerons, pour traiter le dernier terme à droite de (4.1), que, après un découpage, la fonction caractéristique des dp appartient à $\mathscr{U}_{k+1}(x)$ et que ce terme se majore aussi avec une fonction H_{k+1,x_0}.

1. Découpage de l'intervalle $[\underline{d}^{1/s'}, \underline{d}^{1/s})$. Soit r l'entier vérifiant

$$\underline{V}^{1/s'} \Delta^r \leqslant \underline{V}^{1/s} < \underline{V}^{1/s'} \Delta^{r+1}$$

où $\underline{V} = QV^{-1}$ $(V = V_1 \ldots V_i)$.

Remarquons l'implication

$$\chi(d) \neq 0 \;\Rightarrow\; \underline{V}^{1/s'} \leqslant \underline{d}^{1/s'} \text{ et } \underline{V}^{1/s} \leqslant \underline{d}^{1/s},$$

d'où nous déduisons l'inégalité

$$(4.3) \quad S = \sum_d \chi(d) \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p \leqslant \underline{d}^{1/s}} S(\mathscr{A}_{dp};\, \mathscr{P}(d),\, p) \leqslant \sum_d \chi(d) \sum_{\underline{V}^{1/s'} \leqslant p < \underline{V}^{1/s'}\Delta^r} S(\mathscr{A}_{dp};\, \mathscr{P}(d),\, p) + \sum\nolimits_1$$

avec

$$\sum\nolimits_1 = \sum_d \chi(d) \sum_{\underline{V}^{1/s'}\Delta^r \leqslant p < \underline{d}^{1/s}} S(\mathscr{A}_{dp};\, \mathscr{P}(d),\, p).$$

En posant $s(d, p) = \log(\underline{d}/p)/\log p$ l'inégalité (4.3) devient

$$(4.4) \quad S \leqslant \sum_{j=1}^{r} \sum_{d,p} \chi(d)\, \Pi_{[\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1}, \underline{V}^{1/s'}\Delta^j)}(p)\, S\big(\mathscr{A}_{dp};\, \mathscr{P}(dp),\, (\underline{dp})^{1/s(d,p)}\big) + \sum\nolimits_1.$$

Montrons maintenant que

$$(4.5) \quad \chi * \Pi_{[\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1}, \underline{V}^{1/s'}\Delta^j)} \in \mathscr{U}_{k+1}(x).$$

On pose donc $V' = \underline{V}^{1/s'}\Delta^j$. Afin de vérifier que $V_1, V_2, \ldots, V_i, V'$ satisfont, pour $j \leqslant r$, les conditions (3.1), on envisage deux situations:

- Si $V_i \geqslant V'$, alors nous avons

$$V_1 \ldots V_i V'^2 \leqslant V(\underline{V}^{1/s})^2 = Q^{2/s} V^{1-2/s} \leqslant Q,$$
$$V' \geqslant \underline{V}^{1/s'} \geqslant V_i^{1/s'} \geqslant W_k^{1/s'} \geqslant W_{k+1}.$$

- Si $V_1 \geqslant \ldots \geqslant V_l \geqslant V' \geqslant V_{l+1} \geqslant \ldots \geqslant V_i$, on a, pour $l < n \leqslant i$,

$$V_1 \ldots V_l V' V_{l+1} \ldots V_n^2 \leqslant VV'V_n \leqslant VV'^2 \leqslant V(\underline{V}^{1/s})^2 \leqslant Q,$$

ce qui termine la démonstration de (4.5).

Toutefois, dans (4.4) l'exposant $1/s(d, p)$ n'est pas une fonction de la variable dp.

2. Transformation de (4.4). On pose

$$s_1(V, j) = \log\big(\underline{V}/(\underline{V}^{1/s'}\Delta^j)\big)/\log(\underline{V}^{1/s'}\Delta^j),$$
$$s_2(V, i, j) = \log\big(\underline{V}\Delta^i/(\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1})\big)/\log(\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1})$$

et on remarque l'implication

$$(4.6) \quad \chi(d)\, \Pi_{[\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1}, \underline{V}^{1/s'}\Delta^j)}(p) \neq 0 \;\Rightarrow\; s_1(V, j) \leqslant s(d, p) \leqslant s_2(V, i, j),$$

ce qui transforme l'inégalité (4.4) en

$$S \leqslant \sum_{j=1}^{r} \sum_{d,p} \chi(d)\, \Pi_{[\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1}, \underline{V}^{1/s'}\Delta^j)}(p)\, S\big(\mathscr{A}_{dp};\, \mathscr{P}(dp),\, (\underline{dp})^{1/s_1(V,j)}\big) + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

avec

$$(4.7) \quad \sum\nolimits_2 = \sum_{j=1}^{r} \sum_{d,p} \chi(d)\, \Pi_{[\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1}, \underline{V}^{1/s'}\Delta^j)}(p) \times \big\{S\big(\mathscr{A}_{dp};\, \mathscr{P}(dp),\, (\underline{dp})^{1/s(d,p)}\big) - S\big(\mathscr{A}_{dp};\, \mathscr{P}(dp),\, (\underline{dp})^{1/s_1(V,j)}\big)\big\}.$$

Grâce à (4.5), on applique (3.3) pour écrire l'inégalité

$$S \leqslant \sum_{j=1}^{r} \big\{1 + A\big(s_1(V, j)\big) - H_{k+1,x_0}\big(s_1(V, j)\big)\big\}\, 2Cx\mathscr{L}^{-1} \times \sum_{d,p} \frac{\chi(d)\Pi_{[\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1}, \underline{V}^{1/s'}\Delta^j)}(p)}{\varphi(dp)\log \underline{dp}}$$

$$\leqslant \Xi(\chi;\, x) \sum_{\underline{V}^{1/s'} \leqslant p < \underline{V}^{1/s'}\Delta^r} \frac{1 + A\big(s(d,\, p)\big) - H_{k+1,x_0}\big(s(d,\, p)\big)}{\varphi(p)(1 - \log p/\log \underline{d})} + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2$$

car la fonction $A(s) - H_{k+1,x_0}(s)$ est croissante.

On a finalement l'inégalité

$$S \leqslant \Xi(\chi;\, x) \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p < \underline{d}^{1/s}} \frac{1 + A\big(s(d,\, p)\big) - H_{k+1,x_0}\big(s(d,\, p)\big)}{\varphi(p)(1 - \log p/\log \underline{d})} + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3$$

avec

$$\sum\nolimits_3 = \Xi(\chi;\, x) \sum_{\underline{V}^{1/s'} \leqslant p < \underline{d}^{1/s'}} \frac{1 + A\big(s(d,\, p)\big) - H_{k+1,x_0}\big(s(d,\, p)\big)}{\varphi(p)(1 - \log p/\log \underline{d})}.$$

La monotonie de la fonction $A(s) - H_{k+1,x_0}(s)$ permet d'intégrer par parties et d'appliquer le théorème des nombres premiers pour écrire finalement

$$S \leqslant \left(\int_{s-1}^{s'-1} \frac{1 + A(t)}{t}\, dt - \int_{s-1}^{s'-1} \frac{H_{k+1,x_0}(t)}{t}\, dt + \varepsilon\right) \Xi(\chi;\, x) + \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3. \tag{4.8}$$

3. Majoration de $\sum_1$. On a l'inégalité

$$\sum\nolimits_1 \leqslant 2 \sum_d \chi(d) \sum_{\underline{V}^{1/s'}\Delta^r \leqslant p < \underline{d}^{1/s}} \frac{x}{dp}$$

$$\leqslant 2x \sum_d \frac{\chi(d)}{\varphi(d)} \left(\log \frac{\log \underline{d}^{1/s}}{\log(\underline{V}^{1/s'}\Delta^r)} + O\left(\frac{1}{\log^{10}(\underline{V}^{1/s'}\Delta^r)}\right)\right)$$

par le théorème des nombres premiers. Lorsque $\chi(d) \neq 0$, on a $V\Delta^{-i} \leqslant d < V$ et par conséquent $\underline{d}^{1/s} \leqslant \underline{V}^{1/s}\Delta^{i/s}$. Ceci conduit à la majoration

$$\log \frac{\log \underline{d}^{1/s}}{\log(\underline{V}^{1/s'}\Delta^r)} \leqslant \log \frac{\log(\underline{V}^{1/s}\Delta^{i/s})}{\log(\underline{V}^{1/s}\Delta^{-1})} = \log\left(1 + \frac{\log \Delta^{i/s+1}}{\log(\underline{V}^{1/s}\Delta^{-1})}\right) = O_{k,\delta}(\mathscr{L}^{-5})$$

