ACTA ARITHMETICA
LV (1990)

On certain character sums

by

MASAO TOYOIZUMI (Kawagoe)

1. Introduction. In [3], Williams showed that for any positive integer n,

$$\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) a^n = O(p^{n+1/2} \log p), \tag{1}$$

where p is an odd prime and $\left(\frac{a}{p}\right)$ is the Legendre symbol.

Let q be a positive integer and let χ be a non-principal primitive character modulo q. For any positive integer n, we put

$$S_\chi(n) = \sum_{a=1}^{q-1} \chi(a) a^n.$$

The aim of this note is to prove the following two theorems, which enable us to improve the estimate (1).

THEOREM 1. *Assume that* $\chi(-1) = 1$ *and* $n \geqslant 2$. *Then*

$$|S_\chi(n)| < C_1(n) q^{n+1/2},$$

where

$$C_1(n) = \frac{2\zeta(2) n!}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{1 \leqslant m \leqslant n/2} \frac{(2\pi)^{n+1-2m}}{(n+1-2m)!}$$

and $\zeta(s)$, *as usual, denotes the Riemann zeta function.*

THEOREM 2. *Assume that* $\chi(-1) = -1$ *and* $n \geqslant 3$. *Then*

$$|S_\chi(n)| < (C_2(n) + |L(1, \chi)|/\pi) q^{n+1/2},$$

where

$$C_2(n) = \frac{2\zeta(3) n!}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{1 \leqslant m \leqslant (n-1)/2} \frac{(2\pi)^{n-2m}}{(n-2m)!}.$$

We note here that

$$C_1(n) < \frac{\zeta(2)e^{2\pi}n!}{(2\pi)^{n+1}}, \quad C_2(n) < \frac{\zeta(3)e^{2\pi}n!}{(2\pi)^{n+1}}.$$

These estimates are useful for large n.

By Theorem 2 and the upper bound for $L(1, \chi)$ due to Pintz [2], we have

THEOREM 3. *Let χ be a non-principal real primitive character modulo q, and assume that $\chi(-1) = -1$. Then for any $\varepsilon > 0$ and any positive integer n,*

$$|S_\chi(n)| < \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}} + \varepsilon\right) q^{n+1/2} \log q$$

if $q > q_0(\varepsilon, n)$.

As immediate consequences of Theorems 1 and 3, we obtain the following two corollaries, which give us an improvement of (1).

COROLLARY 1. *Let p be an odd prime, and assume that $p \equiv 1 \pmod 4$. Then for any integer $n \geqslant 2$,*

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) a^n\right| < C_1(n) p^{n+1/2},$$

where $C_1(n)$ is defined in Theorem 1.

COROLLARY 2. *Let p be an odd prime, and assume that $p \equiv 3 \pmod 4$. Then for any $\varepsilon > 0$ and any positive integer n,*

$$\left|\sum_{a=1}^{p-1} \left(\frac{a}{p}\right) a^n\right| < \frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}} + \varepsilon\right) p^{n+1/2} \log p$$

if $p > p_0(\varepsilon, n)$.

2. Proofs of Theorems 1 and 2. Let $B_{k,\chi}$ denote the kth Bernoulli number corresponding to χ in the sense of Leopoldt. Then it is known that (cf. [1], p. 11)

$$S_\chi(n) = \frac{1}{n+1}(B_{n+1,\chi}(q) - B_{n+1,\chi}(0)),$$

where

$$B_{n+1,\chi}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{k,\chi} x^{n+1-k}.$$

Thus we get

$$S_\chi(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_{k,\chi} q^{n+1-k}. \tag{2}$$

Moreover, let $\tau(\chi)$ be the Gaussian sum defined by

$$\tau(\chi) = \sum_{h=1}^{q-1} \chi(h) \exp(2\pi i h/q).$$

Then it is also known that

$$|\tau(\chi)| = |\tau(\bar{\chi})| = \sqrt{q}, \tag{3}$$

where $\bar{\chi}$ is the character conjugate to χ.

First, we prove Theorem 1. Since $\chi(-1) = 1$, it follows from (2) that

$$S_\chi(n) = \frac{1}{n+1} \sum_{1 \leqslant m \leqslant n/2} \binom{n+1}{2m} B_{2m,\chi} q^{n+1-2m}. \tag{4}$$

By noting that for any positive integer m,

$$L(2m, \bar{\chi}) = \frac{(-1)^{m+1}\tau(\bar{\chi})}{2(2m)!}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2m} B_{2m,\chi}, \quad |L(2m, \bar{\chi})| < \zeta(2),$$

from (3) we have

$$|B_{2m,\chi}| < \frac{2\zeta(2)(2m)!}{(2\pi)^{2m}} q^{2m-1/2}.$$

Therefore, from (4) we obtain

$$|S_\chi(n)| < \frac{2\zeta(2) q^{n+1/2}}{n+1} \sum_{1 \leqslant m \leqslant n/2} \binom{n+1}{2m} \frac{(2m)!}{(2\pi)^{2m}} = C_1(n) q^{n+1/2},$$

as required.

