where $0 < q < 1$ and $|\theta_0| \leqslant c$ for $c > 0$. Then (14) follows from (9) and (13) and the proof is complete. ∎

Finally, we remark that the independence of the digits a_n, $n \in N$, with infinite mean value allows us to apply the various *extended classical limit* theorems to this case.

Acknowledgement. The authors are indebted to the referee for helpful comments, and for pointing out an incorrect deduction in the original draft.

References

[1] J. Galambos, *Representations of Real Numbers by Infinite Series*, Lecture Notes in Math. 502, Springer-Verlag, 1976.

[2] S. Grigorescu and M. Iosifescu, *Dependence with complete connections and applications*, Edit. St. Enciclop., Bucharest 1982.

[3] S. Kalpazidou, *A Gaussian measure for certain continued fractions*, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (7) (1986), 527–537.

[4] — *Some asymptotic results on digits of nearest integer continued fractions*, J. Number Theory 22 (3) (1986), 271–279.

[5] A. Knopfmacher and J. Knopfmacher, *Two constructions of the real numbers via alternating series*, Internat. J. Math. Math. Sci. 12 (1989), 603–613.

[6] M. F. Norman, *Markov Processes and Learning Models*, Academic Press, New York 1972.

[7] A. Oppenheim, *The representation of real numbers by infinite series of rationals*, Acta Arith. 21 (1972), 391–398.

[8] O. Perron, *Irrationalzahlen*, Chelsea Publ. Co., New York 1951.

[9] E. Ya. Remez, *On series with alternating sign which may be connected with two algorithms of M. V. Ostrogradskii for approximation of irrational numbers*, Uspekhi Mat. Nauk 6 (5) (45) (1951), 33–42; Math. Reviews 13 (1952), 444.

[10] J. O. Shallit, *Metric theory of Pierce expansions*, Fibonacci Quart. 24 (1986), 22–40.

[11] W. Sierpiński, *Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries*, C. R. Soc. Sci. Varsovie 4 (1911), 56–77 (in Polish); French transl. in: *Oeuvres choisies*, t. I, PWN, Warszawa 1974, 236–254.

FACULTY OF SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
ARISTOTLE UNIVERSITY OF THESSALONIKI
54006 Thessaloniki, Greece

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS (A. Knopfmacher)
DEPARTMENT OF MATHEMATICS (J. Knopfmacher)
UNIVERSITY OF WITWATERSRAND
Johannesburg, Wits 2050, South Africa

Received on 26.2.1988
and in revised form on 21.9.1988 (1794)

ACTA ARITHMETICA
LV (1990)

Über die zahlentheoretische Funktion $\omega(n)$

von

DIETER WOLKE (Freiburg i. Br.)

1. Einleitung und Ergebnisse. Das mittlere Verhalten der Funktion

$$\omega(n) = \sum_{p \mid n} 1 \qquad (p \text{ prim})$$

ist sehr gut bekannt. Für $q \in N$ gilt

$$(1.1) \qquad \sum_{n \leqslant x} \omega^q(n) = x \sum_{j=0}^{N} R_{jq}(\ln\ln x)(\ln x)^{-j} + O\left(x(\ln x)^{-N-1}(\ln\ln x)^{q-1}\right).$$

Dabei ist N beliebig aus N, R_{0q} ist ein Polynom vom Grad q, die R_{jq} $(j \geqslant 1)$ sind Polynome vom Grad $\leqslant q-1$. (Für $N = 1$ s. Hardy und Ramanujan [3]. Für beliebige N s. Delange [2], Théorème 2. Hier wird die von Selberg [7] angegebene Methode benutzt. Für eine ausführliche Darstellung s. Ivić [4], Ch. 15.) Mit Hilfe der Dirichletschen Hyperbelmethode erzielte Saffari [6] eine Verschärfung von (1.1). Für $q = 1$ lautet sein Ergebnis

$$(1.2) \qquad \sum_{n \leqslant x} \omega(n) = x\ln\ln x + Bx - x\int_1^{x^{1/2}} \frac{\{t\}}{t^2(\ln x - \ln t)}\,dt + O\left(\exp\left(-c(\ln x)^{3/5}(\ln\ln x)^{-1/5}\right)\right).$$