et $\sum_1$ vérifie l'inégalité

$$\sum\nolimits_1 = O_{k,\delta}(\mathscr{L}^{-3}\, \Xi(\chi;\, x)). \tag{4.9}$$

4. Majorations de $\sum_2$ et de $\sum_3$. D'après la définition (4.7), on a l'inégalité

$$\sum\nolimits_2 \leqslant 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{d,p} \chi(d)\, \Pi_{[\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1},\, \underline{V}^{1/s'}\Delta^j)}(p) \sum_{(\underline{dp})^{1/s(d,p)} \leqslant p' < (\underline{dp})^{1/s_1(V,j)}} \frac{x}{dpp'},$$

d'où on déduit

$$\sum\nolimits_2 \leqslant 2 \sum_{j=1}^{r} \sum_{d,p} \chi(d)\, \Pi_{[\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1},\, \underline{V}^{1/s'}\Delta^j)}(p) \frac{x}{dp} \left\{\log \frac{s(d,\, p)}{s_1(V,\, j)} + O\left(\frac{1}{\log^{10} p}\right)\right\};$$

dans cette somme, on peut se restreindre à $d \in [V\Delta^{-i},\, V)$ et à $p \in [\underline{V}^{1/s'}\Delta^{j-1},\, \underline{V}^{1/s'}\Delta^j)$, ce qui entraîne l'inégalité

$$\log \frac{s(d,\, p)}{s_1(V,\, j)} \leqslant \log \frac{s_2(V,\, i,\, j)}{s_1(V,\, j)} = O_{k,\delta}(\mathscr{L}^{-5}),$$

par conséquent $\sum_2$ vérifie l'inégalité

$$\sum\nolimits_2 = O_{k,\delta}\left(x\mathscr{L}^{-4} \sum_d \frac{\chi(d)}{\varphi(d) \log \underline{d}} \sum_{\underline{V}^{1/s'} \leqslant p < \underline{V}^{1/s}} \frac{1}{p}\right) \tag{4.10}$$

$$= O_{k,\delta}(\mathscr{L}^{-3}\, \Xi(\chi;\, x)).$$

La majoration de $\sum_3$ se fait comme celle de $\sum_1$ et donne

$$\sum\nolimits_3 = O_{k,\delta}(\mathscr{L}^{-3}\, \Xi(\chi;\, x)). \tag{4.11}$$

5. Fin de la démonstration. En regroupant (4.8)–(4.11), on a

$$S \leqslant \left(\int_{s-1}^{s'-1} \frac{1 + A(t)}{t}\, dt - \int_{s-1}^{s'-1} \frac{H_{k+1,x_0}(t)}{t}\, dt + 2\varepsilon\right) \Xi(\chi;\, x) \tag{4.12}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $x > x_0(\varepsilon,\, \delta,\, k)$, puis en reportant dans (4.1) on trouve

$$\sum_d \chi(d)\, S(\mathscr{A}_d;\, \mathscr{P}(d),\, d^{1/s})$$

$$\geqslant \left(B(s') + G_{k,x_0}(s') - \int_{s-1}^{s'-1} \frac{1 + A(t)}{t}\, dt + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{H_{k+1,x_0}(t)}{t}\, dt - 2\varepsilon\right) \Xi(\chi;\, x)$$

$$= \left(B(s) + G_{k,x_0}(s') + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{H_{k+1,x_0}(t)}{t}\, dt - 2\varepsilon\right) \Xi(\chi;\, x)$$

en utilisant les relations entre F et f. La définition de la fonction G_{k,x_0} entraîne l'inégalité

$$G_{k,x_0}(s) \geqslant G_{k,x_0}(s') + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{H_{k+1,x_0}(t)}{t}\, dt - 2\varepsilon$$

valable pour tout $\varepsilon > 0$ et x_0 assez grand, il en résulte

$$G_k(s) \geqslant G_k(s') + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{H_{k+1}(t)}{t}\, dt.$$

Il reste à faire tendre k vers $+\infty$ pour obtenir la Proposition 2.

V. Autres relations entre G et H

Il faut noter que la Proposition 2 a été démontrée sans faire appel à la propriété spécifique de la suite $\mathscr{A}$, qui, lorsqu'elle est criblée, satisfait le principe d'inversion du rôle des variables (ainsi les inégalités de la Proposition 2 sont vérifiées par les fonctions nulles). Dans ce paragraphe, nous établirons de nouvelles inéquations fonctionnelles entre G et H, qui ont pour point de départ des inégalités pondérées.

1. Inégalités pondérées (voir formules (23) et (47) de [6]). On montre d'abord le

Lemme 8. *Soient $4/7 \leqslant s < s' \leqslant 100$. Pour tout entier $k \geqslant 0$, tout $x \geqslant 2$ et tout $\chi \in \mathcal{U}_k(x)$, on a l'inégalité*

$$\sum_d \chi(d) S(\mathcal{A}_d;\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s})$$
$$\leqslant \sum_d \chi(d)\{S(\mathcal{A}_d;\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'}) - \tfrac{1}{2}\Omega_1(d) + \tfrac{1}{2}\Omega_2(d) + O_{k,\delta}(x^{1-\xi} d^{-1})\}$$

avec $\xi = \xi(\delta, k) > 0$,

$$\Omega_1(d) = \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp};\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'}),$$
$$\Omega_2(d) = \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p_1 < p_2 < p_3 < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp_1p_2p_3};\ \mathcal{P}(dp_1),\ p_2).$$

D'après l'identité de Buchstab, on a

$$2S(\mathcal{A}_d;\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s}) = 2S(\mathcal{A}_d;\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'}) - 2 \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp};\ \mathcal{P}(d),\ p), \tag{5.1}$$

$$S(\mathcal{A}_{dp};\ \mathcal{P}(d),\ p) = S(\mathcal{A}_{dp};\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'}) - \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p_1 < p} S(\mathcal{A}_{dp_1p};\ \mathcal{P}(d),\ p_1). \tag{5.2}$$

En insérant (5.2) dans (5.1), on a

$$2S(\mathcal{A}_{dp};\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s}) = 2S(\mathcal{A}_d;\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'}) - \Omega_1(d) + M(d) \tag{5.3}$$

où

$$M(d) = \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p_1 < p_3 < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp_1p_3};\ \mathcal{P}(d),\ p_1) - \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p_1 < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp_1};\ \mathcal{P}(d),\ p_1). \tag{5.4}$$

Il reste à simplifier $M(d)$; pour ce faire, on a d'après l'identité de Buchstab

$$S(\mathcal{A}_{dp_1p_3};\ \mathcal{P}(d),\ p_1) = S(\mathcal{A}_{dp_1p_3};\ \mathcal{P}(dp_1),\ p_3) + \sum_{p_1 \leqslant p_2 < p_3} S(\mathcal{A}_{dp_1p_2p_3};\ \mathcal{P}(dp_1),\ p_2), \tag{5.5}$$

$$S(\mathcal{A}_{dp_1};\ \mathcal{P}(d),\ p_1) = S(\mathcal{A}_{dp_1};\ \mathcal{P}(dp_1),\ \underline{d}^{1/s}) + \sum_{p_1 \leqslant p_3 < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp_1p_3};\ \mathcal{P}(dp_1),\ p_3). \tag{5.6}$$

En reportant (5.5) et (5.6) dans (5.4), on a

$$M(d) \leqslant \Omega_2(d) + \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p_1 < p_3 < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp_1^2p_3};\ \mathcal{P}(d),\ p_1).$$

On utilise alors la majoration triviale

$$S(\mathcal{A}_{dp_1^2p_3};\ \mathcal{P}(d),\ p_1) \leqslant (x+2)/(dp_1^2 p_3) = O(xd^{-1} p_1^{-2} p_3^{-1})$$

et on somme sur p_1 et p_3, pour écrire

$$M(d) \leqslant \Omega_2(d) + O_{k,\delta}(x^{1-\xi} d^{-1})$$

puisque $\underline{d} \geqslant W_k$ et $s' \leqslant 100$. En reportant cette majoration de $M(d)$ dans (5.3), on termine la démonstration du Lemme 8.