Now, we show Theorem 2. Since $\chi(-1) = -1$, it follows from (2) that

$$\begin{aligned} S_\chi(n) &= \frac{1}{n+1} \sum_{0 \leqslant m \leqslant (n-1)/2} \binom{n+1}{2m+1} B_{2m+1,\chi} q^{n-2m} \\ &= B_{1,\chi} q^n + \frac{1}{n+1} \sum_{1 \leqslant m \leqslant (n-1)/2} \binom{n+1}{2m+1} B_{2m+1,\chi} q^{n-2m} \\ &= B_{1,\chi} q^n + S, \quad \text{say}. \end{aligned} \tag{5}$$

By noting that

$$B_{1,\chi} = \frac{i\tau(\chi) L(1, \bar{\chi})}{\pi}, \tag{6}$$

$$|L(1, \chi)| = |L(1, \bar{\chi})|, \tag{7}$$

from (3) we have at once

$$|B_{1,\chi} q^n| = \frac{|L(1, \chi)|}{\pi} q^{n+1/2}. \tag{8}$$

Since for any positive integer m,

$$L(2m+1, \bar{\chi}) = \frac{(-1)^m i\tau(\bar{\chi})}{2(2m+1)!}\left(\frac{2\pi}{q}\right)^{2m+1} B_{2m+1,\chi}, \qquad |L(2m+1, \bar{\chi})| < \zeta(3),$$

we find that

$$|S| < C_2(n)q^{n+1/2} \tag{9}$$

in the same way as above. Then our assertion follows immediately from (5), (8) and (9).

3. Proof of Theorem 3. In the cases $n = 1$ and $n = 2$, our assertion follows from (3), (6), (7) and the result of Pintz [2], because $S_\chi(1) = qB_{1,\chi}$ and $S_\chi(2) = qS_\chi(1)$.

If $n \geqslant 3$, our assertion follows easily from Theorem 2 and the result of Pintz [2].

References

[1] K. Iwasawa, *Lectures on p-adic L-functions*, Ann. of Math. Stud. 74, Princeton Univ. Press, 1972.

[2] J. Pintz, *Elementary methods in the theory of L-functions VII*, Acta Arith. 32(1977), 397–406.

[3] K. S. Williams, *A class of character sums*, J. London Math. Soc. 46 (1971), 67–72.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOYO UNIVERSITY
Kawagoe-Shi, Saitama 350, Japan

Received on 7.10.1987 (1755)

ACTA ARITHMETICA
LV (1990)

Indépendance linéaire des valeurs des solutions transcendantes de certaines équations fonctionnelles II

par

JEAN-PAUL BÉZIVIN (Paris)

0. Introduction. Dans cet article, nous poursuivons l'étude commencée dans [2] des propriétés arithmétiques de certaines fonctions entières transcendantes.

Bien que tout ce que nous allons montrer soit valable pour un corps quadratique imaginaire, nous nous bornerons à considérer le cas du corps $\boldsymbol{Q}$ des nombres rationnels, la généralisation à un corps quadratique imaginaire étant immédiate. Nous notons $\bar{\boldsymbol{Q}}$ une clôture algébrique de $\boldsymbol{Q}$.

Soit $u(n)$ une suite récurrente linéaire d'éléments de $\boldsymbol{Q}$, c'est-à-dire une suite d'éléments de $\boldsymbol{Q}$ ayant une expression de la forme

$$u(n) = \sum_{i=1}^{s} P_i(n)a_i^n \tag{1}$$

avec P_i appartenant à $\bar{\boldsymbol{Q}}[x]$, non nuls, et les a_i à $\bar{\boldsymbol{Q}}-\{0\}$. Nous supposerons dans tout cet article que $u(n)$ est non nul pour tout entier n.

Nous notons $A(n)$ la suite définie par

$$A(n) = u(0)\ldots u(n). \tag{2}$$

Les fonctions qui nous intéressent sont les fonctions de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/A(n). \tag{3}$$

Nous supposerons aussi dans toute la suite que la suite $u(n)$ est non dégénérée, c'est-à-dire qu'aucun des a_i n'est une racine de l'unité différente de 1, et de même pour les quotients a_i/a_j.

Sous ces hypothèses, la fonction $f(z)$ est une fonction entière de la variable complexe z, et nous nous intéressons aux propriétés d'indépendance linéaire sur $\boldsymbol{Q}$ de f et de ses dérivées aux points de $\boldsymbol{Q}$.

Les fonctions $f(z)$ satisfont à certaines équations fonctionnelles, voir [2], d'où le titre. L'étude faite dans [2] concernait le cas où les polynômes P_i figurant dans l'expression (1) étaient constants.