Unter Annahme der Riemannschen Vermutung kann nach Saffari der Fehler sogar durch $O(x^{2/3}(\ln x)^{1/3})$ abgeschätzt werden. Es scheint, als ob die zu erwartende Schranke $O(x^{1/2+\varepsilon})$ mit der Hyperbelmethode nicht erzielt werden könnte. Kolesnik und Straus [5] untersuchten mittels Integration über die erzeugende Dirichlet-Reihe die Summen $\sum_{n \leqslant x, \omega(n)=k} 1$. Sie deuteten an, daß unter Annahme der Riemannschen Vermutung Fehlerglieder der Ordnung $O(x^{1/2+\varepsilon})$ erreicht werden können. Dies Verfahren soll hier auf das erstgenannte Problem angewandt werden.

SATZ 1. *Sei $q \in N$. Notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung ist die asymptotische Formel*

$$\sum_{n \leqslant x} \omega^q(n) = x \sum_{0 \leqslant j \leqslant (1/2)\ln x} R_{jq}(\ln\ln x)(\ln x)^{-j} + O(x^{1/2+\varepsilon})$$

(*für jedes* $\varepsilon > 0$).

Die entsprechende Aussage ist richtig für die Funktion $\Omega(n) = \sum_{p^k \| n} k$.

Die Umkehrung ist auch in dem von Kolesnik und Straus betrachteten Problem möglich.

Satz 2. *Sei $k \in \mathbf{N}$. Notwendig und hinreichend für die Gültigkeit der Riemannschen Vermutung ist die Formel*

$$\sum_{n \leqslant x, \omega(n) = k} 1 = x \sum_{0 \leqslant j \leqslant (1/2) \ln x} P_{jk}(\ln \ln x)(\ln x)^{-j-1} + O(x^{1/2+\varepsilon})$$

($\varepsilon > 0$, *P_{jk} Polynome vom Grad $\leqslant k-1$*).

Das Verfahren kann auf zahlreiche ähnliche Fragen angewandt werden. Ein Beispiel:

Satz 3. *Sei*

$$r(n) = \begin{cases} 1, & n = n_1^2 + n_2^2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad (n_1, n_2 \in \mathbf{N}_0).$$

Bezeichne $L(s)$ die zum Nicht-Hauptcharakter mod 4 *definierte L-Funktion. Dann folgt aus der Riemannschen Vermutung für $\zeta(s)$ und $L(s)$*

$$\sum_{n \leqslant x} r(n) = x \sum_{0 \leqslant j \leqslant (1/2) \ln x} a_j (\ln x)^{-1/2-j} + O(x^{1/2+\varepsilon})$$

($a_0 \neq 0$, $a_j \in \mathbf{R}$).

Die Umkehrung ist hier nicht möglich, da zum Beispiel die Existenz einer Nullstelle $\varrho = \beta + i\gamma$ ($\beta > \frac{1}{2}$) der Ordnung zwei von $\zeta(s)$ mit $L(\varrho) \neq 0$ mit der Gültigkeit der obigen Formel verträglich sein kann.

Es soll hier nur Satz 1 hergeleitet werden, da die Beweise weitgehend analog verlaufen. Die natürliche Zahl q wird im Folgenden als fest angesehen. Alle auftretenden Konstanten können von q abhängen, die O- und $\ll$- obendrein von ε. Die Konstanten $a, b, c, \ldots$, eventuell mehrfach indiziert, sind reell.

2. Hilfssätze. Sei

$$F(s) = \sum_n \omega^q(n)/n^s \qquad (\sigma = \operatorname{Re} s > 1) \tag{2.1}$$

die zugeordnete Dirichlet-Reihe.