On montre de même le

Lemme 9. *Soient $4/7 \leqslant s \leqslant 3 \leqslant s' \leqslant 100$. Alors, pour tout $k \geqslant 0$, tout $x \geqslant 2$ et tout $\chi \in \mathcal{U}_k(x)$, on a l'inégalité*

$$\begin{aligned} \sum_d \chi(d) S(\mathcal{A}_d;\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s}) \leqslant \sum_d \chi(d) \{ & S(\mathcal{A}_d;\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'}) \\ & - \tfrac{1}{3} \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp};\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'}) \\ & - \tfrac{1}{3} \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p < \underline{d}^{1/3}} S(\mathcal{A}_{dp};\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'}) \\ & + \tfrac{1}{3} \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p_1 < p_2 < \underline{d}^{1/3}} S(\mathcal{A}_{dp_1p_2};\ \mathcal{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'}) \\ & + \tfrac{1}{3}\Omega_3(d) + \tfrac{1}{3}\Omega_4(d) + \tfrac{1}{3}\Omega_5(d) + O(x^{1-\xi} d^{-1})\} \end{aligned} \tag{5.7}$$

avec $\xi = \xi(\delta, k) > 0$,

$$\Omega_3(d) = \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p_1 < p_2 < \underline{d}^{1/3} \leqslant p_3 < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp_1p_2p_3};\ \mathcal{P}(dp_1),\ p_2)$$
$$\Omega_4(d) = \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p_1 < \underline{d}^{1/3} \leqslant p_2 < p_3 < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp_1p_2p_3};\ \mathcal{P}(dp_1),\ p_2),$$
$$\Omega_5(d) = \sum_{\underline{d}^{1/3} \leqslant p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \underline{d}^{1/s}} S(\mathcal{A}_{dp_1p_2p_3p_4};\ \mathcal{P}(dp_1p_2),\ p_3).$$

2. Inégalités entre G et H. Nous déduirons d'abord du Lemme 8 le

Lemme 10. *Pour $5 \geqslant s' \geqslant 3 \geqslant s \geqslant 2$ et $s'(1-s^{-1}) \geqslant 2$, on a l'inégalité*

$$H(s) \geqslant J(s, s') + \int_{s-1}^{s'-1} G\left(\frac{s't}{t+1}\right)\frac{dt}{2t} + H(s')$$

où

$$J(s, s') = -\int_2^{s'-1} \frac{\log(t-1)}{t}\,dt + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{1}{2t}\log\left(s'-1-\frac{s'}{t+1}\right)dt - \tfrac{1}{2}I(s, s') \tag{5.8}$$

avec

$$I(s,s')=\min\left\{\frac{7}{4}W^+\left(\frac{7s}{4}-3\right)\left(2(s-s')+(s+s')\log\frac{s'}{s}\right),\right.$$

$$\left.\frac{7}{2}\left(sW^+\left(\frac{7s}{4}\right)-s'W^-\left(\frac{7s'}{4}\right)\right)+\frac{7}{4}\left(s'W^+\left(\frac{7s'}{4}-\frac{s'}{s}\right)+sW^+\left(\frac{7s}{4}-1\right)\right)\log\frac{s'}{s}\right\}.$$

Dans cette formule,

$$W^+(t)=\sup\{w(s);\ s\geqslant t\},\qquad W^-(t)=\inf\{w(s);\ s\geqslant t\}.$$

Pour démontrer ce lemme, nous estimerons chacun des termes à droite de l'inégalité du Lemme 8, lorsque χ appartient à $\mathscr{U}_k(x)$. D'après la Proposition 1, on a directement, pour $x\geqslant x_0$, l'inégalité

(5.9) $$\sum_d \chi(d)S(\mathscr{A}_d;\ \mathscr{P}(d),\ \underline{d}^{1/s'})\leqslant(1+A(s')-H_{k,x_0}(s'))\,\Xi(\chi;\ x).$$

En suivant la démonstration de l'inégalité (4.12), on montre de même l'inégalité

(5.10) $$\sum_d \chi(d)\Omega_1(d)$$
$$\geqslant\left(\int_{s-1}^{s'-1}\frac{1}{t}\log\left(s'-1-\frac{s'}{t+1}\right)dt+\int_{s-1}^{s'-1}\frac{1}{t}G_{k+1,x_0}\left(\frac{s't}{t+1}\right)dt-2\varepsilon\right)\Xi(\chi;\ x)$$

valable pour tout $\varepsilon>0$, x_0 suffisamment grand et tout $x>x_0$.

Pour évaluer $\sum_d \chi(d)\Omega_2(d)$ nous suivrons la méthode de Fouvry et Grupp ([8]). On note d'abord l'égalité obtenue par l'inversion du rôle des variables

$$\sum_d \chi(d)\Omega_2(d)=S(\mathscr{B};\ \mathscr{P},\ x^{1/2})+O(x^{3/4})$$

avec

$$\mathscr{B}=\{dp_1p_2p_3m-2\leqslant x;\ \chi(d)\neq 0,$$
$$\underline{d}^{1/s'}\leqslant p_1<p_2<p_3<\underline{d}^{1/s},\ p'|m\Rightarrow p'\geqslant p_2 \text{ ou } p'=p_1\}.$$

D'après le Lemme 7, on voit, après un découpage qui rend les variables d, p_1, p_2, p_3 indépendantes, que la suite $\mathscr{B}^*$, définie de même que $\mathscr{B}$, à la différence près qu'on a uniquement l'implication $p'|m\Rightarrow p'\geqslant p_2$, a pour exposant de répartition $\frac{4}{7}-\delta$, d'où, pour x suffisamment grand, l'inégalite

(5.11) $$\sum_d \chi(d)\Omega_2(d)\leqslant(3.5+\varepsilon)C\mathscr{L}^{-1}|\mathscr{B}^*|+O(x^{1-\xi})$$

avec $\xi>0$. Pour évaluer $|\mathscr{B}^*|$ nous utilisons la fonction w du Lemme 3. On a, en posant $\nu(d,x)=4\log(x/d)/(7\log\underline{d})$ et en appliquant le théorème des nombres premiers, l'inégalité suivante, valable pour x suffisamment grand:

$$|\mathscr{B}^*(d)|=|\{dp_1p_2p_3m-2\leqslant x;\ \underline{d}^{1/s'}\leqslant p_1<p_2<p_3<\underline{d}^{1/s},\ p'|m\Rightarrow p'\geqslant p_2\}|$$
$$\leqslant\frac{4x}{7d\log\underline{d}}\left(\iiint\limits_{4/(7s')\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant 4/(7s)}\frac{w\left(\dfrac{\nu(d,x)-t_1-t_2-t_3}{t_2}\right)}{t_1t_2^2t_3}dt_1\,dt_2\,dt_3+\varepsilon\right).$$

On note T l'intégrale triple précédente. En utilisant la relation $(tw(t))'=w(t-1)$ $(t\geqslant 2)$, on a l'égalité

$$T=\frac{7s'}{4}\int_{4/(7s')}^{4/(7s)}\frac{w\left(\dfrac{\nu(d,x)-t}{4/(7s')}\right)}{t}dt+\frac{7s}{4}\int_{4/(7s')}^{4/(7s)}\frac{w\left(\dfrac{\nu(d,x)-t}{4/(7s)}\right)}{t}dt$$
$$+2\left\{\frac{7s}{4}w\left(\frac{\nu(d,x)}{4/(7s)}\right)-\frac{7s'}{4}w\left(\frac{\nu(d,x)}{4/(7s')}\right)\right\}.$$

D'ailleurs $\chi(d)\neq 0$ implique $\nu(d,x)\geqslant 1$, ce qui donne la majoration

$$T\leqslant\frac{7}{4}\left\{s'W^+\left(\frac{7s'}{4}-\frac{s'}{s}\right)+sW^+\left(\frac{7s}{4}-1\right)\right\}\log\frac{s'}{s}+\frac{7}{2}\left\{sW^+\left(\frac{7s}{4}\right)-s'W^-\left(\frac{7s'}{4}\right)\right\}.$$

D'autre part, T vérifie l'inégalité

$$T\leqslant W^+\left(\frac{7s}{4}-3\right)\iiint\limits_{4/(7s')\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant t_3\leqslant 4/(7s)}\frac{1}{t_1t_2^2t_3}dt_1\,dt_2\,dt_3$$
$$=\frac{7}{4}W^+\left(\frac{7s}{4}-3\right)\left\{2(s-s')+(s+s')\log\frac{s'}{s}\right\},$$

ce qui donne finalement $T\leqslant I(s,s')$. En reportant cette majoration dans (5.11), on obtient

(5.12) $$\sum_d \chi(d)\Omega_2(d)\leqslant(3.5+\varepsilon)C\mathscr{L}^{-1}\sum_d\chi(d)|\mathscr{B}^*(d)|+O(x^{1-\xi})$$
$$\leqslant(I(s,s')+4\varepsilon)\,\Xi(\chi;\ x).$$

En reportant (5.9), (5.10) et (5.12) dans le Lemme 8, on a la majoration

$$\sum_d\chi(d)S(\mathscr{A}_d;\ \mathscr{P}(d),\ \underline{d}^{1/s})\leqslant\left\{1+A(s')-H_{k,x_0}(s')-\int_{s-1}^{s'-1}\frac{1}{2t}\log\left(s'-1-\frac{s'}{t+1}\right)dt\right.$$
$$\left.-\int_{s-1}^{s'-1}\frac{1}{2t}G_{k+1,x_0}\left(\frac{s't}{t+1}\right)dt+\frac{1}{2}I(s,s')+6\varepsilon\right\}\Xi(\chi;\ x),$$

ce qui donne, d'après la définition de H_{k,x_0}, l'inégalité

$$H_{k,x_0}(s)\geqslant J(s,s')+\int_{s-1}^{s'-1}\frac{1}{2t}G_{k+1,x_0}\left(\frac{s't}{t+1}\right)dt+H_{k,x_0}(s')-3\varepsilon.$$

En faisant tendre x_0 vers $+\infty$, puis ε vers 0, on a

$$H_k(s) \geqslant J(s, s') + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{1}{2t} G_{k+1}\left(\frac{s' t}{t+1}\right) dt + H_k(s').$$

Il reste à faire tendre k vers $+\infty$ pour obtenir le Lemme 10.

Nous déduirons de même du Lemme 9 le

LEMME 11. *Pour* $5 \geqslant s' \geqslant 3 \geqslant s > 16/7$ *et* $s'(1-s^{-1}) \geqslant 2$, *on a l'inégalité*

$$H(s) \geqslant K(s, s') + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{1}{3t} G\left(\frac{s' t}{t+1}\right) dt + H(s') + \frac{1}{3} \int_{1/s'}^{1/3} \frac{dt_1}{t_1} \int_{t_1}^{1/3} \frac{H(s'(1-t_1-t_2))}{t_2(1-t_1-t_2)} dt_2$$

où

$$K(s, s') = -\frac{2}{3} \int_{2}^{s'-1} \frac{\log(t-1)}{t} dt + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{1}{3t} \log\left(s'-1-\frac{s'}{t+1}\right) dt$$
$$-\frac{1}{3}(I_1(s, s') + I_2(s, s') + I_3(s))$$

avec

$$I_1(s, s') = \frac{7}{4} W^+\left(\frac{13}{4} - \frac{3}{s}\right)\left(s' - 3 - 3\log\frac{s'}{3}\right)\log\frac{3}{s},$$
$$I_2(s, s') = \frac{21}{4} W^+\left(\frac{17}{4} - \frac{3}{s}\right)\log\frac{s'}{3}\log\frac{3}{s} + \frac{7s}{4} W^+\left(\frac{7s}{4} - \frac{s}{3}\right)\log\frac{s'}{3}$$
$$-\frac{21}{4} W^-\left(\frac{17}{4}\right)\log\frac{s'}{3},$$
$$I_3(s) = \frac{21}{4}(s-3) + \frac{7}{4}(3+2s)\log\frac{3}{s} + \frac{7s}{8}\log^2\frac{3}{s}.$$

Pour démontrer ce lemme, nous estimerons chacun des termes à droite de l'inégalité du Lemme 9, lorsque χ appartient à $\mathscr{U}_k(x)$. Comme pour la démonstration du Lemme 10, on a, pour $x \geqslant x_0$, les inégalités

$$\sum_d \chi(d) S(\mathscr{A}_d; \mathscr{P}(d), \underline{d}^{1/s'}) \leqslant (1 + A(s') - H_{k,x_0}(s')) \Xi(\chi; x), \tag{5.13}$$

$$\sum_d \chi(d) \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p < \underline{d}^{1/s}} S(\mathscr{A}_{dp}; \mathscr{P}(d), \underline{d}^{1/s'}) \tag{5.14}$$
$$\geqslant \left(\int_{s-1}^{s'-1} \frac{1}{t}\log\left(s'-1-\frac{s'}{t+1}\right) dt + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{1}{t} G_{k+1,x_0}\left(\frac{s' t}{t+1}\right) dt - 2\varepsilon\right) \Xi(\chi; x),$$

$$\sum_d \chi(d) \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p < \underline{d}^{1/3}} S(\mathscr{A}_{dp}; \mathscr{P}(d), \underline{d}^{1/s'}) \tag{5.15}$$
$$\geqslant \left(\int_{s-1}^{s'-1} \frac{1}{t}\log\left(s'-1-\frac{s'}{t+1}\right) dt + \int_{s-1}^{s'-1} \frac{1}{t} G_{k+1,x_0}\left(\frac{s' t}{t+1}\right) dt - 2\varepsilon\right) \Xi(\chi; x),$$

$$\sum_d \chi(d) \Omega_3(d) \leqslant (I_1(s, s') + 4\varepsilon) \Xi(\chi; x), \tag{5.16}$$

$$\sum_d \chi(d) \Omega_4(d) \leqslant (I_2(s, s') + 4\varepsilon) \Xi(\chi; x), \tag{5.17}$$

$$\sum_d \chi(d) \Omega_5(d) \leqslant (I_3(s) + 4\varepsilon) \Xi(\chi; x). \tag{5.18}$$

Pour estimer le 4ème terme à droite de (5.7), nous pouvons démontrer, comme pour (4.5), que la fonction caractéristique des dp_1p_2, après découpage des intervalles de variations de p_1 et p_2, se ramène, avec une erreur négligeable, à une somme de fonctions de $\mathscr{U}_{k+2}(x)$; ceci est possible car on a l'inégalité $p_1 < p_2 < \underline{d}^{1/3}$. La majoration de ce terme fait apparaître la fonction H_{k+2,x_0}, plus précisément on a la majoration

$$\sum_d \chi(d) \sum_{\underline{d}^{1/s'} \leqslant p_1 < p_2 < \underline{d}^{1/3}} S(\mathscr{A}_{dp_1p_2}; \mathscr{P}(d), \underline{d}^{1/s'}) \tag{5.19}$$
$$\leqslant \left(\int_{2}^{s'-1} \frac{1}{t}\left(\log\left(s'-1-\frac{s'}{t+1}\right) - \log(t-1)\right) dt\right.$$
$$\left. - \int_{1/s'}^{1/3} \frac{dt_1}{t_1} \int_{t_1}^{1/3} \frac{H_{k+2,x_0}(s'(1-t_1-t_2))}{t_2(1-t_1-t_2)} dt_2 + 2\varepsilon\right) \Xi(\chi; x).$$

En reportant (5.13)–(5.19) dans (5.7), on a la majoration

$$\sum_d \chi(d) S(\mathscr{A}_d; \mathscr{P}(d), \underline{d}^{1/s})$$
$$\leqslant \left\{1 + A(s') - H_{k,x_0}(s') - \int_{s-1}^{s'-1} \frac{1}{3t}\log\left(s'-1-\frac{s'}{t+1}\right) dt\right.$$
$$- \int_{2}^{s'-1} \frac{1}{3t} G_{k+1,x_0}\left(\frac{s' t}{t+1}\right) dt - \int_{2}^{s'-1} \frac{\log(t-1)}{3t} dt$$
$$- \frac{1}{3} \int_{1/s'}^{1/3} \frac{dt_1}{t_1} \int_{t_1}^{1/3} \frac{H_{k+2,x_0}(s'(1-t_1-t_2))}{t_2(1-t_1-t_2)} dt_2$$
$$\left. + \frac{1}{3} I_1(s, s') + \frac{1}{3} I_2(s, s') + \frac{1}{3} I_3(s) + 7\varepsilon\right\} \Xi(\chi; x).$$

Il en résulte le Lemme 11.

Dans les deux propositions suivantes, nous donnerons deux inégalités sur $H(t)$, qui sont dites *inégalités fondamentales*. Elles sont la clé de la déonstration du Théorème 1. On a la

PROPOSITION 3. *Pour* $5 \geqslant s' \geqslant 3 \geqslant s > 12/7$ *et* $s'(1-s^{-1}) \geqslant 2$, *on a l'inégalité*

$$H(s) \geqslant J(s, s') + \int_1^3 H(t) R_2(t; s, s') dt$$

où

$$R_2(t;\,s,\,s')$$

$$= \begin{cases} \dfrac{R_1(t)}{2}\log\dfrac{16}{(s-1)(s'-1)} & si\ 1 \leqslant t \leqslant s'(1-s^{-1})-1, \\[2ex] \dfrac{R_1(t)}{2}\log\dfrac{16}{(s-1)(s'-1)}+\dfrac{1}{2t}\log\dfrac{t+1}{(s-1)(s'-1-t)} & si\ s'(1-s^{-1})-1 \leqslant t \leqslant s'-2, \\[2ex] \dfrac{R_1(t)}{2}\log\dfrac{16}{(s-1)(s'-1)}+\dfrac{1}{2t}\log\dfrac{(t+1)^2}{(s-1)(s'-1)} & si\ s'-2 \leqslant t \leqslant 3, \end{cases}$$

avec

$$R_1(t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{t}\left\{\log(t+1)\log\dfrac{t+2}{3}-\displaystyle\int_3^{t+2}\dfrac{\log(u-1)}{u}\,du\right\} & si\ 1 \leqslant t \leqslant 2, \\[2ex] \dfrac{\sigma}{t}\left\{\log\dfrac{4}{3}\log(t+1)-\displaystyle\int_3^{4}\dfrac{\log(u-1)}{u}\,du\right\} & si\ 2 \leqslant t \leqslant 3, \end{cases}$$

$$\sigma = \left\{1-\log 4\log\frac{4}{3}+\int_3^4\frac{\log(t-1)}{t}\,dt\right\}^{-1}.$$