Lemma 1. *Es existieren in $\{s, \sigma > \frac{1}{2}\}$ holomorphe Funktionen $G_\nu = G_{\nu q}$ $(0 \leqslant \nu \leqslant q-1)$ mit*

$$G_\nu(\tfrac{1}{2} + \delta + it) \ll \delta^{-q} \qquad (0 < \delta \leqslant 1), \tag{2.2}$$

so daß für $\sigma > \frac{1}{2}$

$$F(s) = \zeta(s)\left(\ln^q \zeta(s) + \sum_{\nu=0}^{q-1} \ln^\nu \zeta(s) \cdot G_\nu(s)\right) \tag{2.3}$$

gilt. ($\ln \zeta$ bezeichnet den Zweig, der auf $\{s \in \mathbf{R}, s > 1\}$ reellwertig ist. Hierdurch ist $\ln \zeta$ auf $\{\sigma > \frac{1}{2}\}$ holomorph definiert außer im reellen Intervall $(\frac{1}{2}, 1]$ bzw. links von eventuellen ζ-Nullstellen $\varrho = \beta + i\gamma$ mit $\beta > \frac{1}{2}$).

Beweis. Aus

$$\omega^q(n) = \sum_{n = dl} \sum_{\substack{p_1, \ldots, p_q \\ [p_1, \ldots, p_q] = 1}} 1$$

ergibt sich

$$F(s) = \zeta(s) \sum_{p_1, \ldots, p_q} \frac{1}{[p_1, \ldots, p_q]^s}$$

$$= \sum_{1 \leqslant \nu \leqslant q} \sum_{\{1, \ldots, q\} = B_1 \cup \ldots \cup B_\nu} \sum_{p_1, \ldots, p_\nu} \frac{1}{p_1^s \ldots p_\nu^s},$$

wobei die $B_j \neq \emptyset$ paarweise disjunkt und die p_j paarweise verschieden sind. Für jedes $\nu \in \{1, \ldots, q\}$ läßt sich nach Kolesnik–Straus [5], Cor. 3.40, die letzte Summe schreiben als

$$(P(s))^\nu + \sum_{m=1}^{\nu-1} \sum_{\substack{1 \leqslant j_1, \ldots, j_m \\ j_1 + \ldots + j_m = \nu}} \beta_{j_1 \ldots j_m \nu} P(j_1 s) \ldots P(j_m s),$$

wobei

$$P(s) = \sum_p \frac{1}{p^s} = \ln \zeta(s) + G(s),$$

$G(s)$ holomorph für $\sigma > \frac{1}{2}$ und $G(\frac{1}{2} + \delta + it) \ll \delta^{-1}$ $(0 < \delta \leqslant 1)$. Zusammenfassung ergibt die Behauptung des Lemmas.

Für $x > e^2$ und

$$0 < r < \frac{1}{2} - \frac{1}{\ln x} \tag{2.4}$$

bezeichne

$$W = W(x, r) = H_1 + K + H_2$$

den folgenden Weg: Die komplexe Ebene sei längs der negativen reellen Achse geschlitzt. H_1 verlaufe auf dem unteren Ufer des Schnittes von $-\frac{1}{2} + 1/(\ln x)$ bis $-r$, der Kreis K vom Radius r umrunde den Nullpunkt im positiven Sinn und H_2 verlaufe längs dem oberen Ufer von $-r$ bis $-\frac{1}{2} + 1/(\ln x)$.

Lemma 2. *Für $\mu \geqslant 0$, $1 \leqslant \nu \leqslant q$ gilt*

$$J_{\mu\nu} := \frac{1}{2\pi i} \int_W x^s s^\mu \left(\ln \frac{1}{s}\right)^\nu ds \tag{2.5}$$

$$= \frac{1}{(\ln x)^{\mu+1}} \sum_{j=0}^{\nu-1} (\ln \ln x)^j b_{\mu\nu j} + O(x^{-1/2}).$$

Für $\nu = 0$ verschwindet das Integral.