Il faut signaler que, sur le domaine envisagé, les fonctions $R_1(t;\,s,\,s')$ et $R_2(t;\,s,\,s')$ sont positives. De même on a la

PROPOSITION 4. *Pour* $5 \geqslant s' \geqslant 3 \geqslant s > 16/7$ *et* $s'(1-s^{-1}) \geqslant 2$, *on a l'inégalité*

$$H(s) \geqslant K(s,\,s')+\int_1^3 H(t)\,R_3(t;\,s,\,s')\,dt+\frac{1}{3}\int_{1/s'}^{1/3}\frac{dt_1}{t_1}\int_{1/s'}^{1/3}\frac{H(s'(1-t_1-t_2))}{t_2(1-t_1-t_2)}\,dt_2$$

où

$$R_3(t;\,s,\,s')$$

$$= \begin{cases} \dfrac{R_1(t)}{3}\log\dfrac{32}{(s-1)(s'-1)} & si\ 1 \leqslant t \leqslant s'(1-s^{-1})-1, \\[2ex] \dfrac{R_1(t)}{3}\log\dfrac{32}{(s-1)(s'-1)}+\dfrac{1}{3t}\log\dfrac{t+1}{(s-1)(s'-1-t)} & si\ s'(1-s^{-1})-1 \leqslant t \leqslant \tfrac{2}{3}s'-1, \\[2ex] \dfrac{R_1(t)}{3}\log\dfrac{16}{(s-1)(s'-1)}+\dfrac{1}{3t}\log\dfrac{(t+1)^2}{(s-1)(s'-1-t)^2} & si\ \tfrac{2}{3}s'-1 \leqslant t \leqslant s'-2, \\[2ex] \dfrac{R_1(t)}{3}\log\dfrac{32}{(s-1)(s'-1)}+\dfrac{1}{3t}\log\dfrac{(t+1)^3}{2(s-1)(s'-1)} & si\ s'-2 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

Remarquons que dans le domaine considéré la fonction $R_3(t;\,s,\,s')$ est positive elle aussi.

Nous démontrerons complètement la Proposition 3, l'autre se traite de même.

Nous partons du Lemme 10. La Proposition 2 donne d'abord

$$\begin{aligned} \int_{s-1}^{s'-1}\frac{1}{t}G\left(\frac{s't}{t+1}\right)dt &= s'\int_{s'(1-s^{-1})}^{s'-1}\frac{G(u)}{u(s'-u)}\,du \\ &\geqslant s'\int_{s'(1-s^{-1})}^{s'-1}\frac{1}{u(s'-u)}\left\{G(4)+\int_{u-1}^{3}\frac{H(t)}{t}\,dt\right\}du \\ &= G(4)\log\frac{s'-1}{s-1}+s'\int_{s'(1-s^{-1})}^{s'-1}\frac{du}{u(s'-u)}\int_{u-1}^{3}\frac{H(t)}{t}\,dt. \end{aligned}$$

D'ailleurs on a, en échangeant l'ordre de l'intégrale double,

$$\begin{aligned} \int_{s-1}^{s'-1}\frac{1}{t}G\left(\frac{s't}{t+1}\right)dt &\geqslant G(4)\log\frac{s'-1}{s-1} \\ &\quad+\int_{s'(1-s^{-1})-1}^{s'-2}\frac{H(t)}{t}\log\frac{t+1}{(s-1)(s'-1-t)}\,dt+\log\frac{s'-1}{s-1}\int_{s'-2}^{3}\frac{H(t)}{t}\,dt. \end{aligned} \tag{5.20}$$

De même, la Proposition 2 appliquée trois fois donne encore

$$\begin{aligned} G(4) &\geqslant \int_3^4\frac{H(r)}{r}\,dr \geqslant \int_3^4\frac{dr}{r}\int_{r-1}^{4}\frac{G(u)}{u}\,du \\ &\geqslant \int_3^4\frac{dr}{r}\int_{r-1}^{4}\frac{1}{u}\left\{G(4)+\int_{u-1}^{3}\frac{H(t)}{t}\,dt\right\}du, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$G(4) \geqslant \int_1^3 H(t)\,R_1(t)\,dt. \tag{5.21}$$

De façon similaire on a l'inégalité

$$H(s') \geqslant G(4)\log\frac{4}{s'-1}+\int_{s'-2}^{3}\frac{H(t)}{t}\log\frac{t+1}{s'-1}\,dt. \tag{5.22}$$

En reportant (5.20)–(5.22) dans le Lemme 10, on obtient la Proposition 3.

VI. Démonstration du Théorème 1

Nous prenons

$$s_1 = 2.286, \qquad s_i = 2.3+0.05(i-2) \quad \text{pour } i = 2,\,3,\,\ldots,\,16,$$

et choisissons s_i' $(1 \leqslant i \leqslant 16)$ tels que $K(s_i, s_i')$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ et $J(s_i, s_i')$ $(4 \leqslant i \leqslant 16)$ soient maximaux. Les valeurs de s_i' sont les suivantes (elles ont été obtenues par calcul sur machine):

$$\begin{array}{llll} s_1' = 4.1397056, & s_2' = 4.1251602, & s_3' = 4.0714054, & s_4' = 3.6514034, \\ s_5' = 3.6207675, & s_6' = 3.5879077, & s_7' = 3.5524024, & s_8' = 3.5137748, \\ s_9' = 3.4714679, & s_{10}' = 3.4248332, & s_{11}' = 3.3730983, & s_{12}' = 3.3153400, \\ s_{13}' = 3.2504634, & s_{14}' = 3.1771965, & s_{15}' = 3.0941410, & s_{16}' = 3. \end{array}$$

1. Minorations de $K(s_i, s_i')$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ **et** $J(s_i, s_i')$ $(4 \leqslant i \leqslant 16)$. Nous démontrons d'abord le

LEMME 12. *On a les résultats suivants:*

(i) *Soient* $t_1 = 2.7632227\ldots$, $t_2 = 3.4697488\ldots$, $t_3 = 4.2175392, \ldots$; *alors* $w(t)$ *est décroissant sur* $[1, 2]$, $[t_1, t_2]$, $[t_3, 5]$ *et croissant sur* $[2, t_1]$, $[t_2, t_3]$.

(ii)
$$\sup_{2 \leqslant t \leqslant 3} w(t) = 0.5671432\ldots, \qquad \inf_{2 \leqslant t \leqslant 3} w(t) = 0.5,$$
$$\sup_{3 \leqslant t \leqslant 4} w(t) = 0.5643823\ldots, \qquad \inf_{3 \leqslant t \leqslant 4} w(t) = 0.5608228\ldots,$$
$$\sup_{4 \leqslant t \leqslant 5} w(t) = 0.5615216\ldots, \qquad \inf_{4 \leqslant t \leqslant 5} w(t) = 0.5614544\ldots$$

(iii) *Pour tout entier* $n \geqslant 2$, *on a*
$$\sup_{n \leqslant t \leqslant n+1} w(t) \leqslant \sup_{n-1 \leqslant t \leqslant n} w(t), \qquad \inf_{n \leqslant t \leqslant n+1} w(t) \geqslant \inf_{n-1 \leqslant t \leqslant n} w(t).$$

La démonstration de (i) et (ii) est très simple, ce n'est que du calcul numérique car $w(t)$ pour $1 \leqslant t \leqslant 5$ s'exprime uniquement à l'aide d'intégrales simples. Nous démontrerons la première inégalité de (iii), l'autre se traite de même.

Pour tout $t' \in [n, n+1]$, on a d'après le Lemme 3
$$t'\,w(t') - nw(n) = \int_n^{t'} w(t-1)\,dt \leqslant (t'-n) \sup_{n-1 \leqslant t \leqslant n} w(t),$$
il en résulte le lemme.

Maintenant nous voulons minorer $K(s_1, s_1')$. En utilisant le Lemme 12, on a
$$W^+\left(\frac{13}{4} - \frac{3}{s_1}\right) = W^+(1.93766404\ldots) = \sup\{w(1.93766404\ldots), \sup_{2 \leqslant t \leqslant 3} w(t)\}$$
$$= \sup_{2 \leqslant t \leqslant 3} w(t) \leqslant 0.5671433,$$
$$W^+\left(\frac{17}{4} - \frac{3}{s_1}\right) = W^+(2.93766404\ldots) = \sup\{w(2.93766404\ldots), \sup_{3 \leqslant t \leqslant 4} w(t)\}$$
$$= w(2.93766404\ldots) \leqslant 0.5655797,$$

$$W^+\left(\frac{7s_1}{4} - \frac{s_1}{3}\right) = W^+(3.2385) = \sup\{w(3.2385), \sup_{4 \leqslant t \leqslant 5} w(t)\}$$
$$= \sup_{4 \leqslant t \leqslant 5} w(t) \leqslant 0.5615217,$$
$$W^-\left(\frac{17}{4}\right) = W^-(4.25) \geqslant \inf_{4 \leqslant t \leqslant 5} w(t) \geqslant 0.5614544,$$

d'où

$$I_1(s_1, s_1') = \frac{7}{4} W^+\left(\frac{13}{4} - \frac{3}{s_1}\right)\left(s_1' - 3 - 3\log\frac{s_1'}{3}\right)\log\frac{3}{s_1} \leqslant 0.0468506, \tag{6.1}$$

$$I_2(s_1, s_1') = \frac{7}{4}\log\frac{s_1'}{3}\left\{3W^+\left(\frac{17}{4} - \frac{3}{s_1}\right)\log\frac{3}{s_1} + s_1 W^+\left(\frac{7s_1}{4} - \frac{s_1}{3}\right) - 3W^-\left(\frac{17}{4}\right)\right\} \leqslant 0.0340728, \tag{6.2}$$

$$I_3(s_1) = \frac{7}{4}\left\{3(s_1 - 3) + (3 + 2s_1)\log\frac{3}{s_1} + \frac{s_1}{2}\log^2\frac{3}{s_1}\right\} \leqslant 0.0010159. \tag{6.3}$$

Ensuite nous calculons les deux premières intégrales de $K(s_1, s_1')$ au moyen de la règle de Simpson et obtenons

$$\begin{gathered} \int_2^{s_1'-1} \frac{\log(t-1)}{t}\,dt = 0.1803127\ldots, \\ \int_{s_1-1}^{s_1'-1} \frac{1}{3t}\log\left(s_1' - 1 - \frac{s_1'}{t+1}\right)dt = 0.1644441\ldots \end{gathered} \tag{6.4}$$

Enfin (6.1)–(6.4) donnent
$$K(s_1, s_1') \geqslant 0.0169225.$$

Nous pouvons démontrer de même

$$\begin{array}{lll} K(s_2, s_2') \geqslant 0.0167607, & K(s_3, s_3') \geqslant 0.015981, & J(s_4, s_4') \geqslant 0.0135472, \\ J(s_5, s_5') \geqslant 0.0132047, & J(s_6, s_6') \geqslant 0.0123354, & J(s_7, s_7') \geqslant 0.0111579, \\ J(s_8, s_8') \geqslant 0.0097138, & J(s_9, s_9') \geqslant 0.0082221, & J(s_{10}, s_{10}') \geqslant 0.0068722, \\ J(s_{11}, s_{11}') \geqslant 0.0052795, & J(s_{12}, s_{12}') \geqslant 0.0036832, & J(s_{13}, s_{13}') \geqslant 0.0022504, \\ J(s_{14}, s_{14}') \geqslant 0.0010823, & J(s_{15}, s_{15}') \geqslant 0.0002917, & J(s_{16}, s_{16}') \geqslant 0. \end{array}$$

2. Inégalités linéaires parmi $H(s_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 16)$. La Proposition 4 est une inégalité fonctionnelle satisfaite par la fonction H. Nous discrétisons ce problème aux points s_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ en utilisant la décroissance de H (Proposition 1) et la positivité de $R_3(t; s, s')$; on obtient alors les inégalités suivantes:

$$H(s_i) \geqslant K(s_i, s_i') + \sum_{j=1}^{16} a_{ij} H(s_j) \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3 \tag{6.5}$$

où

$$a_{i1} = \int_1^{s_1} R_3(t; s_i, s_i')\,dt + \int_2^{s_1'-1} \frac{1}{3t}\log\frac{t^2-1}{2t-1}\,dt \quad \text{pour } i = 1, 2, 3,$$

$$a_{ij} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} R_3(t; s_i, s_i')\,dt \quad \text{pour } i = 1, 2, 3 \text{ et } j = 2, \ldots, 16.$$

La Proposition 3 conduit elle aussi à des inégalités du même type:

$$H(s_i) \geqslant J(s_i, s_i') + \sum_{j=1}^{16} a_{ij} H(s_j) \quad \text{pour } i = 4, \ldots, 16 \tag{6.6}$$

où

$$a_{ij} = \int_{s_{j-1}}^{s_j} R_2(t; s_i, s_i')\,dt \quad \text{pour } i = 4, \ldots, 16 \text{ et } j = 1, \ldots, 16$$

et $s_0 = 1$.

3. Minorations de $H(s_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 16)$. Appelons A la matrice carrée d'élément générique (a_{ij}) $(1 \leqslant i, j \leqslant 16)$, H et B les matrices colonnes à seize lignes, qui ont respectivement pour élément de la i-ième ligne $H(s_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 16)$ et $K(s_i, s_i')$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ ou $J(s_i, s_i')$ $(4 \leqslant i \leqslant 16)$. Avec ces notations, les inégalités (6.5) et (6.6) s'écrivent sous la forme

$$H \geqslant B + AH. \tag{6.7}$$

Les éléments a_{ij} $(1 \leqslant i, j \leqslant 16)$ de A peuvent être calculés à l'aide de la règle de Gauss (sur machine), et vérifient l'inégalité

$$0 < a_{ij} < 1/16. \tag{6.8}$$

Pour résoudre (6.7), on résout d'abord le système linéaire

$$Y = B + AY \tag{6.9}$$

sur machine. D'autre part, (6.7) et (6.9) impliquent $(I-A)(H-Y) \geqslant 0$, où I est la matrice unité. Mais (6.8) implique que la matrice $(I-A)^{-1}$ vérifie l'égalité

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + \ldots + A^n + \ldots$$

et qu'elle a tous ses coefficients positifs. D'où on a l'inégalité $H \geqslant Y$, qui s'écrit aussi

$$\begin{array}{lll} H(s_1) \geqslant 0.0235182, & H(s_2) \geqslant 0.0233593, & H(s_3) \geqslant 0.0260361, \\ H(s_4) \geqslant 0.0214302, & H(s_5) \geqslant 0.0208887, & H(s_6) \geqslant 0.019846, \\ H(s_7) \geqslant 0.0185221, & H(s_8) \geqslant 0.0169578, & H(s_9) \geqslant 0.0153794, \\ H(s_{10}) \geqslant 0.0139702, & H(s_{11}) \geqslant 0.0123602, & H(s_{12}) \geqslant 0.0107748, \\ H(s_{13}) \geqslant 0.0093992, & H(s_{14}) \geqslant 0.0083535, & H(s_{15}) \geqslant 0.00774, \\ H(s_{16}) \geqslant 0.0071266. & & \end{array}$$

4. Fin de la démonstration du Théorème 1. D'après la définition de $H(s)$, nous avons, pour k et x_0 suffisamment grands, l'inégalité

$$H_{k,x_0}(s_1) \geqslant 0.023518.$$

Puis en prenant pour χ la fonction caractéristique de $\{1\}$ dans (3.3), nous obtenons, pour $x \geqslant x_0$,

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, \underline{1}^{1/s_1}) \leqslant \frac{2}{4/7-\delta}(1 - H_{k,x_0}(s_1))\,Cx\log^{-2}x \leqslant 3.41769\,Cx\log^{-2}x.$$

Il en résulte

$$\pi_2(x) \leqslant S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, \underline{1}^{1/s_1}) + O(\underline{1}^{1/s_1}) \leqslant 3.418\,Cx\log^{-2}x,$$

ce qui complète la démonstration du Théorème 1.

Bien entendu, il est possible de prendre un nombre plus important de points s_i; l'amélioration est alors minuscule.

VII. Démonstration du Théorème 2

Nous partons de l'inégalité pondérée suivante déjà utilisée par Chen ([5]):

$$\pi_{1,2}(x) \geqslant \sum_{\substack{a\in\mathscr{A} \\ (a,P(x^{1/u}))=1}} \{1 - \tfrac{1}{2}s_1(a) - \tfrac{1}{2}s_2(a) - s_3(a)\} - O(x^{(u-1)/u}) \tag{7.1}$$

où

$$s_1(a) = \sum_{\substack{p\mid a \\ x^{1/u}\leqslant p<x^{1/v}}} 1,$$

$$s_2(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = p_1p_2p_3 \text{ avec } x^{1/u} \leqslant p_1 < x^{1/v} \leqslant p_2 < p_3, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$s_3(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } a = p_1p_2p_3 \text{ avec } x^{1/v} \leqslant p_1 < p_2 < p_3, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec $u = 9.345$ et $v = 3.146$.