Beweis. Es ist leicht zu sehen, daß der Beitrag des Kreises bei $r \to 0$ gegen Null geht. Man erhält somit

$$(2.6)\qquad J_{\mu\nu} = \frac{(-1)^{\nu+\mu}}{2\pi i} \int_0^{1/2-1/(\ln x)} x^{-t} t^{\mu} \left((\ln t + i\pi)^{\nu} - (\ln t - i\pi)^{\nu}\right) dt$$

$$= (-1)^{\nu+\mu} \sum_{0 \leqslant j \leqslant (\nu-1)/2} \binom{\nu}{2j+1} (i\pi)^{2j} \int_0^{1/2-1/(\ln x)} x^{-t} t^{\mu} (\ln t)^{\nu-(2j+1)}\, dt.$$

Aus Kolesnik–Straus [5], Lemma 3.12, entnimmt man

$$\int_0^{1/2-1/(\ln x)} x^{-t} t^{\mu} (\ln t)^{\varkappa}\, dt = \frac{1}{(\ln x)^{\mu+1}} \sum_{l=0}^{\varkappa} A_{\mu\varkappa l} (\ln\ln x)^{l} + O\left(\frac{2^{\varkappa} x^{-1/2}}{\ln x} (\ln\ln x)^{\varkappa}\right).$$

Einsetzen in (2.6) führt zu (2.5).

LEMMA 3. *Für $0 \leqslant \nu \leqslant q$ sei*

$$J_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{x^s}{s} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\nu} ds.$$

Dann gilt für jedes $\varepsilon > 0$

$$(2.7)\qquad J_{\nu} = (\ln\ln x)^{\nu} + \sum_{0 \leqslant j \leqslant (1/2)\ln x} \tilde{R}_{\nu j}(\ln\ln x)(\ln x)^{-j} + O(x^{-1/2+\varepsilon}).$$

Dabei sind die $\tilde{R}_{\nu j}$ Polynome vom Grad $\leqslant \nu - 1$ mit reellen Koeffizienten.

Beweis. Wegen $J_0 = 1$ kann $\nu \geqslant 1$ angenommen werden. Es werde

$$(2.8)\qquad J_{\nu} = \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{x^s - 1}{s} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\nu} ds + \frac{1}{2\pi i} \int_W \frac{1}{s} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\nu} ds$$

$$= J_{\nu 1} + J_{\nu 2}$$

gesetzt.

In $J_{\nu 1}$ kann wieder der Grenzübergang $r \to 0$ vollzogen werden:

$$J_{\nu 1} = \frac{(-1)^{\nu+1}}{2\pi i} \int_0^{1/2-1/(\ln x)} \frac{x^{-t} - 1}{t} \left((\ln t + i\pi)^{\nu} - (\ln t - i\pi)^{\nu}\right) dt$$

$$= \sum_{0 \leqslant j \leqslant (\nu-1)/2} \sum_{0 \leqslant \varkappa \leqslant \nu-(2j+1)} \binom{\nu}{2j+1} (i\pi)^{2j} \binom{\nu-(2j+1)}{\varkappa}$$

$$\times (-1)^{\varkappa} (\ln\ln x)^{\nu-(2j+1)-\varkappa} \int_0^{(1/2)\ln x - 1} \frac{e^{-t} - 1}{t} (\ln t)^{\varkappa}\, dt.$$

Für $0 \leqslant \varkappa \leqslant \nu - 1$ ist das letzte Integral

$$= \int_0^1 \frac{e^{-t} - 1}{t} (\ln t)^{\varkappa}\, dt + \int_1^{(1/2)\ln x - 1} \frac{e^{-t}}{t} (\ln t)^{\varkappa}\, dt - \frac{\left(\ln\left(\tfrac{1}{2}\ln x - 1\right)\right)^{\varkappa+1}}{\varkappa+1}$$

$$= c_{\varkappa} + O(x^{-1/2+\varepsilon}) + \frac{(\ln\ln x)^{\varkappa+1}}{\varkappa+1} + \sum_{l=0}^{\varkappa} \sum_{1 \leqslant r \leqslant (1/2)\ln x} c_{\varkappa l r} \frac{(\ln\ln x)^{l}}{\ln^{r} x}.$$