Il faut alors estimer chacun des termes à droite de (7.1). Pour cela, nous écrivons (7.1) sous la forme suivante:

$$\pi_{1,2}(x) \geqslant S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, x^{1/u}) - \tfrac{1}{2}S_1 - \tfrac{1}{2}S_2 - S_3 - O(x^{(u-1)/u}) \tag{7.2}$$

où

$$S_1 = \sum_{\substack{a\in\mathscr{A} \\ (a,P(x^{1/u}))=1}} s_1(a) = \sum_{x^{1/u}\leqslant p<x^{1/v}} S(\mathscr{A}_p; \mathscr{P}, x^{1/u}),$$

$$S_2 = \sum_{\substack{a\in\mathscr{A} \\ (a,P(x^{1/u}))=1}} s_2(a) = \sum_{x^{1/u}\leqslant p_1<x^{1/v}\leqslant p_2<(x/p_1)^{1/2}} \;\; \sum_{p_2<p_3<x/p_1p_2,\, p_1p_2p_3-2=p} 1,$$

$$S_3 = \sum_{\substack{a\in\mathscr{A} \\ (a,P(x^{1/u}))=1}} s_3(a) = \sum_{x^{1/v}\leqslant p_1<p_2<(x/p_1)^{1/2}} \;\; \sum_{p_2<p_3<x/p_1p_2,\, p_1p_2p_3-2=p} 1.$$

1. Évaluation de $S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, x^{1/u})$. Nous écrivons d'abord $x^{1/u} = 1^{1/u'}$ avec $u' = (\frac{4}{7}-\delta)u$. Si on prend pour χ la fonction caractéristique de $\{1\}$ dans (3.3), on obtient, pour $x \geqslant x_0$, l'inégalité

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, x^{1/u}) \geqslant \frac{2}{\frac{4}{7}-\delta}\left(B((\tfrac{4}{7}-\delta)u)+G_{k,x_0}((\tfrac{4}{7}-\delta)u)\right)Cx\log^{-2}x. \tag{7.3}$$

La définition de $B(s)$ donne

$$\begin{aligned} B((\tfrac{4}{7}-\delta)u) &= B(\tfrac{4}{7}u)+O(\delta) \\ &= \log(\tfrac{4}{7}u-1)+\int_3^{4u/7-1}\frac{dt}{t}\int_2^{t-1}\frac{\log(s-1)}{s}ds+O(\delta) \geqslant 1.498052. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Ensuite nous estimerons $G_{k,x_0}((\frac{4}{7}-\delta)u)$. Pour cela, nous considérons d'abord $G(\frac{4}{7}u)$. Pour minorer $G(\frac{4}{7}u)$, nous appliquons plusieurs fois les Propositions 1 et 2, ainsi apparaît la fonction $H(t)$ en des points t où on peut recourir aux minorations non triviales trouvées au § VI.3.

$$\begin{aligned} G(\tfrac{4}{7}u) &\geqslant \int_{4u/7-1}^{5}\frac{H(t)}{t}dt \geqslant \int_{4u/7-1}^{5}\frac{dt}{t}\int_{t-1}^{4}\frac{G(s)}{s}ds = \int_{4u/7-2}^{4}\frac{G(s)}{s}\log\frac{s+1}{4}ds \\ &\geqslant \int_{4u/7-2}^{4}\frac{1}{s}\log\frac{s+1}{4}\left\{G(4)+\int_{s-1}^{3}\frac{H(t)}{t}dt\right\}ds \\ &= G(4)\int_{4u/7-2}^{4}\frac{1}{s}\log\frac{s+1}{4}ds+\int_{4u/7-3}^{3}\frac{H(t)}{t}dt\int_{4u/7-2}^{t+1}\frac{1}{s}\log\frac{s+1}{4}ds. \end{aligned}$$

En utilisant (5.21), on a l'inégalité :

$$G(\tfrac{4}{7}u) \geqslant \int_1^3 H(t)R_4(t)\,dt$$

où

$$R_4(t) = \begin{cases} R_1(t)\displaystyle\int_{4u/7-2}^{4}\frac{1}{s}\log\frac{s+1}{4}ds & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant \frac{4}{7}u-3, \\ R_1(t)\displaystyle\int_{4u/7-2}^{4}\frac{1}{s}\log\frac{s+1}{4}ds+\frac{1}{t}\int_{4u/7-2}^{t+1}\frac{1}{s}\log\frac{s+1}{4}ds & \text{si } \frac{4}{7}u-3 \leqslant t \leqslant 3. \end{cases}$$

D'où on déduit

$$G(\tfrac{4}{7}u) \geqslant \sum_{j=1}^{16}H(s_j)\int_{s_{j-1}}^{s_j}R_4(t)\,dt \qquad (s_0 = 1).$$

Le calcul numérique sur machine donne $G(\frac{4}{7}u) \geqslant 0.0000618$. Comme $G(s)$ est décroissant, on a $G((\frac{4}{7}-\delta)u) \geqslant 0.0000618$. La définition de $G(s)$ donne, pour k et x_0 assez grand,

$$G_{k,x_0}((\tfrac{4}{7}-\delta)u) \geqslant 0.000061. \tag{7.5}$$

Enfin (7.3)–(7.5) impliquent

$$S(\mathscr{A}; \mathscr{P}, x^{1/u}) \geqslant 5.243395\,Cx\log^{-2}x \tag{7.6}$$

pour x assez grand.

2. Évaluation de S_1. Nos outils principaux pour évaluer S_1 sont (3.3), le Lemme 5 et le Lemme 6. Donc nous devons découper S_1 en trois parties:

$$\begin{aligned} S_1 &= \Big(\sum_{x^{1/u}\leqslant p<x^{2/7-\delta/2}}+\sum_{x^{2/7-\delta/2}\leqslant p<x^{29/100}}+\sum_{x^{29/100}\leqslant p<x^{1/v}}\Big)S(\mathscr{A}_p; \mathscr{P}, x^{1/u}) \\ &= S_1'+S_1''+S_1''' \end{aligned}$$

par définition.

a) *Étude de* S_1'. En suivant la démonstration de l'inégalité (4.12), on montre de même l'inégalité

$$\begin{aligned} S_1' \leqslant 3.5\Big\{&\log(\tfrac{4}{7}u-1)+4\int_3^{4u/7-1}\frac{dt}{t}\int_2^{t-1}\frac{\log(s-1)}{s}ds \\ &-\tfrac{4}{7}\int_{2u/7}^{4u/7-1}\frac{H(t)}{(\frac{4}{7}u-t)t}dt+O(\delta)\Big\}Cx\log^{-2}x. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Maintenant nous voulons minorer l'intégrale U où

$$U = \int_{2u/7}^{4u/7-1}\frac{H(t)}{(\frac{4}{7}u-t)t}dt.$$

Comme précédemment nous appliquons deux fois les Propositions 1 et 2 pour diminuer l'argument de la fonction H. On a donc

$$\begin{aligned} U &= \int_{2u/7}^{3}\frac{H(t)}{(\frac{4}{7}u-t)t}dt+\int_3^{4u/7-1}\frac{H(t)}{(\frac{4}{7}u-t)}dt \\ &\geqslant \int_{2u/7}^{3}\frac{H(t)}{(\frac{4}{7}u-t)t}dt+G(4)\int_3^{4u/7-1}\frac{\log\frac{4}{t-1}}{(\frac{4}{7}u-t)t}dt \\ &\quad+\int_3^{4u/7-1}\frac{dt}{(\frac{4}{7}u-t)t}\int_{t-2}^{3}\frac{H(r)}{r}\log\frac{r+1}{t-1}dr. \end{aligned}$$

En échangeant l'ordre des intégrations, l'intégrale double précédente vaut

$$\int_{4u/7-3}^{3}\frac{H(t)}{t}dt\int_3^{4u/7-1}\frac{\log\frac{t+1}{r-1}}{(\frac{4}{7}u-r)r}dr.$$