Einsetzen ergibt mit etwas Rechnung

$$(2.9)\qquad J_{\nu 1} = (\ln\ln x)^{\nu} + \sum_{0 \leqslant j \leqslant (1/2)\ln x} \tilde{R}_{\nu j}(\ln\ln x)(\ln x)^{-j} + O(x^{-1/2+\varepsilon}).$$

Dabei sind die $\tilde{R}_{\nu j}$ Polynome der gewünschten Art.

Zur Auswertung von $J_{\nu 2}$ werde W zu einem geschlossenen Weg $\tilde{W} = H_1 + K + H_2 + H_3 + K_1 + H_4$ ergänzt. Dabei ist H_3 die Horizontale von $-\frac{1}{2} + 1/(\ln x)$ nach -1 längs dem oberen Ufer, K_1 der Kreis vom Radius 1 um $s = 0$, im negativen Sinn durchlaufen, und H_4 die Horizontale am unteren Ufer von -1 nach $-\frac{1}{2} + 1/(\ln x)$. Offenbar ist

$$J_{\nu 2} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{H_3 + K_1 + H_4} \frac{1}{s} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\nu} ds.$$

Man sieht leicht

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{K_1} \frac{1}{s} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\nu} ds = d_{\nu 1} = \begin{cases} \dfrac{-\pi^{\nu}}{\nu+1}, & \nu \equiv 0\ (4), \\[2ex] \dfrac{\pi^{\nu}}{\nu+1}, & \nu \equiv 2\ (4), \\[2ex] 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie schon mehrfach ergibt sich

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{H_3 + H_4} \frac{1}{s} \left(\ln \frac{1}{s}\right)^{\nu} ds = \frac{(-1)^{\nu}}{2\pi i} \int_{1/2-1/(\ln x)}^{1} \frac{1}{t} \left((\ln t + i\pi)^{\nu} - (\ln t - i\pi)^{\nu}\right) dt$$

$$= d_{\nu 2} + (-1)^{\nu} \sum_{0 \leqslant j \leqslant (\nu-1)/2} \binom{\nu}{2j+1} (\pi i)^{2j} \int_0^{(\ln x)^{-1}} \frac{1}{\frac{1}{2} - t} \left(\ln\left(\tfrac{1}{2} - t\right)\right)^{\nu-1-2j} dt.$$

Durch Entwickeln des Integranden überzeugt man sich, daß der letzte Ausdruck die Gestalt

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant (1/2)\ln x} \frac{d_k}{(\ln x)^k} + O(x^{-1/2+\varepsilon})$$

hat. Zusammenfassung liefert Lemma 3.

3. Beweis zu Satz 1, "notwendig". Wegen $\omega(n) \ll \ln n$ ist für $\sigma > 1$

$$\sum_n \frac{\omega^q(n)}{n^{\sigma}} \ll |\zeta^{(q)}(\sigma)| \ll (\sigma - 1)^{-(q+1)}.$$

Für $x > e^4$ und $T = x^{1/2}$ gilt daher nach der Perronschen Umkehrformel (s. Titchmarsh [8], Lemma 3.12)

$$(3.1)\qquad \sum_{n \leqslant x} \omega^q(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1+1/(\ln x) - iT}^{1+1/(\ln x) + iT} F(s) \frac{x^s}{s}\, ds + O\left(x^{1/2} (\ln x)^{q+1}\right).$$

Man versehe die komplexe Ebene mit einem Schnitt auf der reellen Achse von $-\infty$ bis 1. Sei $1/(\ln x) < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Bezeichne H_1 die Horizontale von $1+1/(\ln x)-iT$ bis $\frac{1}{2}+\varepsilon-iT$, V_1 die Vertikale von $\frac{1}{2}+\varepsilon-iT$ bis $\frac{1}{2}+\varepsilon$, H_2 die Horizontale auf dem unteren Ufer des Schnittes von $\frac{1}{2}+\varepsilon$ bis $\frac{1}{2}+1/(\ln x)$, $W' = W'(x, r)$ den um Eins nach rechts verschobenen Weg W, H_3 die Horizontale auf dem oberen Ufer des Schnittes von $\frac{1}{2}+1/(\ln x)$ bis $\frac{1}{2}+\varepsilon$, V_2 die Vertikale von $\frac{1}{2}+\varepsilon$ bis $\frac{1}{2}+\varepsilon+iT$ und H_4 die Horizontale von $\frac{1}{2}+\varepsilon+iT$ bis $1+1/(\ln x)+iT$. Mit der Riemannschen Vermutung und Lemma 1 ergibt sich aus (3.1)

$$\sum_{n\leqslant x} \omega^q(n) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{W'} + \int_{H_1+V_1+H_2+H_3+V_2+H_4}\Big) F(s)\frac{x^s}{s}\,ds + O(x^{1/2+\varepsilon}). \tag{3.2}$$

Nach Lemma 1, sowie Titchmarsh [8], Thms. 14.14 und 14.15, läßt sich $F(s)$ unter Annahme der Riemannschen Vermutung auf $H_1, V_1, \ldots, H_4$ durch $O(x^{\varepsilon/2})$ abschätzen. Mit (3.2) folgt daher

$$\sum_{n\leqslant x} \omega^q(n) = \frac{x}{2\pi i}\int_W F(s+1)\frac{x^s}{s+1}\,ds + O(x^{1/2+\varepsilon}). \tag{3.3}$$

Im weiteren sollen H, H^*, $\tilde{H}$ und H_ν Funktionen bezeichnen, die für $|s| < \frac{1}{2}$ holomorph sind und der Abschätzung

$$H(s) \ll (\tfrac{1}{2}-|s|)^{-q} \tag{3.4}$$

genügen. Wegen

$$\zeta(s) = \frac{1+(s-1)H(s-1)}{s-1}, \qquad \ln\zeta(s) = \ln\frac{1}{s-1} + H^*(s-1)$$

($H, H^* \ll 1$ für $|s-1| \leqslant 1$) ergibt sich für $s\in W$ aus Lemma 1

$$\frac{F(s+1)}{s+1} = \frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^q + \tilde{H}(s)\left(\ln\frac{1}{s}\right)^q + \sum_{\nu=0}^{q-1} H_\nu(s)\frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu. \tag{3.5}$$

Sei $\mu_0 = [\frac{1}{2}\ln x]$. Für $0 \leqslant \nu \leqslant q-1$ ist wegen (3.4)

$$H_\nu(s) = \sum_{\mu=0}^{\mu_0} \tilde{a}_{\mu\nu} s^\mu + O\big((2|s|)^{\mu_0+1}(\ln x)^{q+1}\big). \tag{3.6}$$

(Zur Fehlerabschätzung s. z.B. Ahlfors [1], S. 177, mit einem Kreis vom Radius $\frac{1}{2}-1/(2\ln x)$ um $s_0 = 0$.) Die Koeffizienten genügen der Ungleichung

$$\tilde{a}_{\mu\nu} \ll (\mu+1)^q 2^\mu.$$

Man wende hierzu die Cauchysche Formel auf den Kreis vom Radius $r_0 = 1/(2(1+q/\mu))$ um $s_0 = 0$ an und verwende (3.4). Ähnliches gilt für die Funktion $\tilde{H}$.