On a finalement l'inégalité

$$U \geqslant \int_1^3 H(t)R_5(t)\,dt$$

où

$$R_5(t) = \begin{cases} \sigma_1 R_1(t) + \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_3^{t+2} \frac{\log\frac{t+1}{r-1}}{(\frac{4}{7}u-r)r}\,dr & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant \frac{4}{7}u-3, \\ \sigma_1 R_1(t) + \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_3^{4u/7-1} \frac{\log\frac{t+1}{r-1}}{(\frac{4}{7}u-r)r}\,dr & \text{si } \frac{4}{7}u-3 \leqslant t \leqslant \frac{2}{7}u, \\ \sigma_1 R_1(t) + \dfrac{1}{(\frac{4}{7}u-t)t} + \dfrac{1}{t}\displaystyle\int_3^{4u/7-1} \frac{\log\frac{t+1}{r-1}}{(\frac{4}{7}u-r)r}\,dr & \text{si } \frac{2}{7}u < t \leqslant 3, \end{cases}$$

avec $\sigma_1 = \displaystyle\int_3^{4u/7-1} \frac{\log\frac{4}{t-1}}{(\frac{4}{7}u-t)t}\,dt$. D'où on déduit

$$\int_{2u/7}^{4u/7-1} \frac{H(t)}{(\frac{4}{7}u-t)t}\,dt \geqslant \sum_{j=1}^{16} H(s_j) \int_{s_{j-1}}^{s_j} R_5(t)\,dt \qquad (s_0 = 1).$$

Un calcul numérique sur machine donne

$$U \geqslant 0.001069. \tag{7.8}$$

En reportant (7.8) dans (7.7), on a l'inégalité

$$S_1' \leqslant 5.540081\, Cx \log^{-2} x. \tag{7.9}$$

b) *Étude de* S_1'' *et* S_1'''. Pour S_1'', nous appliquons le Lemme 2 à $S(\mathscr{A}_p; \mathscr{P}, x^{1/u})$ (avec la condition $\frac{1}{2}P \leqslant p < P$ où P est un réel de la forme $2x^{2/7-\delta/2}, \ldots, 2^{\nu} x^{2/7-\delta/2}$ $(\leqslant x^{29/100})$). Nous obtenons

$$S(\mathscr{A}_p; \mathscr{P}, x^{1/u}) \leqslant V(x^{1/u}) \frac{\omega(p)}{p} F\left(\frac{\log(Q_1/P)}{\log x^{1/u}}\right)(1+O(\varepsilon))\, x \log^{-1} x$$
$$+ \sum_{l<L} \sum_{q \mid P(x^{1/u})} \lambda_l^+(q)\, r(\mathscr{A}, pq)$$

où λ_l^+ est bien factorisable de niveau Q_1/P et de degré 1 avec $Q_1 = x^{2-\varepsilon}/P^5$. Dans ce cas, la condition (C.2) du Lemme 5 est satisfaite. Donc on a l'inégalité

$$\sum_{P/2 \leqslant p < P} \sum_{l > L} \dot{\sum_{q \mid P}} \lambda_l^+(q)\, r(\mathscr{A}, pq) = O_{\varepsilon,\delta}(x \mathscr{L}^{-4})$$

et puis en sommant sur P nous obtenons

$$S_1'' \leqslant V(x^{1/u}) \sum_{x^{2/7-\delta/2} \leqslant p < x^{29/100}} \frac{\omega(p)}{p} F\left(\frac{\log(Q_1/p)}{\log x^{1/u}}\right)(1+O(\varepsilon))\, x \log^{-1} x.$$

D'après le théorème des nombres premiers et la formule de Mertens ($\omega(p) = p/(p-1)$ pour $p \in \mathscr{P}$), on a l'inégalité

$$S_1'' \leqslant u e^{-\gamma} \int_{13u/50}^{2u/7} \frac{F(t)}{2u-t}\,dt\,(1+O(\varepsilon)+O(\delta))\, Cx \log^{-2} x.$$

Enfin le calcul numérique donne

$$S_1'' \leqslant 0.859413\, Cx \log^{-2} x. \tag{7.10}$$

Pour S_1''', nous appliquons le Lemme 6 au lieu du Lemme 5 et obtenons de même

$$\begin{aligned} S_1''' &\leqslant u e^{-\gamma} \int_{u(11/20-1/v)}^{13u/50} \frac{F(t)}{\frac{11}{20}u-t}\,dt\,(1+O(\varepsilon)+O(\delta))\, Cx \log^{-2} x \\ &\leqslant 0.745821\, Cx \log^{-2} x. \end{aligned} \tag{7.11}$$

Les inégalités (7.9)–(7.11) impliquent

$$S_1 \leqslant 6.395102\, Cx \log^{-2} x. \tag{7.12}$$

3. Évaluations de S_2 et S_3. Nous avons besoin du principe d'inversion du rôle des variables de Chen pour évaluer S_2 et S_3. En suivant la méthode de Fouvry et Grupp ([8]), on déduit d'abord

$$S_2 \leqslant 3.5(1+O(\varepsilon))\, C\, |\mathscr{B}| \log^{-1} x, \tag{7.13}$$

avec $\mathscr{B} = \{p_1 p_2 p_3 - 2 \leqslant x;\ x^{1/u} \leqslant p_1 < x^{1/v} \leqslant p_2 < p_3\}$. Pour évaluer $|\mathscr{B}|$, nous utilisons le théorème des nombres premiers et obtenons

$$\begin{aligned} |\mathscr{B}| &= \sum_{x^{1/u} \leqslant p_1 < x^{1/v} \leqslant p_2 < (x/p_1)^{1/2}} \ \sum_{p_2 < p_3 < x/(p_1 p_2)} 1 \\ &\leqslant (1+O(\varepsilon)) \sum_{x^{1/u} \leqslant p_1 < x^{1/v} \leqslant p_2 < (x/p_1)^{1/2}} \frac{x}{p_1 p_2 \log(x/(p_1 p_2))} \\ &= (1+O(\varepsilon)) \int_{x^{1/u}}^{x^{1/v}} \frac{dt_1}{t_1 \log t_1} \int_{x^{1/v}}^{(x/t_1)^{1/2}} \frac{x\,dt_2}{t_2 \log t_2 \log(x/(t_1 t_2))} \\ &= \int_{v-1}^{u-1} \frac{1}{t} \log\left(v-1-\frac{v}{t+1}\right) dt\,(1+O(\varepsilon))\, x \log^{-1} x. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Ensemble (7.13) et (7.14) donnent

$$\begin{aligned} S_2 &\leqslant 3.5 \int_{v-1}^{u-1} \frac{1}{t} \log\left(v-1-\frac{v}{t+1}\right) dt\,(1+O(\varepsilon))\, Cx \log^{-2} x \\ &\leqslant 1.957177\, Cx \log^{-2} x. \end{aligned} \tag{7.15}$$

De même, on peut déduire

$$S_3 \leqslant 3.5 \int_2^{v-1} \frac{\log(t-1)}{t}\,dt\,(1+O(\varepsilon))\, Cx \log^{-2} x \leqslant 0.016807\, Cx \log^{-2} x. \tag{7.16}$$

Pour terminer la démonstration du Théorème 2, il suffit de regrouper les inégalités (7.2), (7.6), (7.12), (7.15) et (7.16).

Bibliographie

[1] E. Bombieri and H. Davenport, *Small differences between prime numbers*, Proc. Roy. Soc. Ser. A 293 (1966), 1–18.
[2] E. Bombieri, J. B. Friedlander and H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progressions to large moduli*, Acta Math. 156 (1986), 203–252.
[3] V. Brun, *Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach*, C. R. Acad. Sci. Paris 168 (1919), 544–546.
[4] J.-R. Chen, *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes*, Sci. Sinica 16 (1973), 157–176.
[5] — *On the representation of a large even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes (II)*, ibid. 21 (1978), 421–430.
[6] — *On the Goldbach's problem and the sieve methods*, ibid. 21 (1978), 701–739.
[7] E. Fouvry, *Autour du théorème de Bombieri–Vinogradov*, Acta Math. 152 (1984), 219–244.
[8] E. Fouvry and F. Grupp, *On the switching principle in sieve theory*, J. Reine Angew. Math. 370 (1986), 101–125.
[9] — — *Weighted sieves and twin prime type equations*, Duke J. Math., à paraître.
[10] E. Fouvry and H. Iwaniec, *Primes in arithmetic progressions*, Acta Arith. 42 (1983), 197–218.
[11] H. Halberstam and H.-E. Richert, *Sieve Methods*, Academic Press, London 1974.
[12] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Some problems of 'partitio numerorum', III: On the expression of a number as a sum of primes*, Acta Math. 44 (1923), 1–70.
[13] H. Iwaniec, *A new form of the error term in the linear sieve*, Acta Arith. 37 (1980), 307–320.
[14] C.-G. Pan, *On the upper bound of the number of ways to represent an even integer as a sum of two primes*, Sci. Sinica 23 (1980), 1368–1377.
[15] C.-D. Pan, *A new mean value theorem and its applications*, in: *Recent Progress in Analytic Number Theory*, Vol. 1, Academic Press, London 1981, 275–287.
[16] A. Selberg, *On elementary methods in prime number-theory and their limitations*, in: 11 Skand. Mat. Kongr., Trondheim 1949, 13–22.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
MATHÉMATIQUES, Bâtiment 425
91405 Orsay, France

Reçu le 9.1.1989