Mit (3.5) ergibt dies für $s\in W$

$$\frac{F(s+1)}{s+1} = \frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^q + \sum_{\nu=0}^{q-1} a_\nu \frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu + \sum_{0\leqslant\mu\leqslant\mu_0}\ \sum_{0\leqslant\nu\leqslant q} a_{\mu\nu} s^\mu \left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu + O\big((2|s|)^{\mu_0}(\ln x)^{q+2}\big), \tag{3.7}$$

wobei

$$a_{\mu\nu} \ll (\mu+1)^q 2^\mu. \tag{3.8}$$

Wegen $t-\frac{1}{2}\ln(2t) \geqslant \frac{1}{2}$ für $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$ ist

$$\int_0^{1/2} x^{-t}(2t)^{(\ln x)/2}\,dt \ll x^{-1/2},$$

also auf Grund von (3.1) und (3.4), mit $r = (2\ln x)^{-1}$,

$$\sum_{n\leqslant x}\omega^q(n) = \frac{x}{2\pi i}\int_W x^s\frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^q ds + \sum_{0\leqslant\nu\leqslant q-1} a_\nu \frac{x}{2\pi i}\int_W x^s \frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu ds + \sum_{0\leqslant\mu\leqslant\mu_0}\ \sum_{0\leqslant\nu\leqslant q} a_{\mu\nu}\frac{x}{2\pi i}\int_W x^s s^\mu\left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu ds + O(x^{1/2+\varepsilon}). \tag{3.9}$$

Setzt man nun nach Lemma 2 und 3 für die obigen Integrale ein, so erhält man die im Satz behauptete asymptotische Formel.

Es ist unschwer einzusehen, daß die hier auftretenden Polynome $R_{jq}(\ln\ln x)$ mit denen aus (1.1) übereinstimmen. Wie in Lemma 2 zeigt man für $\mu \geqslant 1$ und $1 \leqslant \nu \leqslant q$

$$J_{\mu\nu} \ll \mu!(\ln x)^{-\mu-1}(\ln\ln x)^{q-1},$$

sowie für $N \geqslant 1$ und $1 \leqslant \nu \leqslant q$ wie in Lemma 3

$$J_\nu = (\ln\ln x)^\nu + \sum_{0\leqslant j\leqslant N} \tilde{R}_{\nu j}(\ln\ln x)(\ln x)^{-j} + O\big((\ln x)^{-N-1}(\ln\ln x)^{q-1}\big).$$

Hieraus kann wie oben — auch ohne Riemannsche Vermutung — (1.1) hergeleitet werden. Durch eine asymptotische Formel der Gestalt (1.1) sind die Polynome R_{jq} eindeutig bestimmt.

4. Beweis zu Satz 1, "hinreichend". Es werde

$$\sum_{n\leqslant x}\omega^q(n) = L(x) + R(x) \tag{4.1}$$

vorausgesetzt, wobei $L(x)$ die Summe aus Satz 1 ist und $R(x)$ der Abschätzung $\ll x^{1/2+\varepsilon}$ genügt.

Für $0 < \delta < \frac{1}{2}$ sei $W_{0\delta}$ der wie W gebildete Weg, in dem die Horizontalen nach links bis $-\frac{1}{2}$ reichen und der Kreis den Radius δ hat. Aus 3. entnimmt man, daß für $x \geqslant 1$, $L(x)$ der Beziehung

$$L(x) = \frac{x}{2\pi i}\left(\sum_{\nu=0}^{q} a_\nu \int_{W_{0\delta}} \frac{x^s}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu ds\right.$$

$$\left. + \sum_{0 \leqslant \mu \leqslant (\ln x)/2} \sum_{0 \leqslant \nu \leqslant q} a_{\mu\nu} \int_{W_{0\delta}} x^s s^\mu \left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu ds\right) + O(x^{1/2+\varepsilon})$$

genügt. Für $\sigma = \operatorname{Re} z > 1$ ist daher

$$(4.2)\quad F(z) = -z \int_1^\infty \sum_{n \leqslant x} \omega^q(n) x^{-z-1} dx$$

$$= \frac{-z}{2\pi i} \int_{W_{0\delta}} ds \sum_{\nu=0}^{q} a_\nu \frac{1}{s}\left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu \int_1^\infty dx\, x^{s-z}$$

$$- \frac{z}{2\pi i} \int_{W_{0\delta}} ds \sum_{\mu \geqslant 0} \sum_{\nu=0}^{q} a_{\mu\nu} s^\mu \left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu \int_{e^{2\mu}}^\infty dx\, x^{s-z} + F_1(z).$$

Dabei ist F_1 eine für $\sigma > \frac{1}{2}$ holomorphe Funktion. Die Vertauschung der Integrale ist insbesondere wegen (3.8) gerechtfertigt.

Der erste Term in (4.2) ist offenbar für $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2}$, $|\operatorname{Im} z| > \frac{1}{2}$ holomorph. Im zweiten Term können, erneut wegen (3.8), s-Integration und Summation vertauscht werden. Man erhält so den Ausdruck

$$(4.3)\qquad \frac{z}{2\pi i} \sum_{\nu=0}^{q} \sum_{\mu \geqslant 0} a_{\mu\nu} \int_{W_{0\delta}} ds\, s^\mu \left(\ln\frac{1}{s}\right)^\nu \frac{e^{2\mu(s-z+1)}}{s-z+1}.$$

Sei $\mathfrak{K}$ ein kompakter Teil von $\{z = \sigma + i\tau,\ \sigma > \frac{1}{2},\ |\tau| > \frac{1}{2}\}$ mit $\sigma \geqslant \frac{1}{2} + 2\delta$ für $z \in \mathfrak{K}$ und $0 < \delta \leqslant e^{-3}$. Dann kann das Integral über den Kreis durch $\ll_\delta e^{-\mu}$ abgeschätzt werden, während der restliche Teil wegen

$$0 \leqslant te^{1-2t} \leqslant \tfrac{1}{2} \quad \text{für } 0 \leqslant t \leqslant \tfrac{1}{2}$$

$\ll (e^{-4\delta}/2)^\mu$ ist.

Mit (3.8) ergibt sich daraus die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (4.3) in $\mathfrak{K}$ und somit die Holomorphie.

Aus der Gültigkeit der Asymptotik in Satz 1 folgt daher mit Lemma 1 die Holomorphie von

$$\zeta(s)\left((\ln\zeta(s))^q + \sum_{\nu=0}^{q-1} (\ln\zeta(s))^\nu G_\nu(s)\right)$$

im Bereich $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$, $|\operatorname{Im} s| > \frac{1}{2}$. Die Annahme einer Nullstelle $\sigma_0 = \beta_0 + i\gamma_0$ $(\beta_0 > \frac{1}{2})$ der ζ-Funktion sieht hierzu im Widerspruch. Damit ist der zweite Teil der Behauptung gezeigt.

Literatur

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York 1966.
[2] H. Delange, *Sur des formules de Atle Selberg*, Acta Arith. 19 (1971), 105–146.
[3] G. H. Hardy and S. Ramanujan, *The normal number of prime factors of a number n*, Quart. J. Math. Oxford 48 (1920), 76–92.
[4] A. Ivić, *The Riemann Zeta-Function*, Wiley, New York 1985.
[5] G. Kolesnik and E. G. Straus, *On the distribution of integers with a given number of prime factors*, Acta Arith. 37 (1980), 181–199.
[6] B. Saffari, *Sur quelques applications de la «méthode de l'hyperbole» de Dirichlet à la théorie des nombres premiers*, Enseign. Math. (2) 14 (1968), 205–224.
[7] A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, J. Indian Math. Soc. 18 (1954), 83–87.
[8] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, Clarendon, Oxford 1951.

MATHEMATISCHES INSTITUT
ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT
Albertstraße 23b
D-7800 Freiburg i. Br., BRD

Eingegangen am 24.3.1988
und in revidierter Form am 6.2.1989 (1804)